ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES II
TAREA 3

RAMÓN G. PLAZA

1. *Onda N para la ecuación de Burgers.* Sea la ecuación de Burgers
$$u_t + (\tfrac{1}{2}u^2)_x = 0. \tag{1}$$
Definimos la onda N como
$$N(x,t) = \begin{cases} x/t, & |x| < t, \\ 0, & |x| > t. \end{cases} \tag{2}$$
   (a) Prueba que (2) es una solución débil de la ecuación de Burgers con condición inicial $u_0 = 0$.
   (b) Prueba que (2) satisface la condición de entropía de Oleinik,
$$u(x+\epsilon) - u(x,t) < \frac{C\epsilon}{t}, \qquad \epsilon > 0, \tag{3}$$
   a lo largo de ambas discontinuidades.
2. Prueba que
$$u(x,t) = \begin{cases} -\frac{2}{3}(t + \sqrt{3x+t^2}), & 4x+t^2 > 0, \\ 0, & 4x+t^2 < 0, \end{cases}$$
es una solución (no acotada) de la ecuación de Burgers (1) que satisface la condición de entropía de Oleinik (3).
3. Resuelve la ecuación de Burgers (1) con condición inicial
$$u_0(x) = \begin{cases} 2, & x < 0, \\ 1, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$
Dibuja las características y las ondas de choque que se producen. (*Hint:* Los dos choques se intersectan y se convierten en uno sólo después de cierto tiempo positivo.)
4. Resuelve el problema de Cauchy
$$u_t + f(u)_x = 0,$$
donde $f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$, con condición inicial
$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$
¿Es la solución encontrada una solución entrópica? (*Hint:* Aquí el flujo no es convexo.)

Date: Fecha de entrega: 5 de mayo, 2008.