**Ecuaciones Diferenciales Parciales. Tarea 2.**

**1.** Sean $f, g \in C_0^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$, es decir, de clase $C^1$ y de *soporte compacto* ($f = g \equiv 0$ fuera de un intervalo acotado $|x| \leq R$, para cierto $R > 0$). Demuestra que la solución $u \in C^2(\mathbb{R} \times (0,+\infty);\mathbb{R})$ de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\, t \geq 0,\\ u(x,0) &= f(x),\\ u_t(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

es de soporte compacto (en la variable $x$, y con diferente $R$, por supuesto), para cada $t > 0$ fijo. Dado que la solución tiene la forma $u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct)$, prueba que las funciones $F, G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tienen soporte compacto sólo cuando

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\, dy = 0.$$

**2.** Sean $v$ y $u$ dos soluciones de la ecuación de onda homogénea,

$$\Box u := u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0.$$

(a) Prueba que $\Box(u_t v_t + c^2 u_x v_x) = 0$.

(b) Suponiendo que $u$ es solución de $\Box u = 0$ en $(x,t) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$, con condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R},\\ u_t(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

donde $f$ y $g$ son funciones de clase $C^1$ y de *soporte compacto* (es decir, $f = g \equiv 0$ fuera de un conjunto compacto en $\mathbb{R}$), entonces demuestra que la *energía total*,

$$E(t) = E_{\mathrm{cin}}(t) + E_{\mathrm{pot}}(t),$$

es constante en $t$, donde las energías cinética y potencial son

$$E_{\mathrm{cin}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u_t^2(x,t)\, dx, \quad \text{y} \quad E_{\mathrm{pot}}(t) = \tfrac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} c^2 u_x^2(x,t)\, dx,$$

respectivamente. (*Sugerencia:* Usa (a) para calcular $dE/dt$. Aplica la fórmula de d'Alembert y el hecho de que $f$, $g$ y todas sus derivadas se anulan fuera de un conjunto compacto.)

(c) Bajo las mismas hipótesis que en (b) demuestra el principio de *equipartición de la energía*: existe $T > 0$ tal que $E_{\mathrm{cin}}(t) = E_{\mathrm{pot}}(t)$ para todo $t \geq T$.

**3.** Estudiar el problema

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= 1, \qquad x \geq 0, t \geq 0,\\ u(x,0) &= 0, \qquad x \geq 0,\\ u_t(x,0) &= 0, \qquad x \geq 0,\\ (u_t + \beta u_x)(0,t) &= 0, \qquad t \geq 0, \end{aligned}$$

donde $\beta \in \mathbb{R}$ es constante. Suponiendo que $\beta \neq 0$, $\beta \neq c$, usa la identidad de Green-Lagrange para determinar la solución en las regiones $x > ct \geq 0$ y $0 \leq x \leq ct$. Prueba que la solución encontrada es única, usando la identidad de Green-Lagrange o mediante el método de energía. ¿Qué pasa si $\beta = 0$? ¿Qué pasa si $\beta = c$?

**4.** Aplicando el principio de Duhamel, resuelve el siguiente problema de valores iniciales:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 u_{xx} &= xt, \\ u(x,0) &= e^x, \\ u_t(x,0) &= \sin x, \end{aligned}$$

para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$, con $c > 0$ constante.

**5.** Resuelve el siguiente problema no homogéneo con valores iniciales y de frontera:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= g(t)\sin x, && 0 < x < \pi,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_t(x,0) &= 0, && 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0, && t \geq 0. \end{aligned}$$

**6.** Resuelve el siguiente problema para una cuerda semi-infinita con un extremo fijo:

$$\begin{aligned} u_{tt} - u_{xx} &= 0, && x > 0,\ t > 0, \\ u(x,0) = f(x), \quad u_t &= 0, && x > 0, \\ u(0,t) &= 0, && t \geq 0, \end{aligned}$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x-4), & |x-4| \leq \pi/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases}$$

**7.** Suponiendo que $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0,+\infty))$ es solución de

$$\begin{aligned} u_{tt} - c^2 \Delta_x u &= 0, && x \in \mathbb{R}^3,\ t \geq 0, \\ u(x,0) &= f(x), && x \in \mathbb{R}^3, \\ u_t(x,0) &= g(x), && x \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

donde $f, g$ son suaves y de soporte compacto, demuestra que existe una constante $C > 0$ tal que

$$|u(x,t)| \leq \frac{C}{t}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^3$, $t > 0$. (*Sugerencia:* Usa la fórmula de Kirchhoff.)

**8.** Encuentra la solución a

$$u_{tt} - (u_{xx} + u_{yy}) = 0,$$

donde $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t \geq 0$, con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2+y^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

**9.** Sea $u$ la solución de $u_{tt} - c^2\Delta u = 0$, para $x \in \mathbb{R}^3$ y $t > 0$, con datos iniciales $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$. Suponiendo que $f$ y $g$ están soportadas en la esfera compacta de radio $\rho_0 > 0$ y centro en $x = 0$, $\bar{B}_{\rho_0}(0)$, describe el soporte de la solución $u$ para todo $t > 0$.

**10.** Considera la ecuación de onda en $\mathbb{R}^3$,

$$u_{tt} - c^2\Delta_x u = 0,$$

con $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^3$.

(a) Demuestra que la solución general *con simetría esférica* (es decir, $u = u(r,t)$, con $r = |x|$) tiene la forma

$$u = \frac{1}{r}\left(F(r+ct) + G(r-ct)\right).$$

(b) Prueba que si los datos iniciales son $u(x,0) = 0$, $u_t(x,0) = g(r)$, donde $g$ es una función par de su argumento, entonces la solución es

$$u(r,t) = \frac{1}{2cr}\int_{r-ct}^{r+ct} \rho g(\rho)\, d\rho.$$

(c) Si $g$ está dada por

$$g(r) = \begin{cases} 1, & \text{para } \ 0 < r < a, \\ 0, & \text{para } \ r > a, \end{cases}$$

con $a > 0$, encuentra explícitamente, usando el inciso anterior, la solución $u$ en las diferentes regiones acotadas por los conos $r = a \pm ct$ en el espacio-tiempo. Prueba que $u$ es discontinua en $(0, a/c)$ (esto se debe al fenómeno de "focalización" de la discontinuidad de $u_t$ en $t = 0$, $|x| = a$).

**11.** Considera el problema

$$u_{tt} - \Delta u = 1,$$

donde $u = u(x,y,z,t)$ (es decir, en $\mathbb{R}^3$), con condiciones iniciales

$$u_{|t=0} = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad u_{t|t=0} = x^2+y^2+z^2.$$

(a) Expresa el laplaciano en coordenadas esféricas

$$(x,y,z) = (r\cos\phi\sin\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta),$$

donde $r \geq 0$, $\theta \in [0,\pi)$, $\phi \in [0,2\pi)$.

(b) Encuentra una solución que sólo dependa de $r = |\bar{x}|$, $\bar{x} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. (*Sugerencia:* Reducir el problema a la ecuación de onda no homogénea en una dimensión para $r > 0$, $t > 0$. Aplica la identidad de Green-Lagrange y analiza los casos $r \geq t$ y $r < t$.)

(c) Discute la diferenciabilidad de la solución en la curva $t = |\bar{x}|$.

(d) Encuentra la solución del problema directamente: primero encuentra *una* solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 1, \\ u_{|t=0} = u_{t|t=0} &= 0. \end{aligned}$$

(*Sugerencia:* Usar el principio de Duhamel.) Después calcula la solución a

$$\begin{aligned} u_{tt} - \Delta_x u &= 0, \\ u_{|t=0} &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ u_{t|t=0} &= x^2 + y^2 + z^2, \end{aligned}$$

usando la fórmula de Kirchhoff y calculando las integrales de superficie. La suma de la solución particular y la solución de la homogénea debe ser, por unicidad, idéntica a la solución obtenida en el inciso (b).

**12.** Demuestra que, de todas las dimensiones $n \in \mathbb{N}$, sólo cuando $n = 3$ puede uno tener propagación de ondas esféricas *sin distorsión y con atenuación*. Esto significa lo siguiente: una onda esférica satisface la ecuación de onda,

$$u_{tt} - c^2\Big(u_{rr} + \frac{n-1}{r}u_r\Big) = 0,$$

donde $r$ es la coordenada radial (ver sección dedicada a las medias esféricas). Considera una solución que tiene la forma

$$u(r,t) = \alpha(r) f(t - \beta(r)),$$

donde el término $\alpha = \alpha(r)$ se conoce como término de *atenuación*, y $\beta = \beta(r)$ es el término de *retraso*. La pregunta es si existen soluciones no triviales de este tipo para $f$ arbitraria. (*Sugerencia:* Sustituye en la ecuación y encuentra una ecuación diferencial ordinaria para $f$; haciendo los coeficientes de $f$, $f'$ y $f''$ iguales a cero, resuelve para encontrar que $n = 1$ o $n = 3$; en otro caso, $u \equiv 0$. Si $n = 1$ demuestra que $\alpha$ es constante, es decir, no hay atenuación.)

Total: 120 pts.