Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales Parciales:

Métodos de espacios de Hilbert

Tarea 3: Ecuaciones elípticas

Semestre 2017-1

1. Escribe la formulación débil (o variacional) del problema elíptico:

$$\begin{aligned}(1+x^2)u'' - xu' &= \sin(2\pi x), \qquad x \in (0,1)\\ u(0) = u(1) &= 0,\end{aligned}$$

en el espacio $H_0^1(\Omega)$ con $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$. Demuestra que éste problema tiene una única solución débil $u \in H_0^1(0,1)$. (*Sugerencia*: Para demostrar que la forma bilineal asociada satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram puedes suponer como cierta la desigualdad de Poincarè en $H_0^1(0,1)$:

$$\|u\|_{L^2(0,1)} \leq \frac{1}{\pi}\|u'\|_{L^2(0,1)}, \qquad \forall\, u \in H_0^1(0,1).$$

La constante $C = 1/\pi$ es óptima y la desigualdad se puede demostrar usando series de Fourier.)

2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $\alpha > 0$. Se define

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\, dx + \int_\Omega uv\, dx + \alpha \int_{\partial\Omega} \gamma_0(u)\gamma_0(v)\, dS_x,$$

para $u, v \in H^1(\Omega)$, y donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza. Si $f \in L^2(\Omega)$, demuestra que existe una única solución $u \in H^1(\Omega)$ tal que

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2},$$

para todo $v \in H^1(\Omega)$. Si además u es suficientemente regular, interpreta a u como solución de un problema elíptico con condiciones de frontera en $\partial\Omega$.

3. *Formulación débil para la ecuación biarmónica.* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado. Sea $f \in L^2(\Omega)$ y considera el siguiente problema elíptico con valores de frontera:

$$\begin{aligned}\Delta^2 u = f, &\quad \text{en } \Omega,\\ u = 0,\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0, &\quad \text{sobre } \partial\Omega,\end{aligned} \tag{1}$$

donde $\Delta^2 u = \sum_{i,j} \partial_i^2 \partial_j^2 u$ es el operador biarmónico.

   (a) Encuentra la forma bilineal $a(\cdot,\cdot) : H_0^2(\Omega) \times H_0^2(\Omega) \to \mathbb{R}$ asociada al problema (1).

(b) Demuestra que existe una única solución débil $u \in H_0^2(\Omega)$ del problema (1) que satisface

$$a(u,v) = \langle f, v\rangle_{L^2},$$

para todo $v \in H_0^2(\Omega)$ y que, además, minimiza el funcional

$$J[v] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta v|^2\,dx \,-\, \int_\Omega fv\,dx$$

sobre $H_0^2(\Omega)$

(c) Suponiendo, además, que $u \in H^4(\Omega)$ demuestra que u es solución de $\Delta^2 u = f$ en sentido de distribuciones. Finalmente, suponiendo que $u \in C^4(\overline{\Omega})$, demuestra que u es solución clásica del problema (1).

4. *Problema del obstáculo.* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Sea $\Psi \in H^2(\Omega)$ tal que $\Psi \le 0$ sobre $\partial\Omega$ (es decir, $\gamma_0(\Psi) \le 0$ a.e. sobre $\partial\Omega$, donde $\gamma_0 : H^1(\Omega) \to L^2(\partial\Omega)$ es el operador de traza.) Se define el conjunto

$$\mathcal{K} := \{v \in H_0^1(\Omega) \,:\, v \ge \Psi \text{ a.e. en } \Omega\}.$$

(a) Demuestra que $\mathcal{K}$ es un subconjunto cerrado y convexo de $H_0^1(\Omega)$.

(b) Demuestra que existe un único elemento $u \in \mathcal{K}$ tal que

$$J[u] = \min_{v\in\mathcal{K}} J[v], \qquad J[v] := \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \,-\, \int_\Omega fv\,dx,$$

con $f \in L^2(\Omega)$.

(c) Suponiendo que u es suficientemente regular, demuestra que u satisface

$$\begin{aligned} u \ge \Psi, &\quad \text{en } \Omega,\\ -\Delta u = f, &\quad \text{en } \{x \in \Omega \,:\, u(x) > \Psi(x)\},\\ u = 0, &\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nota: este problema modela el comportamiento de una membrana elástica, fija sobre $\partial\Omega$, y expandida sobre un obstáculo Ψ. La región de contacto $\mathcal{C} = \{x \in \Omega \,:\, u(x) = \Psi(x)\}$ es desconocida, y en el dominio $\Omega\backslash\mathcal{C}$ (también desconocido), u satisface una ecuación diferencial. Éste es un ejemplo de un problema elíptico con *frontera libre.*

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto. Sea el operador uniformemente elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j}(a^{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} \,+\, c(x)u.$$

Demuestra la existencia de una constante $\mu > 0$ tal que: si $c(x) \ge -\mu$ para todo $x \in \Omega$, entonces la forma bilineal correspondiente, $a(\cdot,\cdot) : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$, satisface las hipótesis del teorema de Lax-Milgram, y concluye que el problema

$$\begin{aligned} Lu = f, &\quad \text{en}\,\Omega,\\ u = 0, &\quad \text{sobre}\,\partial\Omega, \end{aligned}$$

tiene una solución única en $H_0^1(\Omega)$.

6. *Problema mixto.* Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Considera el siguiente problema:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f, \quad \text{en } \Omega, \\ u &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0, \quad \text{sobre } \Gamma_2, \end{aligned}$$

donde $f \in L^2(\Omega)$, $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, y, además, $|\Gamma_1| > 0$.

(a) Demuestra que la desigualdad de Poincaré es válida en el espacio

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) \,:\, v_{|\Gamma_1} = 0\}.$$

Aquí $v_{|\Gamma_1} = 0$ significa que para $v \in H^1(\Omega)$, se tiene que $\gamma_0(v) \in L^2(\partial\Omega)$ satisface $\gamma_0(v) = 0$ a.e. en $\Gamma_1 \subset \partial\Omega$.

(b) Demuestra que existe una única solución débil, $u \in \mathcal{V}$, al problema

$$a(u, v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)},$$

para todo $v \in \mathcal{V}$. (Observa que la condición de Dirichlet en Γ_1 (esencial) está implícita en la definición del espacio de trabajo $\mathcal{V}$, mientras que la condición de Neumann sobre Γ_2 (natural) se satisface automáticamente.)

(c) Demuestra que si la solución débil está en $u \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ entonces $-\Delta u = f$ en sentido de distribuciones y a.e. en Ω, y que, además, $\gamma_0(u) = 0$ sobre Γ_1 y $\gamma_1(u) = \partial_n u = 0$ sobre Γ_2.

7. *Condición de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi.* Verifica directamente la condición de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi para el problema de Stokes. (*Sugerencia:* Demuestra que existe una constante uniforme $C > 0$ tal que

$$\sup_{\boldsymbol{v} \in H_0^1(\Omega)^n} \frac{1}{\|\boldsymbol{v}\|_{H^1(\Omega)}} \int_\Omega p \operatorname{div} \boldsymbol{v} \ \geq C \|p\|_{L^2(\Omega)},$$

para todo $p \in L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega) \,:\, \int_\Omega p \, dx = 0\}$.)

8. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Estudia la solvabilidad en sentido débil (en $H_0^1(\Omega)$) del problema

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \lambda u + f, && \text{en } \Omega, \\ u &= 0, && \text{sobre } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $\lambda \in \mathbb{R}$, $f \in L^2(\Omega)$. Examina, en particular, los casos $f = 0$ y $f = 1$. (*Sugerencia:* Analiza los casos $\lambda \in \Sigma(-\Delta)$ y $\lambda \notin \Sigma(-\Delta)$ separadamente. Aplica la alternativa de Fredholm y los teoremas de existencia demostrados en clase. Nota que el operador es autoadjunto.)

9. *Principio minimax de Courant.* Sea el operador elíptico

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j},$$

donde $a^{ij} = a^{ji}$ (operador simétrico). Suponiendo que el operador L con condiciones de Dirichlet homogéneas en la frontera tiene valores propios

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots,$$

demuestra que

$$\lambda_k = \max_{S \in \mathcal{M}_{k-1}} \min_{\substack{u \in S^\perp \\ \|u\|_{L^2}=1}} a(u,u),$$

para todo $k = 1, 2, \ldots$, donde $a(\cdot,\cdot)$ es la forma bilineal asociada al operador L y $\mathcal{M}_{k-1}$ es la colección de todos los subespacios de $H_0^1(\Omega)$ de dimensión $k-1$.

10. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, acotado y abierto, con frontera suave. Sea $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ una solución de

$$Lu = -\sum_{i,j} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} = 0, \qquad \text{en } \Omega,$$

donde L es uniformemente elíptico. Sea

$$v := |Du|^2 + \lambda u^2.$$

Demuestra que $Lv \leq 0$ en Ω si $\lambda > 0$ es suficientemente grande. Deduce la desigualdad

$$\|Du\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\big(\|Du\|_{L^\infty(\partial\Omega)} + \|u\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\big).$$