Ecuaciones Diferenciales Parciales II
Segundo Examen Parcial: Ecuaciones elípticas
Respuestas

1. Discute la solvabilidad en sentido débil del problema:

$$\begin{aligned} Lu &:= -u'' - u = f, \qquad x \in [0,\pi], \\ u(0) &= u(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

donde $f(x) = \sin x$. ¿Existe una solución débil $u \in H_0^1(0,\pi)$ de (1)? ¿Si existe, es única? (*Sugerencia:* Aplica el Teorema 2 de existencia visto en clase (alternativa de Fredholm).)

Solución: Por el teorema 2 de existencia, se cumple (A), o se cumple (B). Dado que, claramente, cada función $u(x) = a \sin x$, con $a \in \mathbb{R}$, constante, es solución de $Lu = 0$ en $(0,\pi)$, con $u(0) = u(\pi) = 0$, entonces se cumple (B). Notamos que $L = L^*$ (operador autoadjunto). En efecto, para todo $u, v \in H_0^1(0,\pi)$, integrando por partes y aplicando las condiciones de frontera obtenemos

$$\langle v, Lu \rangle_{L^2} = -\int_0^\pi v(u'' + u)\, dx = \int_0^\pi v'u' - vu\, dx = -\int_0^\pi (v'' + v)u\, dx = \langle Lv, u \rangle_{L^2}.$$

Por lo tanto $L = L^*$ y concluímos que $N = N^*$ con $\dim N < \infty$. Toda solución de $u'' + u = 0$, con $u(\pi) = u(0) = 0$ es de la forma $u(x) = a \sin x$, por lo que $\dim N = 1$, con $N = \operatorname{span}\{\sin x\}$. Por el teorema 2, el problema (1) tiene una solución débil si y sólo si $\langle f, v \rangle_{L^2} = 0$ para todo $v \in N$. Dado que,

$$\langle f, v \rangle_{L^2} = \int_0^\pi \sin^2 x\, dx = \frac{\pi}{2},$$

concluímos que el problema (1) no tiene solución débil en $H_0^1(0,\pi)$ si $f = \sin x$.

2. Sea el operador uniformemente elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j} \left(a^{ij}(x) u_{x_i} \right)_{x_j},$$

con $a^{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y acotado. Demuestra que, para cada $f \in L^2(\Omega)$, existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ al problema de Dirichlet:

$$\begin{aligned} Lu &= f, \qquad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \qquad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{2}$$

(*Sugerencia:* Usa la desigualdad de Poincaré para demostrar que la forma bilineal asociada al operador L satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram en $H_0^1(\Omega)$.)

Solución: Integrando por partes la forma bilineal asociada es

$$B[u,v] = \sum_{i,j} \int_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx.$$

Por lo tanto,

$$|B[u,v]| \le \sum_{i,j} \|a^{ij}\|_{L^\infty} \int_\Omega |Du||Dv|\, dx \le \alpha \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1},$$

con $\alpha = \alpha(\|a\|_{L^\infty}) > 0$. Por elipticidad uniforme se tiene que

$$\theta \int_\Omega |Du|^2\, dx \le \sum_{i,j} \int_\Omega a^{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j}\, dx = B[u,u].$$

Aplicando la desigualdad de Poincaré ($\|u\|_{L^2} \leq C\|Du\|_{L^2}$, para $u \in H_0^1(\Omega)$) obtenemos

$$B[u,u] \geq \frac{\theta}{2}\|Du\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{2C^2}\|u\|_{L^2}^2 \geq \beta\|u\|_{H_0^1}^2,$$

donde $\beta := \text{mín}\{\theta/2, \theta/2C^2\} > 0$. Por lo tanto, la forma bilineal $B[\cdot,\cdot]$ satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram en $H_0^1(\Omega)$. Concluímos que existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ al problema (2), para cada $f \in L^2(\Omega)$.