ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES II
TAREA 2

RAMÓN G. PLAZA

1. Sea el sistema de ecuaciones de Euler para un gas compresible en el caso *barotrópico*,
$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \end{aligned} \tag{1}$$
que es un caso especial de las ecuaciones de Euler cuando la energía interna e permanece constante. Aquí ρ, v y p son la densidad, velocidad y presión, respectivamente. Asumimos que $p = \hat{p}(\rho)$ es la *ecuación de estado barotrópica*, donde $\hat{p} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función suave (al menos de clase C^2) que satisface la condición
$$\hat{p}'(\rho) > 0.$$
(1) es un sistema de la forma
$$u_t + f(u)_x = 0,$$
con
$$u = (u_1, u_2)^\top := (\rho, \rho v)^\top \in \mathbb{R}^2,$$
$$f(u) = (\rho v, \rho v^2 + p) = (u_2, u_2^2/u_1 + \hat{p}(u_1))^\top \in \mathbb{R}^2.$$
   (a) Muestra que el sistema (1) es estrictamente hiperbólico y calcula las velocidades características (valores propios de la matriz jacobiana).
   (b) Prueba que la función
$$E = \tfrac{1}{2}\rho v^2 + G(\rho) = E(u_1, u_2),$$
   es una función de entropía para el sistema (1) si se cumple que $G''(\rho) = \hat{p}'(\rho)/\rho$ para $\rho > 0$. Verifica que E es convexa para toda $\rho > 0$ en las variables (u_1, u_2). ¿Cual es el flujo de entropía Φ correspondiente?
2. Sea el problema de Cauchy para una ley de conservación escalar
$$u_t + f(u)_x = 0, \tag{2}$$
$$u(x, 0) = u_0, \tag{3}$$
donde f es una función estrictamente convexa, $f''(u) \geq \delta > 0$ para toda u, y u_0 es C^1, acotada y con derivada acotada. Prueba que si $u(x,t)$ es una solución clásica de (2) en $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$, entonces
$$u_x < \frac{1}{\delta t}. \tag{4}$$
(*Hint:* Ver la prueba del Lema 2.1 (Lección 5), donde $T^* = +\infty$. Por lo tanto, u_0' tiene un signo definido. La conclusión se sigue de las expresiones explícitas de las derivadas de la solución construída por el método de características.)

Nota: Observa que (4) es la condición de entropía de Oleinik,

$$\frac{u(x+a,t)-u(x,t)}{a} < \frac{C}{t}.$$

para toda $a > 0$ y toda $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$, en el caso de una solución clásica.

Definición. Para la ecuación escalar (2) decimos que la tripleta de valores constantes $(u_R, u_L, s) \in \Omega \times \Omega \times \mathbb{R}$ es una *discontinuidad admisible* si se cumple la condición de Rankine-Hugoniot

$$s[u] = [f(u)],$$

y además se cumple la desigualdad de entropía de Oleinik:

$$\Big(\alpha f(u_L) + (1-\alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1-\alpha) u_R)\Big)\mathrm{sgn}[u] \leq 0, \tag{5}$$

para todo $\alpha \in [0,1]$.

3. Sean $a < b < c$ tres números reales. Asumimos que (a, b, s_1) y (b, c, s_2) son discontinuidades admisibles de la ecuación escalar (2) y que f es convexa $f'' > 0$. Prueba que $s_1 \leq s_2$. Concluye que (a, c, s_3) es una discontinuidad admisible y encuentra s_3. (*Hint:* La desigualdad (5) implica la condición de entropía de Lax: $f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L)$).
4. *Choques débiles.* Sea una discontinuidad admisible (u_R, u_L, s)
   (a) Prueba que cuando $[u] \to 0$ la velocidad s es de la forma

   $$s = f'(u_L) + O_1([u]) = f'(u_R) + O_2([u]),$$

   donde cada O_i es una función de orden $\mathcal{O}([u])$. (*Hint:* Expandir f en serie de Taylor.)

   (b) Prueba que, más precisamente,

   $$s = f'(\tfrac{1}{2}(u_R + u_L)) + \mathcal{O}([u]^2).$$

   Nota: Si el choque es *débil*, es decir, si $0 < \epsilon := |[u]| \ll 1$ es pequeño, la fórmula anterior indica que $f'(\frac{1}{2}(u_R + u_L))$ aproxima la velocidad del choque a orden $\mathcal{O}(\epsilon^2)$.