Ecuaciones Diferenciales Parciales. Tarea 4.

1. Sea
$$g(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$
Demuestra que la solución al problema de Cauchy,
$$\begin{aligned} u_t - u_{xx} &= 0, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$
está dada por
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left(1 + \phi(x/\sqrt{4t}\,)\right),$$
donde
$$\phi(s) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^s e^{-t^2}\, dt.$$
La función ϕ se conoce como la *función de error*.

2. Encuentra una fórmula explícita para la solución (escrita como una convolución) al siguiente problema:
$$\begin{aligned} u_t + u &= u_{xx} + 2u_x, \qquad x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ u(x,0) &= \sin x, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Demuestra que para cada $x \in \mathbb{R}$, fijo, $u(x,t) \to 0$ si $t \to +\infty$. (*Sugerencia:* Encuentra un cambio de variables de la forma $u = ve^{\alpha x + \beta t}$ de modo que el problema se reduzca a resolver la ecuación del calor. Recuerda que
$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x,t)\, dx = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/4t}\, dx = 1,$$
para cada $t > 0$.)

3. Considera la ecuación del calor en un intervalo:
$$u_t - u_{xx} = 0, \qquad x \in [0,1],\ t > 0. \tag{1}$$
Sea $u_1 = u_1(x,t)$ la solución a (1) con los siguientes datos iniciales y de frontera:
$$\begin{aligned} u_1(x,0) &= x, \\ u_1(0,t) &= 1, \\ u_1(1,t) &= t. \end{aligned}$$
Sea $u_2 = u_2(x,t)$ la solución a (1) con los siguientes datos iniciales y de frontera:
$$\begin{aligned} u_2(x,0) &= 2x, \\ u_2(0,t) &= 2, \\ u_2(1,t) &= 2t. \end{aligned}$$
Explica porqué $u_1(x,t) \leq u_2(x,t)$ *para todo* $(x,t) \in [0,1] \times [0,+\infty)$.

4. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con frontera suave. Supongamos que $f \in C(\overline{\Omega})$, $g \in C(\partial\Omega \times [0,T])$, con $T > 0$. Si $u \in C^2(\Omega \times (0,T]) \cap C(\overline{\Omega} \times [0,T])$ es una solución del problema,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = e^{-u}, &\quad \text{en } \Omega \times (0,T], \\ u(\cdot, 0) = f, &\quad \text{en } \Omega, \\ u = g, &\quad \text{sobre } \partial\Omega \times (0,T), \end{aligned}$$

demuestra que

$$-M \leq u \leq Te^M + M, \qquad \text{en } \Omega \times (0,T],$$

donde

$$M := \text{máx}\left\{ \text{máx}_{\Omega} |f|, \text{máx}_{\partial\Omega \times (0,T)} |g| \right\}.$$

5. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ acotado, abierto, con $\partial\Omega$ suave. Demuestra que si existe una solución $u \in C^2(\bar{\Omega} \times [0,T))$ con $T > 0$ fijo, de la solución a la ecuación del calor no homogénea con condiciones iniciales y de Neumann,

$$\begin{aligned} u_t - \Delta u = h(x,t), &\quad x \in \Omega,\ T > t > 0, \\ u(x,0) = f(x), &\quad x \in \Omega, \\ \nabla u \cdot \hat{n} = \frac{\partial u}{\partial n} = g(t), &\quad x \in \partial\Omega,\ T > t > 0, \end{aligned}$$

entonces es única. (*Sugerencia:* Aplica el método de energía.)

Total: 50 pts.