

CURSO AVANZADO DE ECUACIONES DIFERENCIALES
MÉTODOS DE ESPACIOS DE HILBERT PARA ECUACIONES
DIFERENCIALES PARCIALES
POSGRADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS
(9 CRÉDITOS)

RAMÓN G. PLAZA

INFORMACIÓN GENERAL

Horario.

Martes y jueves, 11:00 - 13:30hrs. Salón 203, edificio anexo, IIMAS

Contacto.

Ramón G. Plaza, oficina 225, segundo piso, IIMAS.

E-mail: plaza@mym.iimas.unam.mx

Horas de oficina.

Jueves, 17:00 - 18:00 hrs. o mediante cita.

Página del curso.

<http://www.fenomec.unam.mx/ramon/Parciales-2017-1.html>

Evaluación.

Se evaluará al alumno con 5 tareas, una por cada sección del temario.

Calendario.

- Periodo de clases: 8 de agosto al 25 de noviembre, 2016
- Periodo de exámenes: 28 de noviembre al 9 de diciembre, 2016
- Días inhábiles: septiembre 15 y 16; noviembre 1 y 2.

Objetivo. Introducir al estudiante a la teoría lineal de ecuaciones diferenciales parciales basada en espacios de Sobolev. Se discutirán: la teoría de distribuciones, espacios de Sobolev, ecuaciones elípticas, ecuaciones hiperbólicas y ecuaciones de tipo parabólico.

TEMARIO

1. Distribuciones
 - 1.1 Funciones de prueba
 - 1.2 Convergencia
 - 1.3 Cálculo de distribuciones: multiplicación, composición, convolución
 - 1.4 Distribuciones temperadas
 - 1.5 Transformada de Fourier
 - 1.6 Transformada de Laplace
2. Espacios de Sobolev
 - 2.1 Introducción a espacios de Hilbert. Espacios L^2
 - 2.2 Espacios de Hölder

- 2.3 Derivada débil
- 2.4 Espacios de Sobolev: definición y propiedades elementales
- 2.5 Aproximaciones, extensiones, trazas
- 2.6 Desigualdades de Sobolev
- 2.7 Compacidad: el teorema de Rellich-Kondrachov
- 2.8 Desigualdades tipo Poincaré
- 2.9 Espacios de Sobolev y la transformada de Fourier
- 2.10 El espacio dual
- 2.11 Espacios dependientes del tiempo
- 3. Formulación variacional para problemas elípticos
 - 3.1 Soluciones débiles
 - 3.2 El teorema de Lax-Milgram
 - 3.3 Estimaciones de energía
 - 3.4 Regularidad al interior
 - 3.5 Regularidad en la frontera
 - 3.6 La alternativa de Fredholm
 - 3.7 Principios del máximo
 - 3.8 Valores propios
- 4. Formulación débil para problemas parabólicos
 - 4.1 Existencia de soluciones débiles: aproximación de Galerkin
 - 4.2 Estimaciones de energía y unicidad
 - 4.3 Regularidad
 - 4.4 Principios del máximo
 - 4.5 Introducción a la teoría de semigrupos
- 5. Formulación débil para problemas hiperbólicos
 - 5.1 Soluciones débiles
 - 5.2 Existencia: el método de Faedo-Galerkin
 - 5.3 Unicidad: estimaciones de energía
 - 5.4 Propagación de perturbaciones y estabilidad
 - 5.5 Sistemas simétricos hiperbólicos: estimaciones de energía
 - 5.6 Introducción a problemas mixtos (valores iniciales y de frontera)
- 6. Introducción a ecuaciones no lineales*
 - 6.1 Cálculo de las variaciones
 - 6.2 Ecuaciones de reacción-difusión
 - 6.3 Ecuaciones de onda no lineales
 - 6.4 Ecuaciones elípticas no lineales
 - 6.5 Leyes de conservación

BIBLIOGRAFÍA

Bibliografía básica. Los textos centrales para este curso son el libro de Salsa [20] y, sobre todo, la segunda parte del libro de Evans [9].

Bibliografía complementaria. La sección dedicada a teoría de distribuciones se basará en los contenidos de los libros de Salsa [20] y Eskin [8]. Para profundizar en el tema recomiendo los clásicos textos de Schwartz [21] y Zemanian [25], así como el libro de Strichartz [23].

Aunque los libros de Evans y Salsa contienen todo lo necesario sobre la teoría de espacios de Sobolev que requerimos para la segunda sección (y para el resto del curso), es necesario mencionar la referencia canónica sobre el tema: el libro de Adams [1]. Asimismo, los libros de Eskin [8], Folland

*si el tiempo lo permite

[10] y Kesavan [14] pueden resultar útiles para el estudio de esta sección. Una buena referencia para espacios de Sobolev es también el texto de Brezis [4].

Para profundizar en el estudio de ecuaciones elípticas el clásico texto de Gilbarg y Trudinger [12] es una excelente opción. La segunda edición del texto de Renardy y Rogers [19] es una buena referencia para problemas elípticos que contiene, además, un capítulo muy bien escrito sobre problemas no lineales para aquél que desee iniciarse en ese tema. Un libro clásico es, por supuesto, el segundo tomo de Courant y Hilbert [5]. El libro de Showalter [22] es muy didáctico y recomendable, además de gratuito.

Para complementar el material dedicado a ecuaciones parabólicas recomiendo ampliamente los textos de Lieberman [17], Friedman [11], y Ladyzhenskaya *et al.* [15]. Asimismo, para la teoría de semigrupos, el texto de Renardy y Rogers [19] es una buena introducción, mientras que los libros clásicos de Pazy [18] y Engel y Nagel [6, 7] son esenciales para quien desee profundizar.

Lecturas complementarias de la sección dedicada a problemas hiperbólicos incluyen los libros de Ladyzhenskaya [16], Alinhac [2] y Benzoni-Gavage y Serre [3].

Finalmente, como complemento para todo el material de este curso y otros temas, véanse Brezis [4], Jost [13] y Taylor [24].

REFERENCIAS

- [1] R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1975.
- [2] S. ALINHAC, *Hyperbolic partial differential equations*, Universitext, Springer, Dordrecht, 2009.
- [3] S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.
- [4] H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.
- [5] R. COURANT AND D. HILBERT, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989. Reprint of the 1962 original, A Wiley-Interscience Publication.
- [6] K.-J. ENGEL AND R. NAGEL, *One-parameter semigroups for linear evolution equations*, vol. 194 of Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [7] ———, *A short course on operator semigroups*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2006.
- [8] G. ESKIN, *Lectures on linear partial differential equations*, vol. 123 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [9] L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
- [10] G. B. FOLLAND, *Introduction to partial differential equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, second ed., 1995.
- [11] A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964.
- [12] D. GILBARG AND N. S. TRUDINGER, *Elliptic partial differential equations of second order*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [13] J. JOST, *Partial differential equations*, vol. 214 of Graduate Texts in Mathematics, Springer, New York, second ed., 2007.
- [14] S. KESAVAN, *Topics in functional analysis and applications*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.
- [15] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
- [16] O. A. LADYZHENSKAYA, *The boundary value problems of mathematical physics*, vol. 49 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1985.
- [17] G. M. LIEBERMAN, *Second order parabolic differential equations*, World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996.
- [18] A. PAZY, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1983.

- [19] M. RENARDY AND R. C. ROGERS, *An introduction to partial differential equations*, vol. 13 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, second ed., 2004.
- [20] S. SALSA, *Partial differential equations in action. From modelling to theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
- [21] L. SCHWARTZ, *Mathematics for the physical sciences*, Hermann, Paris, 1966.
- [22] R. E. SHOWALTER, *Hilbert space methods for partial differential equations*, Electronic Monographs in Differential Equations, San Marcos, TX, 1994. Electronic reprint of the 1977 original; available at <http://ejde.math.swt.edu/mtoc.html>.
- [23] R. S. STRICHARTZ, *A guide to distribution theory and Fourier transforms*, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1994.
- [24] M. E. TAYLOR, *Partial differential equations. Basic theory*, vol. 23 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.
- [25] A. H. ZEMANIAN, *Distribution theory and transform analysis*, Dover Publications, Inc., New York, second ed., 1987. An introduction to generalized functions, with applications.

INSTITUTO DE INVESTIGACIONES EN MATEMÁTICAS APLICADAS Y EN SISTEMAS, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO, APDO. POSTAL 20-126, C.P. 01000 CD. DE MÉXICO (MÉXICO)

E-mail address: `plaza@mym.iimas.unam.mx`