Ecuaciones Diferenciales Parciales. Tarea 3.

1. Demuestra que la ecuación de Laplace $\Delta u = 0$ es invariante bajo rotaciones, es decir, si $O \in \mathbb{R}^n$ es una matriz de rotación (tal que $O^\top O = I$) y si definimos $w(x) := u(Ox)$, entonces $\Delta w = 0$ si y sólo si $\Delta u = 0$.

2. Sea u armónica en $\mathbb{R}^n$, tal que

$$\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} = \int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, dx \leq M < +\infty.$$

Demuestra que $u = 0$. (*Sugerencia:* Utiliza la segunda propiedad del promedio en una bola $B_R(x)$. Aplica la desigualdad de Schwarz y toma el límite cuando $R \to +\infty$.)

3. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto y acotado, y supongamos que $u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ es solución de $\Delta u = u^3 - u$ en Ω, con $u = 0$ sobre $\partial\Omega$. Demuestra que $|u| \leq 1$.

4. Demuestra el *teorema de Weyl*: suponiendo que $u \in C(\Omega)$ satisface

$$\int_\Omega u \Delta\varphi \, dx = 0,$$

para cualquier $\varphi \in C^2_0(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces u es armónica en Ω.

5. Prueba la *segunda desigualdad de Harnack*: si u es armónica y no negativa en la bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, con $R > 0$, entonces para toda $x \in B_R(0)$,

$$\frac{R^{n-2}(R - |x|)}{(R + |x|)^{n-1}} u(0) \leq u(x) \leq \frac{R^{n-2}(R + |x|)}{(R - |x|)^{n-1}} u(0).$$

6. Sea $G(x, y)$ la función de Green para la bola $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$. Demuestra que

$$\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) := \nabla_y G(x, y) \cdot \hat{n} = \frac{|x|^2 - R^2}{\omega_n R |x - y|^n},$$

para cualesquiera $x \in B_R(0)$, $y \in \partial B_R(0)$, y donde $\hat{n}$ denota la normal exterior a $\partial B_R(0)$. La función

$$K(x, y) = -\frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{\omega_n R |x - y|^n},$$

es el *núcleo de Poisson para la bola* $B_R(0) \subset \mathbb{R}^n$.

7. (a) Demuestra que

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\rho^{n-3}}{(\rho^2 + k^2)^{n/2}} \, d\rho \;=\; \frac{1}{k^2(n-2)},$$

para todo $n > 3$, y todo $k \neq 0$. (*Sugerencia:* Usa sustitución trigonométrica e integra por partes.)

(b) Sea el núcleo de Poisson para el semi-plano $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, x_n > 0\}$, $n \geq 2$,

$$K(x,y) = \frac{2x_n}{\omega_n |x-y|^n},$$

para $x \neq y$. Prueba, mediante un cálculo directo, que

$$\int_{\partial \mathbb{R}^n_+} K(x,y)\, dS_y \, = \, 1,$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n_+$, $n \geq 2$. (*Sugerencia:* Primero pruébalo para $n = 2$ y $n = 3$; recuerda que $\omega_2 = 2\pi$ y $\omega_3 = 4\pi$. Para el caso general $n > 3$ escribe la integral en todo $\mathbb{R}^{n-1}$ como una integral triple: la integral en una de las variables, la integral de superficie en *cáscaras esféricas en* $\mathbb{R}^{n-2}$, y la integral en el radio de las cáscaras; usa (a) y aplica la conocida relación de recursión $\omega_n = 2\pi\omega_{n-2}/(n-2)$ para $n \geq 3$; no es necesario demostrar esta última.)

8. Para $n = 2$, encuentra la función de Green asociada al laplaciano en el primer cuadrante, $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, x > 0, \, y > 0\}$.

9. Sea $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n \, : \, |x| < 1\}$. Demuestra que existe una constante positiva $C > 0$, que depende únicamente de la dimensión $n \geq 2$, tal que

$$\max_{B_1(0)} |u| \leq C \left(\max_{B_1(0)} |f| + \max_{\partial B_1(0)} |g| \right),$$

donde $f \in C(\overline{B_1(0)})$, $g \in C(\partial B_1(0))$ y u es la solución de

$$\begin{aligned} \Delta u &= f, \quad \text{en } B_1(0), \\ u &= g, \quad \text{en } \partial B_1(0). \end{aligned}$$

10. *Principio del máximo de Hopf*: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ abierto y acotado. Sea $u \in C^1(\bar{\Omega})$, armónica y positiva en Ω. Suponiendo que $u(x_0) = 0$ en un punto $x_0 \in \partial\Omega$, y que en x_0 se cumple *la condición del círculo interior*, a saber, que existe un círculo (o un disco) $B_R(y_0) \subset \Omega$ tal que

$$B_R(y_0) \cap \partial\Omega = \{x_0\},$$

demuestra que la derivada normal exterior de u en x_0 es estrictamente negativa:

$$\frac{\partial u}{\partial n}(x_0) < 0.$$

(*Sugerencia:* Usa el principio del máximo para comparar u con la función

$$w(x) = \frac{\log|R| - \log|y_0 - x|}{\log R - \log(R/2)} \min_{\partial B_{R/2}(y_0)} u$$

en el anillo circular $A = B_R(y_0) \backslash B_{R/2}(y_0)$. Compara entonces las derivadas normales en x_0.)

11. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Discute (es decir, demuestra o da un contraejemplo de) la unicidad de la solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ al *problema de Robin*:

$$\begin{aligned} \Delta u = f, &\quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + au = g, &\quad \text{en } \partial\Omega, \end{aligned}$$

donde $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega)$ y $a > 0$ es una constante.

12. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, con $n \geq 2$. Sea $u \in C^2(\Omega)$, con $x \in \Omega$. Demuestra que

$$\Delta u(x) = \lim_{r \to 0^+} \frac{2n}{r^2} \left(\frac{1}{\omega_n} \int_{|\eta|=1} u(x + r\eta)\, dS_\eta \, - \, u(x) \right).$$

Nótese que esta fórmula implica la propiedad del promedio en caso de que la función sea armónica. (*Sugerencia:* Considera la expansión de Taylor de segundo orden alrededor de x.)

13. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto y conexo. Sea u armónica en Ω. Suponiendo que $R > 0$ es tal que $B_R(x_0) \subset \Omega$, sean $0 < a \leq b \leq R$ con $b^2 = aR$. Demuestra que

$$\int_{|\eta|=1} u(x_0 + a\eta) u(x_0 + R\eta)\, dS_\eta = \int_{|\eta|=1} u(x_0 + b\eta)^2\, dS_\eta.$$

Concluye que si u es constante en una vecindad entonces es idénticamente constante en todo Ω. (*Sugerencia:* Sea la función

$$\xi(r_1, r_2) = \int_{|\eta|=1} u(x_0 + r_1\eta) u(x_0 + r_2\eta)\, dS_\eta,$$

definida en $(r_1, r_2) \in (0, R] \times (0, R]$. Demuestra, usando la identidad de Green y la armonicidad de u, que la función $h(\lambda, \rho) = \xi(\lambda\rho, \lambda^{-1}\rho)$, con $0 < \rho < R$ y $\rho/R < \lambda < R/\rho$ es independiente de λ. Usa esto para verificar que $\xi(b, b) = \xi(a, R)$.)

14. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, que satisface la propiedad de la esfera exterior: para cada $\xi \in \partial\Omega$ existe una bola B tal que $\overline{B} \cap \overline{\Omega} = \{\xi\}$. Sean $f \in C^1(\overline{\Omega})$ y $g \in C(\partial\Omega)$. Demuestre que existe una solución $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ al problema

$$\begin{aligned} -\Delta u = f, &\quad \text{en } \Omega, \\ u = g, &\quad \text{sobre } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Total: 140 pts.