ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES II
TAREA 1

RAMÓN G. PLAZA

1. Consideremos la ecuación de Burger's no viscosa
$$u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0. \tag{1}$$
Prueba que si resolvemos (1) con datos iniciales suaves $u_0(x)$ tales que u_0' es negativa en algún punto x_*, entonces la solución clásica (onda viajera) se romperá a tiempo finito dado por
$$T_b = -\frac{1}{\min_{x\in\mathbb{R}} u_0'(x)} > 0.$$
2. Consideremos nuevamente la ecuación de Burger's (1), con condición inicial
$$u_0(x) = \begin{cases} u_R\,; & x > 0, \\ u_L\,; & x < 0, \end{cases} \tag{2}$$
donde $u_L < u_R$. Prueba que
$$u(x,t) = \begin{cases} u_L\,; & x < s_m t, \\ u_m\,; & s_m t \leq x \leq u_m t, \\ x/t\,; & u_m t \leq x \leq u_R t, \\ u_R\,; & x > u_R t, \end{cases}$$
es una solución débil al problema de Cauchy (1) - (2), para cualquier valor de u_m con $u_L \leq u_m \leq u_R$ y donde $s_m := \frac{1}{2}(u_L + u_m)$. Dibuja las características para esta solución y haz un esquema de la misma. Encuentra una clase de soluciones con tres discontinuidades.
3. Considera el sistema
$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \tag{3}$$
$$v_t + (\frac{1}{2}v^2)_x = 0,. \tag{4}$$
   (a) Prueba que el Jacobiano tiene valores propios $\lambda_1 = \lambda_2 = v$ y un espacio unidimensional de vectores propios proporcional a $r = (v,0)^\top \in \mathbb{R}^2$. Deduce que la matriz Jacobiana no es diagonalizable y que el sistema es hiperbólico pero no estrictamente hiperbólico.
   (b) Nota que la ecuación (4) se desacopla de (3), y que (4) es simplemente la ecuación de Burger's para v. Podemos resolver v de (4), independientemente de ρ y sustituir en la ecuación (3), la cual se transforma en
   $$\rho_t + v\rho_x = -\rho v_x,$$
   la cual es ahora una ecuación lineal para ρ, donde v es conocida, que puede ser resuelta por el método de características. Que pasa si v es discontinua?

4. Verifica que el sistema de ecuaciones para *agua poco profunda* en una dimensión espacial,
$$\begin{aligned} \eta_t + (\upsilon\eta)_x &= 0, \\ \upsilon_t + (\tfrac{1}{2}\upsilon^2 + \eta)_x &= 0, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty), \end{aligned} \tag{5}$$
donde $\upsilon \in \mathbb{R}$ es la velocidad horizontal del agua, y $\eta = gh \in \mathbb{R}$ con g la constante de gravedad y h la altura del agua, es estrictamente hiperbólico si $\eta > 0$.
5. Supongamos que Φ es una función de entropía para las ecuaciones de agua poco profunda (5). Prueba que Φ satisface la ecuación
$$\Phi_{\upsilon\upsilon} = \eta\Phi_{\eta\eta}.$$