LECCIÓN 5: ECUACIONES ESCALARES. SOLUCIONES CLÁSICAS Y ROMPIMIENTO A TIEMPO FINITO

RAMÓN G. PLAZA

2. Ecuación escalar en una dimensión espacial

Consideramos en esta sección ecuaciones escalares en una dimensión espacial de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{1}$$

donde $u(x,t) \in \Omega \subset \mathbb{R}$, Ω abierto y acotado, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, y la función de flujo,

$$f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

es de clase $C^2(\Omega)$ y usualmente nolineal. Asociado a (1) tenemos el problema de Cauchy con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

donde u_0 es una función en una clase específica, por ejemplo, L^∞, C^k, etc.

Ejemplos.

(1) *Ecuación de Burgers:*

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$$

donde $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ es una función convexa, $f''(u) = 1 > 0$.

(2) *Ecuación lineal (advección):*

$$u_t + a u_x = 0,$$

donde $a \in \mathbb{R}$ es constante. Aquí el flujo es $f(u) = au$.

(3) *Flujo de tercer orden:*

$$u_t + \left(\tfrac{1}{3}u^3\right)_x = 0,$$

donde $f(u) = \frac{1}{3}u^3$ no es convexa. El comportamiento es muy diferente al caso convexo, como veremos más adelante.

En este curso nos concentraremos en los casos en los que $f(u)$ es nolineal. Como hemos visto en el caso de la ecuación de Burgers (y como veremos en el caso general), la nolinealidad da lugar a fenómenos interesantes, tales como no existencia de soluciones clásicas para todo tiempo y la formación de choques, que no son predecibles por la teoría lineal.

Date: 18 de febrero, 2008.

2.1. **Existencia local de soluciones clásicas y rompimiento a tiempo finito.** Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x = 0, &\qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty), \\ u = u_0, &\qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \{t=0\}. \end{aligned} \tag{3}$$

Aquí $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^3. Escribiremos de aquí en adelante

$$a(u) := f'(u), \tag{4}$$

para toda $u \in \Omega$.

Sea $u \in C^1$ una solución clásica al problema de Cauchy (3). Definimos las *curvas características* en una banda $\mathbb{R} \times [0,T]$, $T > 0$, como las curvas de la forma $t \mapsto (\hat{x}(t), t)$, donde $\hat{x}$ resuelve

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = a(u(\hat{x}, t)). \tag{5}$$

Notamos que sobre una curva característica

$$\frac{d}{dt} u(\hat{x}(t),t) = u_x(\hat{x}(t),t)\frac{d\hat{x}}{dt} + u_t(\hat{x}(t),t) = (a(u)u_x + u_t)(\hat{x}(t),t) = 0,$$

ya que u es solución clásica de (3). Por lo tanto, toda solución clásica es constante a lo largo de las curvas características, y toma el valor $u_0(y_0)$, donde $(y_0, 0)$ es la intersección de la curva con $t = 0$. Por lo tanto, la pendiente de la característica en todo punto es $a(u_0(y_0))$ y las características son líneas rectas de la forma

$$\hat{x}(t) = y_0 + a(u_0(y_0))t. \tag{6}$$

Lema 2.1. *Asumamos que $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$, acotada y con derivada u_0' acotada en $\mathbb{R}$. Definimos*

$$T^* := \begin{cases} +\infty & \text{si } a(u_0(x)) \text{ es creciente,} \\ -\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} \frac{d}{dx}(a(u_0(x)))\right)^{-1} & \text{en otro caso.} \end{cases} \tag{7}$$

Entonces el problema de Cauchy (3) *tiene una única solución de clase C^1 en $\mathbb{R} \times [0, T^*)$, y no tiene solución C^1 en una banda más grande, es decir, en $\mathbb{R} \times [0,T]$ con $T \geq T^*$.*

Prueba. Sea

$$\alpha(x) := a(u_0(x)), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Por el método de características, si u es solución C^1 de (3) entonces para $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ dado, sea Γ la característica que pasa por dicho punto, a saber,

$$\Gamma := \{(\hat{x}(t),t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty) : \hat{x}(t) = \bar{x} + a(u(\bar{x},\bar{t}))(t-\bar{t})\}.$$

Dado que u es constante sobre Γ, sea y_0 tal que $(y_0, 0) \in \Gamma$ y por lo tanto

$$u(\bar{x},\bar{t}) = u(\hat{x}(t),t) = u(y_0,0), = u_0(y_0),$$

para todo t. Así, resolver (3) consiste, dado $(\bar{x},\bar{t})$, en hallar una solución y_0 a la ecuación

$$y_0 + a(u_0(y_0))\bar{t} = \bar{x}. \tag{8}$$

Para $\bar{t}$ fijo, sea la función $F_{\bar{t}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$F_{\bar{t}}(y) := y + \alpha(y)\bar{t}.$$

Dado que u_0 es continua y f es C^2, $F_{\bar{t}}(y)$ es continua. Notemos también que como u_0 es acotada, entonces

$$F_{\bar{t}}(\pm\infty) = \lim_{y\to\pm\infty} (y + a(u_0(y))\bar{t}) = \pm\infty.$$

Así, por el teorema del valor medio, existe al menos un valor $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que

$$F_{\bar{t}}(y_0) = \bar{x},$$

y (8) tiene una solución. Sin embargo, pueden existir más soluciones a esta ecuación nolineal, lo cual impide la construcción de una solución clásica. Para garantizar que el valor de y_0 encontrado es único, analicemos dos casos. Notamos que

$$\frac{d}{dy} F_{\bar{t}}(y) = 1 + \alpha'(y)\bar{t},$$

donde

$$\alpha'(y) = a'(u_0(y))u_0'(y).$$

Dado que f es C^2 y u_0 es C^1, tenemos que α es C^1. En el primer caso, si $\alpha \in \mathbb{C}^1$ es creciente, entonces $\alpha'(y) \geq 0$ para toda $y \in \mathbb{R}$ y por lo tanto

$$\frac{d}{dy} F_{\bar{t}}(y) = 1 + \alpha'(y)\bar{t} > 0,$$

para todo $\bar{t} \geq 0$. Así, $F_{\bar{t}}$ es estrictamente creciente y el valor encontrado de y_0 es único, que denotamos como $y_0(\bar{x}, \bar{t})$, el cual existe para todo $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ dado. En este caso definimos $T^* := +\infty$ y el valor de la solución clásica es

$$u(\bar{x}, \bar{t}) := u_0(y_0(\bar{x}, \bar{t})). \tag{9}$$

En cualquier otro caso, existen valores de y para los cuales $\alpha'(y) < 0$ y claramente $T^* := -\left(\inf_{x\in\mathbb{R}} \alpha'(x)\right)^{-1} > 0$ es finito. Notamos también que

$$\frac{d}{dy} F_{\bar{t}}(y) = 1 + \alpha'(y)\bar{t} \geq 1 - \frac{\bar{t}}{T^*} > 0,$$

para toda $\bar{t} \in [0, T^*)$, por lo cual $F_{\bar{t}}$ es estrictamente creciente si $\bar{t} \in [0, T^*)$ y el valor encontrado de y_0 es único. La solución clásica se define igualmente por (9) para $\bar{t} \in [0, T^*)$.

Para verificar que la solución construida es C^1, notamos que

$$G(\bar{x}, \bar{t}, y) := F_{\bar{t}}(y) - \bar{x}$$

satisface $G(\bar{x}, \bar{t}, y_0) = 0$ y su derivada

$$\frac{dG}{dy} = 1 + \frac{d}{dy} F_{\bar{t}}(y) > 0,$$

es estrictamente positiva para valores de $\bar{t} \in [0, T^*)$. Por el teorema de la función implícita existe una función $y = y(\bar{x}, \bar{t})$ de clase C^1 en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$ tal que $G(\bar{x}, \bar{t}, y(\bar{x}, \bar{t})) = 0$ y

$$y_{\bar{x}} = -\frac{G_{\bar{x}}}{G_y} = \frac{1}{1 + \frac{dF_{\bar{t}}}{dy}},$$

$$y_{\bar{t}} = -\frac{G_{\bar{t}}}{G_y} = -\frac{\alpha(y)}{1 + \frac{dF_{\bar{t}}}{dy}}.$$

Por unicidad, $y_0 = y(\bar{x}, \bar{t})$, y es C^1 en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$. De esta forma la solución construída (9) es de clase C^1 en una vecindad de $(\bar{x}, \bar{t})$ *para todo* $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, T^*)$. Para verificar que es efectivamente solución del problema de Cauchy notamos que

$$F_0(y(\bar{x}, 0)) = y(\bar{x}, 0) = \bar{x},$$

por lo que

$$u(\bar{x}, 0) = u_0(y(\bar{x}, 0)) = u_0(\bar{x}),$$

esto es, la condición inicial se satisface. Finalmente, dado que u es C^1 y como u_0' es acotada tenemos que

$$\begin{aligned} u_{\bar{t}} + f(u)_{\bar{x}} &= u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))y_{\bar{t}} + a(u_0(y(\bar{x},\bar{t})))u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))y_{\bar{x}} \\ &= u_0'(y(\bar{x},\bar{t}))\,(1+dF_{\bar{t}}/dy)^{-1}\,(-a(u_0(y(\bar{x},\bar{t}))) + a(u_0(y(\bar{x},\bar{t})))) \;=\; 0. \end{aligned}$$

La solución construída es solución clásica al problema de Cauchy en la banda $\mathbb{R}\times[0,T^*)$. Por construcción, dicha solución es única. Para finalizar la demostración, debemos probar la última aseveración y verificar que la solución no se puede extender más allá de T^*.

Sea $T > 0$ tal que existe una solución clásica u en la banda $\mathbb{R}\times[0,T]$. Si $T^* = +\infty$ entonces claramente $T < T^*$. Supongamos, pues, que $T^* < +\infty$. En este caso, existen valores de y para los cuales $\alpha'(y) < 0$. Sea $\tilde{y} \in \mathbb{R}$ uno de éstos valores y fijémonos en la curva característica que pasa por $(\tilde{y},0)$, es decir,

$$\hat{x}(t) = \tilde{y} + t\alpha(\tilde{y}).$$

Dado que u es regular en $\mathbb{R}\times[0,T]$, para cada punto de la característica tal que $t \le T$ tenemos que u toma el valor constante $u_0(\tilde{y})$ sobre la curva. Consideremos

$$v := a'(u)u_x,$$

Derivando a v con respecto a t a lo largo de dicha característica tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dv(\hat{x}(t),t)}{dt} &= a'(u)((d\hat{x}/dt)u_{xx} + u_{xt}) + a''(u)((d\hat{x}/dt)u_x + u_t)u_x \\ &= a'(u)a(u)u_{xx} + a'(u)u_{xt} + a''(u)a(u)u_x^2 + a''(u)u_xu_t, \end{aligned}$$

ya que $d\hat{x}/dt = a(u)$. Como u es solución de clase C^1 de la ecuación tenemos que

$$u_t + a(u)u_x = 0,$$

que implica, tras derivar con respecto a x, que

$$u_{xt} + a(u)u_{xx} + a'(u)u_x^2 = 0.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión para dv/dt tenemos que

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(\hat{x}(t),t)} = -a'(u)^2u_x^2 = -v^2.$$

Podemos resolver esta ecuación por separación de variables, encontrando que

$$\frac{1}{v} = t + k,$$

donde k es una constante. El valor inicial de v es

$$v(\hat{x}(0),0) = v(\tilde{y},0) = a'(u_0(\tilde{y}))u_x(\tilde{y},0) = a'(u_0(\tilde{y}))u_0'(\tilde{y}) = \alpha'(\tilde{y}) < 0,$$

por lo tanto,

$$v = \frac{1}{t + (\alpha'(\tilde{y}))^{-1}},$$

y v existe para tiempo $t < -(\alpha'(\tilde{y}))^{-1} < T^*$, es decir, necesariamente $T < T^*$. □

Observación 2.2. Notamos que el teorema se aplica también a ecuaciones lineales con $a'(u) = f''(u) = 0$, para las cuales tiempo de rompimiento es $T^* = +\infty$, por lo que tenemos un resultado de existencia global para ecuaciones lineales. El fenómeno de rompimiento de la solución a tiempo finito es exclusivo de ecuaciones nolineales, ya que $T^* < +\infty$ implica que $\alpha'(x) = a'(u_0(x))u_0'(x) < 0$.

Ejercicio 2.3. Supongamos que f es una función estrictamente convexa, $f''(u) \geq \delta > 0$ para toda u, y u_0 es C^1, acotada y con derivada acotada. Prueba que si $u(x,t)$ es una solución clásica de (1) en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, entonces

$$u_x < \frac{1}{\delta t}. \tag{10}$$

BIBLIOGRAFÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y MECÁNICA, IIMAS-UNAM, APDO. POSTAL 20-726, C.P. 01000 MÉXICO D.F. (MÉXICO)

E-mail address: plaza@mym.iimas.unam.mx