Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

Métodos de espacios de Hilbert

Tarea 2: Espacios de Sobolev

Semestre 2017-1

1. Suponiendo que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$, integra por partes para demostrar la siguiente desigualdad de interpolación:
$$\|Du\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}\|D^2u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2},$$
para toda $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. (*Sugerencia:* demuestra la desigualdad para $u \in C_0^\infty(\Omega)$ y aplica un argumento de densidad: existe una sucesión $\varphi_j \in C_0^\infty(\Omega)$ que converge a u en $H_0^1(\Omega)$, y otra sucesión $\psi_j \in C^\infty(\overline{\Omega})$, que converge a u en $H^2(\Omega)$.)

2. Integra por partes para demostrar que:
$$\int_\Omega |Du|^p\,dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^p\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega |D^2u|^p\,dx\right)^{1/2},$$
con $2 \leq p < \infty$, y para toda $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. (*Sugerencia:* usa la identidad $\int_\Omega |Du|^p\,dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega u_{x_j}u_{x_j}|Du|^{p-2}\,dx$.)

3. Encuentra una función en $W^{1,n}(\Omega)$ que no está en $L^\infty(\Omega)$. (*Sugerencia:* considera $n = 2$, $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$ y $u = \log\log(2/|x|)$. Demuestra que $u \in W^{1,n}(\Omega) = H^1(B_{1/2}(0))$.)

4. Aplica la desigualdad de Sobolev[1] para verificar que para todo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con frontera $\partial\Omega \in C^1$, se cumple que $H^k(\Omega) \subset C^r(\Omega)$ si $k > r + n/2$. Encuentra un contraejemplo para $n = 2$, $k = 1$ y $r = 0$. (*Sugerencia:* Considera el disco en $\mathbb{R}^2$ con centro en el origen y radio $r = 1/e$, y la función $u = \log|\log\sqrt{x^2+y^2}|$. Demuestra que $u \in H^1(\Omega)$.)

5. Sea $\Omega = B_{1/2}(0) \subset \mathbb{R}^2$, es decir, $B_{1/2}(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1/2\}$. Define
$$u(x) = (-\log|x|)^a, \quad x \neq 0,$$
con $0 < a < 1/2$. Demuestra que $u \in H^1(B_{1/2}(0))$, pero que u no es acotada en una vecindad del origen.

6. Demuestra la siguiente desigualdad,
$$\|u\|_{H^2(\Omega)}^2 \leq C\Big(\sum_{|\alpha|=2}\int |D^\alpha u|^2\,dx + \int_\Gamma (\gamma_0 u)^2\,dS_x\Big),$$
para toda $u \in H^2(\Omega)$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza, y $\Gamma \subset \partial\Omega$ es una porción de la frontera que tiene superficie positiva $|\Gamma| > 0$, y que *no* es un pedazo de hiperplano. (*Sugerencia:* Usar el teorema de compacidad de Rellich.)

[1] es decir, $\|u\|_{C^r} \leq C\|u\|_{W^{k,p}}$ para toda $u \in W^{k,p}$ si $k > r + [n/p]$.