LECCIÓN 4: ENTROPÍA Y FLUJO DE ENTROPÍA.

RAMÓN G. PLAZA

1.9. **Definición de función de entropía y flujo de entropía.** Consideremos un sistema de leyes de conservación

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, \tag{1}$$

con $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty)$, $u(x,t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω abierto y acotado, $f^j : \Omega \to \mathbb{R}^n$ de claseC^2, $j = 1,\dots,d$, con condición inicial,

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

en $t = 0$. Muchos sistemas en mecánica de la forma (1) admiten una ley de conservación suplementaria del tipo,

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u)_{x_j} = 0, \tag{3}$$

donde $E : \Omega \to \mathbb{R}$ es una función estrictamente convexa y $\Psi : \Omega \to \mathbb{R}^{d\times 1}$, $\Psi = (\Psi^1,\dots,\Psi^d)^\top$ es un vector de "flujos" donde cada Ψ^j es una función escalar. A la función $E(u)$ se le conoce como *función de entropía* y a las funciones Ψ se les denomina *flujos de entropía*.

Supongamos que u es una solución de clase C^1 de (1). Podemos entonces preguntarnos, ¿bajo qué condiciones satisface u una ley de conservación adicional de la forma (3)?

Vamos a denotar a las matrices jacobianas como

$$A^j(u) := Df^j(u) \in \mathbb{R}^{n\times n},$$

y a los gradientes de E y de Ψ^j como

$$DE(u) = (E_{u_1},\dots,E_{u_n})^\top \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$
$$D\Psi^j(u) = (\Psi^j_{u_1},\dots,\Psi^j_{u_n})^\top \in \mathbb{R}^{n\times 1},$$

para $j = 1,\dots,d$ y todo $u \in \Omega$. Si u es solución de clase C^1 de (1) entonces multiplicando por DE tenemos

$$\begin{aligned} 0 &= DE(u)^\top (u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(u) u_{x_j}) \\ &= E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} DE(U)^\top A^j(u) u_{x_j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto si pedimos que se cumplan las relaciones

$$DE(u)^\top A^j(u) = D\Psi^j(u), \qquad j = 1,\dots,d, \tag{4}$$

Date: 18 de febrero, 2008.

para todo $u \in \Omega$, entonces la ley de conservación (3) se satisface.

Definición 1.1. Una función real y convexa $E : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 es denominada *funcion de entropía* del sistema (1) si existen d funciones $\Psi^j : \Omega \to \mathbb{R}$, llamadas *flujos de entropía* tales que se satisfacen (4) para toda $u \in \Omega$, y en particular, toda solución clásica de (1) satisface la ecuación (3). Al par (E, Ψ) se le conoce como *par de entropía*.

Observación 1.2. 1. La relación (3) no es cierta para soluciones déiles de (1), ya que si u es discontinua con discontinuidad Σ, (3) induce una relación adicional de salto de tipo Rankine-Hugoniot de la forma

$$n_t[E(u)] + \sum_{j=1}^{d} n_j[\Psi^j(u)] = 0,$$

sobre Σ. En general, soluciones débiles no son de clase C^1, gracias a loas ondas de choque y otras discontinuidades, como para justificar (3). La idea, para soluciones débiles, es la de sustituir (3) por la *desigualdad*

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^{d} \Psi^j(u)_{x_j} \le 0, \tag{5}$$

en $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$, en el sentido distribucional.
2. En las aplicaciones, muchas veces la entropía *matemática* $E(u)$ es el negativo de la entropía *física*. La desigualdad (5) significa que dicha entropía evoluciona en el tiempo de acuerdo al flujo Ψ, pero que también puede tener saltos de un solo signo.
3. Análogamente a la definición de solución débil, dado un par de entropía (E, Ψ) podemos extender la desigualdad (5) a una desigualdad de tipo integral. Multiplicando (5) por una función de prueba[1]

$$\phi \in \mathcal{D}^+ := \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \phi \ge 0\},$$

e integrando por partes, tal como lo hicimos para definir soluciones débiles, llegamos a la relación integral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t E(u) + \sum_{j=1}^{d} \phi_{x_j} \Psi^j(u)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) u_0(x)\, dx \ \ge\ 0. \tag{6}$$

4. Notemos que las ecuaciones (4) son un sistema de n ecuaciones diferenciales (para cada j), con dos funciones desconocidas: E y Ψ^j, el cual no tiene solución en general por estar sobredeterminado. No obstante, existen importantes ejemplos de sistemas para los cuales existen soluciones no triviales a (4), por ejemplo, las ecuaciones de Euler para gases compresibles. Existe también una clase general de ecuaciones donde existe siempre una solución a (4) y enconsecuencia una función de entropía: los sistemas *simétricos* (ver Lema 1.4 a continuación).

1.10. **Entropía e hiperbolicidad.** En esta sección vamos a relacionar los conceptos de entropía con la clase de sistemas simetrizables. Comenzaremos con el caso particular de los sistemas simétricos. A continuación probaremos un lema elemental de cálculo.

[1]Nótese que la clase de funciones de prueba que consideramos para la definición de solución débil era $C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$, mientras que aquí tomamos funciones escalares *no negativas* (para respetar el sentido de la desigualdad) y suaves.

Lema 1.3 (Lema de Poincaré). *Si el sistema* (1) *es simétrico, entonces existen funciones* $g^j : \Omega \to \mathbb{R}$ *de clase* C^1*,* $j = 1, \ldots, d$*, tales que*

$$Dg^j(u) = f^j(u), \qquad j = 1, \ldots, d, \tag{7}$$

para toda $u \in \Omega$*.*

Prueba. Basta con probar que si $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, de clase C^1 es tal que $D\psi(u)$ es simétrico, entonces podemos construir $g : \Omega \to \mathbb{R}$ de clase C^1 tal que $Dg(u) = \psi(u)$. Podemos definir

$$g(u) := \int_{u_*}^{u_j} \psi_j(u_1, \ldots, \tilde{u}_j, \ldots, u_n)\, d\tilde{u}_j$$

De esta manera, $g_{u_j} = \psi_j$, y para $k \neq j$, dado que $D\psi(u)$ es simétrico, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_k} &= \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial u_k}(u_1, \ldots, \tilde{u}_j, \ldots, u_n)\, d\tilde{u}_j \\ &= \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_j}(u_1, \ldots, \tilde{u}_j, \ldots, u_n)\, d\tilde{u}_j \\ &= \psi_k(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_n) + C, \end{aligned}$$

con C constante, la cual podemos elegir $C = 0$. Por lo tanto, $Dg(u) = \psi$, y g es de clase C^1. □

Lema 1.4. *Para un sistema simétrico, la función convexa*

$$E(u) := \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} u_i^2, \tag{8}$$

es una función de entropía asociada a los flujos de entropía

$$\Psi^j(u) := -g^j(u) + \sum_{i=1}^{n} u_i f^j(u)_i, \tag{9}$$

donde $g^j : \Omega \to \mathbb{R}$ *es tal que* $Dg^j = f^j$*.*

Prueba. Dado que el sistema es simétrico, por el lema de Poincaré existen funciones $g^j : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $Dg^j(u) = f^j(u)$ para cada $j = 1, \ldots, d$. Claramente tenemos que $DE(u) = u$. Por lo tanto para cada $1 \leq k \leq n$, tenemos

$$\frac{\partial \Psi^j}{\partial u_k} = f_k^j(u) + \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial f_i^j}{\partial u_k} - \frac{\partial g^j}{\partial u_k} = \sum_{i=1}^{n} (DE(u))_i \frac{\partial f_i^j}{\partial u_k},$$

es decir,

$$D\Psi^j(u)^\top = DE(u)^\top Df^j(u).$$

□

Proposición 1.5 (Friedrichs-Lax [3]). *Supongamos que* (1) *es un sistema de leyes de conservación donde* u *toma valores en* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *y* Ω *es convexo. Si existe una función de entropía estrictamente convexa* $E : \Omega \to \mathbb{R}$*, entonces el sistema es simetrizable. Conversamente, si* E *es una función estrictamente convexa tal que las matrices* $D^2E(u)Df^j(u)$*,* $j = 1, \ldots, d$*, son simétricas para toda* $u \in \Omega$*, entonces* E *es una función de entropía del sistema* (1)*.*

Observación. Nótese que la existencia de E estrictamente convexa implica que el sistema es hiperbólico. Aquí estrictamente convexa significa que la matriz Hessiana de E es definida positiva y simétrica, $D^2E(u) > 0$.

Prueba. Probaremos primeo que la condición es suficiente. Supongamos que E es una función de entropía estrictamente convexa. Entonces existen flujos de entropía $\Psi^j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j = 1,\dots,d$, tales que (4) se cumplen para todo $u \in \Omega$. Componente a componente, las relaciones (4) se escriben como

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \frac{\partial \Psi^j}{\partial u_k},$$

para toda $1 \le k \le n$ y toda $1 \le j \le d$. Diferenciando con respecto a u_m, para cierto $1 \le m \le n$, tenemos

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} &= \frac{\partial^2 \Psi^j}{\partial u_m \partial u_k} - \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k} \\ &=: G_{k,m}^j(u). \end{aligned} \tag{10}$$

Dado que Ψ^j y f^j son de clase C^2, las matrices G^j (cuya componente (k,m) está definida por (10)) son simétricas. Por lo tanto, $G_{k,m}^j = G_{m,k}^j$, y el lado izquierdo de la ecuación (10) también es simétrico, es decir,

$$\sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m},$$

o lo que es lo mismo,

$$(D^2E(u)Df^j(u))^\top = D^2E(u)Df^j(u), \tag{11}$$

para toda $u \in \Omega$ y toda $1 \le j \le d$. Así, $S(u) := D^2E(u)$ es un simetrizador para las ecuaciones (1). El sistema es simetrizable y por lo tanto hiperbólico.

Conversamente, para probar que la condición es necesaria, supongamos que las matrices $D^2E(u)Df^j(u)$ son simétricas. Definimos las funciones

$$g^j(u) := DE(u)^\top Df^j(u) : \Omega \to \mathbb{R}^{1\times n}.$$

Dado que $D^2E(u)Df^j(u)$ son simétricas, tenemos que para toda $1 \le m,k \le n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k^j}{\partial u_m} &= \frac{\partial}{\partial u_k} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m} + \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_k \partial u_m} \\ &= \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} + \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k} \\ &= \frac{\partial}{\partial u_m} \sum_{l=1}^{n} \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} \\ &= \frac{\partial g_m^j}{\partial u_k}. \end{aligned}$$

Por el lema de Poincaré, existen flujos de entropía $\Psi^j : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $D\Psi^j = g^j$, o equivalentemente,

$$DE(u)^\top Df^j(u) = D\psi^j(u)^\top,$$

y (E, Ψ) es un par de entropía para el sistema (1). □

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1.6. *El sistema p.* Consideremos nuevamente el sistema p de la forma

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \tag{12}$$

donde asumimos que $p'(v) < 0$. Sea $P = \int^v p$ una primitiva de p, tal que $P' = p$. La matriz jacobiana del sistema es

$$Df(u) = A(u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la primera ecuación de (12) por $-p(v)$, la segunda por w y sumámdolas llegamos a

$$\left(\tfrac{1}{2}w^2 - P(v)\right)_t + (p(v)w)_x = 0.$$

Por lo tanto el par (E, Ψ) definido como

$$E(w, v) := \tfrac{1}{2}w^2 - P(v), \qquad \Psi(w, v) := p(v)w,$$

es un par de entropía de (12). En efecto, si multiplicamos $DE^\top = (-p(v),\ w)^\top$ por la matriz jacobiana obtenemos $D\Psi^\top = (wp'(v),\ p(v))^\top$ y se satisface (4). Notemos que la matriz Hessiana de E dada por

$$D^2E = \begin{pmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

es diagonal con entradas positivas, y por lo tanto es definida positiva y la función E es estrictamente convexa.

Ejercicio 1.7. Supongamos que E es una función de entropía para las ecuaciones de agua poco profunda en una dimensión espacial [5],

$$\begin{aligned} \eta_t + (v\eta)_x &= 0, \\ v_t + (\tfrac{1}{2}v^2 + \eta)_x &= 0, \qquad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty), \end{aligned} \tag{13}$$

donde $v \in \mathbb{R}$ es la velocidad horizontal del agua y $0 < \eta := gh \in \mathbb{R}$, con g la constante de gravedad y h la altura del agua. Prueba que E satisface la ecuación

$$E_{vv} = \eta E_{\eta\eta}.$$

Ejercicio 1.8. Sea el sistema de ecuaciones de Euler para un gas compresible en el caso *barotrópico* [7],

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \end{aligned} \tag{14}$$

que es un caso especial de las ecuaciones de Euler cuando la energía interna e permanece constante. Aquí ρ, v y p son la densidad, velocidad y presión, respectivamente. Asumimos que $p = \hat{p}(\rho)$ es la *ecuación de estado barotrópica*, donde $\hat{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave (al menos de clase C^2) que satisface la condición

$$\hat{p}'(\rho) > 0.$$

El sistema (14) tiene la forma

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

con

$$u = (u_1, u_2)^\top := (\rho, \rho v)^\top \in \mathbb{R}^2,$$
$$f(u) = (\rho v, \rho v^2 + p) = (u_2, u_2^2/u_1 + \hat{p}(u_1))^\top \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Muestra que el sistema (14) es estrictamente hiperbólico y calcula las velocidades características.

(b) Prueba que la función

$$E = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + G(\rho) = E(u_1, u_2),$$

es una función de entropía para el sistema (14) si se cumple que $G''(\rho) = \hat{p}'(\rho)/\rho$ para $\rho > 0$. Verifica que E es convexa para toda $\rho > 0$ en las variables (u_1, u_2). ¿Cual es el flujo de entropía Ψ correspondiente?

1.11. **Aproximación viscosa y la condición de entropía.** En esta sección veremos que el concepto de entropía nos permite seleccionar, dentro de la gran cantidad de soluciones débiles a (1) y (2), la solución que sea “físicamente relevante”. Para esto, para cada $\epsilon > 0$ consideremos el siguiente sistema parabólico

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \epsilon \Delta u, \tag{15}$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

es decir, la misma condición inicial que (1). El sistema (15) es una aproximación “viscosa” del sistema hiperbólico (1), donde el parámetro $\epsilon > 0$ es llamado *coeficiente de viscosidad*. Nos interesaremos en el caso en el que la viscosidad se aproxima a cero, es decir, el coeficiente es pequeño $0 < \epsilon \ll 1$. A éste problema se le llama el *método de viscosidad* . Es un hecho conocido[2] que el problema de Cauchy (15) con condición inicial (2), por ejemplo, en $C^1 \cap L^\infty$, tiene una única solución clásica u^ϵ, para cada $\epsilon > 0$ que satisface el principio del máximo,

$$\|u^\epsilon\|_\infty \leq C,$$

uniformemente en $\epsilon > 0$. Adicionalmente, vamos a suponer que $u^\epsilon \to u$ a.e. cuando $\epsilon \to 0$. Queremos, por ende, recuperar soluciones del sistema hiperbólico (1) como límites de las soluciones u^ϵ del sistema parabólico asociado (15). Estas soluciones existen (ver [4]). De este modo, podemos formular el siguiente resultado.

Teorema 1.9. *Supongamos que el sistema* (1) *admite una función de entropía E de clase C^2 y convexa, asociada a flujos de entropía Ψ^j, para cada $1 \leq j \leq d$. Sea u^ϵ la solución a* (15)*, suficientemente suave tal que satisface el principio del máximo,*

$$\|u^\epsilon\|_\infty \leq C, \tag{16}$$

$$u^\epsilon \longrightarrow u, \quad \text{cuando } \epsilon \to 0^+, \quad a.e. \text{ en } \mathbb{R}^d \times [0, +\infty), \tag{17}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de ϵ. Entonces u es una solución débil de (1) *y además,*

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t E(u) + \sum_{j=1}^{d} \phi_{x_j} \Psi^j(u)\, dx\, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) E(u_0(x))\, dx \;\geq\; 0, \tag{18}$$

[2] Ver, por ejemplo, Friedman [2].

para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$.

Prueba. Sea una función de prueba $\phi_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$. Dado que u^ϵ es solución suave de (15), multiplicando por ϕ e integrando obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot u_t^\epsilon + \sum_{j=1}^d \phi \cdot f^j(u^\epsilon)_{x_j} \, dx dt = \epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot \Delta u^\epsilon.$$

Dado que ϕ tiene soporte compacto en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$, integrando por partes obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t \cdot u^\epsilon + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \cdot f^j(u^\epsilon) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u^\epsilon(x,0) \, dx = -\epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\phi \cdot u^\epsilon.$$

Dado que $u^\epsilon(x,0) = u_0(x)$ y por el Lema 1.11, tomando el límite cuando $\epsilon \to 0^+$ obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t \cdot u + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \cdot f^j(u) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u_0(x) \, dx = 0.$$

Podemos aproximar cada función $\phi \in C_0^1$ por funciones en $\phi_n \in C_0^\infty$, por lo que la igualdad se mantiene para cada $\phi \in C_0^1$. Esto prueba que u es solución débil de (1) y (2).

Similarmente, sea (E, Ψ) un par de entropía de clase C^2 con E convexa. Multiplicando la ecuación (15) por $DE(u^\epsilon)^\top$ y dado que u^ϵ es solución suave tenemos que

$$\begin{aligned} DE(u^\epsilon)^\top u_t^\epsilon + \sum_{j=1} DE(u^\epsilon)^\top f^j(u^\epsilon)_{x_j} &= E(u^\epsilon)_t + \sum_{j=1} \Psi^j(u^\epsilon)_{x_j} \\ &= \epsilon DE(u^\epsilon)^\top \Delta u^\epsilon. \end{aligned}$$

Escribiendo

$$\Delta E(u^\epsilon) = (\nabla u^\epsilon)^\top D^2 E(u^\epsilon) \nabla u^\epsilon + DE(u^\epsilon)^\top \Delta u^\epsilon,$$

y usando el hecho de que E es estrictamente convexa (D^2E es definida positiva) llegamos a la desigualdad

$$E(u^\epsilon)_t + \sum_{j=1} \Psi^j(u^\epsilon)_{x_j} \leq \epsilon \Delta E(u^\epsilon).$$

Multiplicando por una función de prueba $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ con $\phi \geq 0$, e integrando por partes en $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$, obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t E(u^\epsilon) + \sum_{j=1} \phi_{x_j} \Psi^j(u^\epsilon) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) E(u_0(x)) \, dx &\geq \\ -\epsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta\phi E(u^\epsilon) \, dx dt&. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando $\epsilon \to 0^+$, por el Lema 1.11 las integrales convergen en sentido de distribuciones y obtenemos de esta forma la desigualdad (18). Esto concluye la prueba del Teorema.

□

Apéndice. Algunos resultados de Análisis Real. Ver cualquier libro de Análisis Real, por ejemplo, [1, 6].

Teorema 1.10 (Convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Asumamos que las funciones f_n son integrables y que $f_n \to f$ a.e. cuando $n \to +\infty$. Supongamos también que $|f_n| \leq g$ para cierta función integrable g. Entonces f es integrable y*

$$\int f\, d\mu = \lim \int f_n\, d\mu$$

Lema 1.11. *Supongamos que $\{u^\epsilon\}_{\epsilon \geq 0} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ es una sucesión de funciones $u^\epsilon : \mathbb{R}^d \to \Omega$ uniformemente acotada*

$$\|u^\epsilon\|_\infty \leq C,$$

con $C > 0$, y para toda $\epsilon > 0$. Supongamos que $u^\epsilon \to u$ a.e. cuando $\epsilon \to 0^+$. Entonces para toda función continua $G : \Omega \to \mathbb{R}^p$, se tiene que $G(u^\epsilon) \to G(u)$ en sentido de distribuciones, es decir, para toda $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^p)$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot G(u^\epsilon)\, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot G(u)\, dx,$$

cuando $\epsilon \to 0^+$.

Prueba. Definimos

$$g^\epsilon := G(u^\epsilon) \cdot \phi,$$

para cada $\epsilon > 0$. Por continuidad, claramente $g^\epsilon \to G(u) \cdot \phi$ cuando $\epsilon \to 0^+$. También por continuidad y u^ϵ acotada uniformemente para toda ϵ, tenemos que

$$g := \sup \|g^\epsilon\| \leq C,$$

con $C > 0$, cota uniforme en ϵ y en $x \in \mathbb{R}^d$. Dado que ϕ tiene soporte compacto, g^ϵ tiene soporte compacto. g es integrable, ya que,

$$\int g = \int \sup \|G(u^\epsilon) \cdot \phi\| \leq M \int_{\mathrm{supp}\,\phi} dx < +\infty.$$

Así, por el teorema de convergenca dominada de Lebesgue

$$\int g^\epsilon \longrightarrow \int \lim g^\epsilon = \int G(u) \cdot \phi,$$

cuando $\epsilon \to 0^+$.

□

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. G. BARTLE, *The elements of integration and Lebesgue measure*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
[2] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964.
[3] K. O. FRIEDRICHS AND P. D. LAX, *Systems of conservation equations with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **68** (1971), pp. 1686–1688.
[4] J. GOODMAN AND Z. XIN, *Viscous limits for piecewise smooth solutions to systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **121** (1992), pp. 235–265.
[5] R. S. JOHNSON, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
[6] W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third ed., 1987.
[7] G. B. WHITHAM, *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons, New York, 1974.

Departamento de Matemáticas y Mecánica, IIMAS-UNAM, Apdo. Postal 20-726, C.P. 01000 México D.F. (México)

E-mail address: plaza@mym.iimas.unam.mx