Ecuaciones Diferenciales Parciales.
Tarea 3: Ecuaciones de Laplace y del calor

Semestre 2017-2

1. Demuestra que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante bajo rotaciones, es decir, si $O \in \mathbb{R}^n$ es una matriz de rotación (tal que $O^\top O = I$) y si definimos $w(x) := u(Ox)$, entonces $\Delta w = 0$ si y sólo si $\Delta u = 0$.

2. Sea u armónica en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \leq M < +\infty.$$

Demuestra que $u = 0$. (*Sugerencia:* Utiliza la segunda propiedad del promedio en una bola $B_R(x)$. Aplica la desigualdad de Schwarz y toma el límite cuando $R \to +\infty$.)

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$.

4. Demuestra el *teorema de Weyl*: suponiendo que $u \in C(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega u \Delta\varphi \, dx = 0,$$

para cualquier $\varphi \in C_0^2(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces u es armónica en Ω.

5. Sea $G(x, y)$ la función de Green para la bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Demuestra que

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) := \nabla_y G(x, y) \cdot \hat{n} = \frac{|x|^2 - R^2}{\omega_n R |x - y|^n},$$

para cualesquiera $x \in B_R(0)$, $y \in \partial B_R(0)$, y donde $\hat{n}$ denota la normal exterior a $\partial B_R(0)$. La función

$$K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - y|^n},$$

es el *núcleo de Poisson para la bola* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$.

6. (a) Demuestra que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-3}}{(\rho^2 + k^2)^{n/2}} \, d\rho \; = \; \frac{1}{k^2(n-2)},$$

para todo $n > 3$, y todo $k \neq 0$. (*Sugerencia:* Usa sustitución trigonométrica e integra por partes.)

(b) Sea el núcleo de Poisson para el semi-plano $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_n > 0\}$, $n \geq 2$,

$$K(x, y) = \frac{2x_n}{\omega_n |x - y|^n},$$

para $x \neq y$. Prueba, mediante un cálculo directo, que

$$\int_{\partial\mathbb{R}^n_+} K(x, y) \, dS_y \; = \; 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$. (*Sugerencia:* Primero pruébalo para $n = 2$ y $n = 3$; recuerda que $\omega_2 = 2\pi$ y $\omega_3 = 4\pi$. Para el caso general $n > 3$ escribe la integral en todo $\mathbb{R}^{n-1}$ como una integral triple: la integral en una de las variables, la integral de superficie en *cáscaras esféricas en* $\mathbb{R}^{n-2}$, y la integral en el radio de las cáscaras; usa (a) y aplica la conocida relación de recursión $\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}/(n-2)$ para $n \geq 3$; no es necesario demostrar esta última.)

7. Sea $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\,\overline{B_1(0)}\,)$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{en } B_1(0), \\ u &= g, \quad \text{en } \partial B_1(0). \end{aligned}$$

8. Sean

$$\begin{aligned} B_1 &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1\}, \\ B_1^+ &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^2 < 1,\, y > 0\}. \end{aligned}$$

Sea $u \in C^2(B_1^+) \cap C(\,\overline{B_1^+}\,)$, armónica en B_1^+ y tal que $u(x,0) = 0$. Demuestra que la función

$$v(x,y) = \begin{cases} u(x,y), & y \geq 0, \\ -u(x,-y), & y < 0, \end{cases}$$

es armónica en B_1. A esto se le conoce como el *principio de reflexión de Schwarz.* (*Sugerencia:* Sea w la solución al problema $\Delta w = 0$ en B_1, $w = v$ en ∂B_1. Define $V(x,y) = w(x,y) + w(x,-y)$. Prueba que $V \equiv 0$.)

9. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Demuestra que la solución al problema de Cauchy,

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

está dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \phi(x/\sqrt{4t}\,)\right),$$

donde

$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2}\, dt.$$

La función ϕ se conoce como la *función de error.*

10. Encuentra una fórmula explícita para la solución (escrita como una convolución) al siguiente problema:

$$\begin{aligned} u_t + u &= u_{xx} + 2u_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x, \qquad\qquad\quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que para cada $x \in \mathbb{R}$, fijo, $u(x,t) \to 0$ si $t \to +\infty$. (*Sugerencia:* Encuentra un cambio de variables de la forma $u = ve^{\alpha x + \beta t}$ de modo que el problema se reduzca a resolver la ecuación del calor. Recuerda que

$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,t)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4t}\, dx = 1,$$

para cada $t > 0$.)

11. Sea $\epsilon > 0$. Sea $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$, con $u > 0$, una solución de

$$u_t - \epsilon u_{xx} = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t > 0.$$

Demuestra que

$$v(x,t) = -\frac{2\epsilon u_x}{u}$$

satisface *la ecuación de Burgers viscosa*:

$$v_t + v v_x = \epsilon v_{xx},$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$. Este cambio de variables se conoce como *la transformación de Hopf-Cole*, y es notable pues transforma una ecuación *nolineal* (Burgers) a la ecuación del calor.

12. Sea $u \in C^2(Q) \cap C(\overline{Q})$, donde $Q = (0,1) \times (0, +\infty)$, una solución de

$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, & 0 < x < 1,\;\; t > 0,\\ u(x,0) &= \sin(\pi x), & 0 \le x \le 1,\\ u(0,t) = 2te^{1-t}, \quad u(1,t) &= 1 - \cos(\pi t), & t > 0. \end{aligned}$$

(Obsérvese que los valores de frontera coinciden en $(0,0)$ y $(1,0)$.) Demuestra que $0 \le u(x,t) < 2$ para todo $(x,t) \in Q$. (Nótese que la segunda desigualdad es estricta.) Da una estimación para los valores $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ y $u(\frac{1}{2}, 3)$.

13. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto, con frontera suave. Sea $T > 0$, y $\Omega_T = \Omega \times (0,T]$, $\Gamma_T = \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$. Demuestra que si $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\Gamma_T)$ es solución de $u_t - \Delta u = 0$ en Ω_T, entonces

$$\min_{\Gamma_T} u \le u(x,t) \le \max_{\Gamma_T} u,$$

para todo $(x,t) \in \Omega_T$.

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Supongamos que $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega \times [0,T])$, con $T > 0$. Si $u \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ es una solución del problema,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= e^{-u}, & &\text{en } \Omega \times (0,T],\\ u(\cdot, 0) &= f, & &\text{en } \Omega,\\ u &= g, & &\text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

demuestra que

$$-M \le u \le Te^M + M, \qquad \text{en } \Omega \times (0,T],$$

donde

$$M := \max\left\{ \max_{\Omega} |f|,\; \max_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\}.$$

15. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto, con $\partial\Omega$ suave. Demuestra que si existe una solución $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,T))$ con $T > 0$ fijo, de la solución a la ecuación del calor no homogénea con condiciones iniciales y de Neumann,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u &= h(x,t), \quad x \in \Omega,\, T > t > 0,\\ u(x,0) &= f(x), \quad x \in \Omega,\\ \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial n} &= g(t), \qquad x \in \partial\Omega,\; T > t > 0, \end{aligned}$$

entonces es única. (*Sugerencia:* Aplica el método de energía.)

Total: 150 pts.