Ecuaciones Diferenciales Parciales

Semestre 2019-2

Tarea 1: Ecuaciones de primer orden

1. Encuentra una fórmula explícita para la solución al problema de Cauchy de la siguiente ecuación de transporte con *decaimiento*,

$$\begin{aligned} u_t + a \cdot \nabla u + cu &= 0, \qquad && x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{R}^n$ es un vector constante, $c > 0$ es constante, y $\nabla u = (u_{x_1}, \ldots, u_{x_n})^\top \in \mathbb{R}^n$. Aquí $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es una función conocida de clase C^1. Comprueba que tu respuesta es, en efecto, solución del problema.

2. Considera la ecuación lineal de primer orden

$$yu_x + xu_y = 0,$$

con datos iniciales

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \\ u(0,y) &= g(y). \end{aligned}$$

f y g son funciones conocidas de clase C^1 que satisfacen $f(0) = g(0)$. Determina las curvas características y prueba que cualquier solución es constante a lo largo de las mismas. Usa este hecho para dar una fórmula explícita para la solución general en las regiones (i) $x = \pm y$, (ii) $y^2 - x^2 > 0$, y (iii) $x^2 - y^2 > 0$. Verifica que la solución satisface, en efecto, la ecuación y las condiciones iniciales y que es continua en todo el plano.

3. Estudia el sistema característico asociado al siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x - xu_y &= 1, \\ u(x,0) &= 0. \end{aligned}$$

Estudia la transformación $(\eta, \xi) \mapsto (x,y)$. ¿Cuándo es invertible? Si el dato inicial es de la forma $u(x,0) = f(x)$ y la solución $u = u(x,y)$ es *continua* en $x = 0$, ¿qué se puede decir de la función $f(x)$? ¿Y de $f(0)$?

4. Considera la ecuación cuasi-lineal

$$uu_x + yu_y = x,$$

con datos sobre la curva en el plano

$$\mathcal{I} = \{(\xi, \xi) \in \mathbb{R}^2 \,:\, \xi > 0\}.$$

Determina si existe una única solución, si no hay soluciones, o bien si existe un número infinito de soluciones de clase C^1 en una vecindad del punto $(1,1) \in \mathcal{I}$ para cada uno de los siguientes datos iniciales:

(a) $u = 2\xi$ sobre $\mathcal{I}$,

(b) $u = \xi$ sobre $\mathcal{I}$,

(c) $u = \sin(\pi\xi/2)$ sobre $\mathcal{I}$.

5. Considera el problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} yu_x + xu_y &= 0, \\ u(e^{\xi}, e^{\xi}) &= \tfrac{1}{2}\xi^2, \qquad \xi \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Demuestra que no existe solución de clase C^1 en ninguna vecindad del punto $(1,1,0)$.

6. Considera el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} uu_x + u_y &= 1, \\ u(\xi - \xi^2, \xi) &= \xi, \end{aligned}$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$. ¿Existe alguna solución de clase C^1 en una vecindad del punto $(2/9, 1/3, 1/3)$? Explica tu respuesta.

7. Resuelve la ecuación completamente no lineal,

$$xu_x + yu_y + u_x u_y - u = 0,$$

con condición inicial $u(x, -x) = 1$. ¿Es la solución única? ¿Es global?

8. Resuelve la ecuación de Burgers

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \tag{1}$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0, \\ 1 - x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Prueba que la solución clásica existe hasta un tiempo finito de rompimiento $T_* > 0$. Calcula $T_* > 0$. Analizando las características, escribe una solución explícita a partir del tiempo $T_* > 0$ en forma de una onda discontinua. Prueba que dicha solución satisface la condición de entropía de Lax.

9. Considera el siguiente problema:

$$\rho_t + (\rho(1-\rho))_x = 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0,$$

$$\rho(x,0) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Encuentra una solución débil y entrópica para todo tiempo $t > 0$. Escribe la solución explícitamente. ¿Porqué es entrópica? (*Sugerencia:* Dado que la función de flujo es cóncava, las discontinuidades de $\rho(0,x)$ en $x = 0$ y en $x = 1$ dan lugar a una onda de choque y a una onda de rarefacción, respectivamente.) Interpreta tu respuesta en términos de flujo de tráfico.

10. (Tráfico en un túnel.) Un modelo más realista para la velocidad del flujo de tráfico en el interior de un túnel largo es el siguiente:

$$u(\rho) = \rho^{-1}F(\rho) = \begin{cases} u_{\max}, & 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \lambda \log\left(\frac{\rho_{\max}}{\rho}\right), & \rho_c \leq \rho \leq \rho_{\max}, \end{cases}$$

donde

$$\lambda = \frac{u_{\max}}{\log(\rho_{\max}/\rho_c)}.$$

La velocidad u es continua como función de ρ, incluso en el valor de la densidad crítica $\rho_c = \rho_{\max}\exp(-u_{\max}/\lambda)$. Si la densidad de los autos es $\rho \leq \rho_c$ entonces éstos viajan con velocidad igual a la velocidad máxima. Si la entrada del túnel se localiza en $x = 0$ y los autos esperan la apertura del mismo a tiempo $t = 0$, la densidad inicial de los autos está dada por

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_{\max}, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

Resuelve el problema de Riemann asociado al modelo de tráfico. Especifica la densidad y la velocidad del tráfico como funciones de x y de t. Si un auto se encuentra en la posición $x = \xi_0 < 0$ determina la trayectoria del auto y el tiempo que tarda en entrar al túnel.

Total: 10 pts.