Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

Métodos de espacios de Hilbert

Tarea 1: Teoría de distribuciones

Semestre 2017-1

1. Sea $s = s(x)$ la función "signo":
$$s(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$
Demuestra que
$$\frac{d(|x|)}{dx} = s,$$
en sentido de distribuciones. Evalúa, en sentido de distribuciones, todas las derivadas sucesivas de $|x|$.

2. Sea la función
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1/2}}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$
   (a) Demuestra que $f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

   (b) Sea $l_f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ la distribución asociada a f. Demuestra que
$$\langle \frac{dl_f}{dx}, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x^{3/2}}\, dx,$$
   para todo $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

   Sugerencia: El problema se reduce a evaluar el límite
$$\lim_{\epsilon \to 0^+} 2 \int_\epsilon^{+\infty} \frac{\varphi'(x)}{x^{1/2}}\, dx.$$
   Integra por partes y escribe
$$\frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(\epsilon) = \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}(\varphi(\epsilon) - \varphi(0)) + \frac{2}{\sqrt{\epsilon}}\varphi(0).$$

3. En clase se demostró que si $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ es tal que $xl = 0$, entonces $l = c_1\delta$ con c_1 constante. Demuestra que si $x^2 l = 0$ entonces $l = -c_1\delta' + c_2\delta$, con c_1, c_2 constantes. Encuentra una fórmula general para $l \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ si se cumple que $x^m l = 0$ para cierto $m \in \mathbb{N}$. (Ésta última se puede demostrar por inducción, pero no es necesario.)

4. Encuentra una distribución $l_F \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, con $F(x) = H(x)f(x)$, donde H es la función de Heaviside y f una función de clase C^2, tal que
$$\frac{d^2 l_F}{dx^2} + 4l_F = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}).$$

5. Sea
$$u(x,t) = H(t)\frac{e^{-x^2/(4t)}}{2\sqrt{\pi t}}, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \in \mathbb{R},$$
donde $H = H(t)$ es la función de Heaviside en $t \in \mathbb{R}$. Evalúa, en sentido de distribuciones, $u_t - u_{xx}$.

6. *Aproximaciones de* δ.

   (a) Sea $B_r = B_r(0) \subset \mathbb{R}^n$. Sea χ_{B_r} la función caracteristica de la bola B_r:
   $$\chi_{B_r}(x) = \begin{cases} 1, & x \in B_r, \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}$$
   Prueba que
   $$\lim_{r\to 0^+} \frac{\chi_{B_r}}{|B_r|} = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$
   $|B_r|$ es el volumen de la bola de radio r en $\mathbb{R}^n$.

   (b) Sea $\eta_\epsilon = \eta_\epsilon(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, el alisador de Friedrichs:
   $$\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^n}\eta(|x|/\epsilon),$$
   $$\eta(x) = \begin{cases} C\exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1, \end{cases}$$
   donde $C > 0$ es tal que $\int_{\mathbb{R}^n} \eta_\epsilon \, dx = 1$. Demuestra que
   $$\lim_{\epsilon\to 0^+} \eta_\epsilon = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

   (c) Sea $\Psi = \Psi(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor:
   $$\Psi(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp(-|x|^2/4t), & x \in \mathbb{R}^n,\, t > 0, \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$
   Para cada $t > 0$ fijo, Ψ define una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ que denotamos por $\Psi(\cdot,t)$. Demuestra que
   $$\lim_{t\to 0^+} \Psi(\cdot,t) = \delta, \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n).$$

7. Evalúa en sentido de distribuciones

$$\Delta\left(\log\frac{1}{|x|}\right), \qquad x\in\mathbb{R}^2.$$

8. Sabiendo que $\mathcal{F}(1)=\delta$, encuentra la transformada de Fourier de la distribución x^m, $m\geq 0$. Encuentra una fórmula para $\mathcal{F}(\delta^{(m)}(x))$.

9. *Demostración alternativa de que* $\mathcal{F}(1)=\delta$.

   Vamos a dar por hecho la cerradura del espacio de distribuciones: si $l_n\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ es tal que $\langle l_n,\varphi\rangle\to\langle l,\varphi\rangle$ cuando $n\to+\infty$, entonces $l\in\mathcal{S}'(\mathbb{R})$. (La demostración es parecida a la vista en clase para distribuciones en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.)

   (a) Demuestra que si $l_n\to l$ en $\mathcal{S}'_x$ entonces $\mathcal{F}(l_n)\to\mathcal{F}(l)$ en $\mathcal{S}'_\xi$

   (b) Sea $l_n=l_{f_n}\in\mathcal{S}'_x$, donde

   $$f_n(x)=\begin{cases}1, & |x|\leq n,\\ 0, & \text{otro caso.}\end{cases}$$

   Evalúa $\mathcal{F}(l_n)$.

   (c) Demuestra que $l_n\to 1$ en $\mathcal{S}'_x$.

   (d) Prueba que $\mathcal{F}(l_n)\to\delta$ en $\mathcal{S}'_\xi$ y concluye.

10. Sean $H=H(x)$ y $s=s(x)$ la función de Heaviside y la función signo, respectivamente:

    $$H(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x<0,\end{cases}\qquad s(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

    Demuestra que:

    (a) $\mathcal{F}(s(x))=\frac{2}{i}\,\text{p.v.}\,\frac{1}{\xi}\in\mathcal{S}'_\xi$.

    (b) $\mathcal{F}(H(x))=\pi\delta+\frac{1}{i}\,\text{p.v.}\,\frac{1}{\xi}\in\mathcal{S}'_\xi$.

    Sugerencia: Observando que $ds/dx=2\delta$ en $\mathcal{S}'_x$, transforma esta ecuación para obtener $\xi\mathcal{F}(s)=-2i$. Nota que todas las soluciones de $\xi l=0$ en $\mathcal{S}'_\xi$ son de la forma $l=c\delta$ con c constante (la demostración es la misma que en $\mathcal{D}'$, vista en clase). Añade una solución particular de $\xi l=1$, que es $l_1=\text{p.v.}\,\frac{1}{\xi}$, y recuerda que $\mathcal{F}(s)$ es impar mientras que δ es par para concluir (a). Finalmente, escribiendo $H(x)=\frac{1}{2}(1+s(x))$ aplica (a) para obtener (b).

11. *Cálculo del inverso del laplaciano en* $\mathbb{R}^3$.

    Sean $x\in\mathbb{R}^3$, $\xi\in\mathbb{R}^3$, y definimos

    $$\hat{K}(\xi):=\frac{1}{|\xi|^2}.$$

(a) Demuestra que $\hat{K}$ es una distribución temperada en $\mathcal{S}'_\xi(\mathbb{R}^3)$.

(b) Demuestra que $K(x) = K_\infty(x) + K_2(x)$ donde K_∞ es acotada y $K_2 \in L^2_x(\mathbb{R}^3)$ es tal que $\widehat{(K(x))}(\xi) = \hat{K}(\xi)$. (*Sugerencia:* Escribe $\hat{K} = \hat{K}_\infty + \hat{K}_2$ donde $\hat{K}_\infty \in L^1$ y $\hat{K}_2 \in L^2$.)

(c) Prueba que para cualquier matriz ortogonal $O \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, con $O^\top O = I$, se tiene que $K(Ox) = K(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Considera $\langle K, \varphi\rangle = \int \hat{K}\hat{\varphi}\, d\xi$, para cualquier $\varphi \in \mathcal{S}_x$.)

(d) Demuestra que $K(x/\lambda) = \lambda K(x)$ para cualquier $\lambda > 0$ y concluye que

$$K(x) = \frac{C}{|x|},$$

donde C es una constante (es decir, K es la solución fundamental del laplaciano en $\mathbb{R}^3$.) Calcula la constante C considerando $\langle K, \varphi\rangle$, con $\varphi = e^{-\pi|x|^2} \in \mathcal{S}_x$.