Lección 1.1: Preliminares. Teorema de Pettis, integral de Bochner.

Objetivo: extender conceptos de integrabilidad y diferenciabilidad a mapeos de una variable real en un espacio de Banach

$$\bar{u} : [0,T] \longrightarrow X$$

Aquí $[0,T] \subset \mathbb{R}$, $T>0$, $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach. Naturalmente $t \in [0,T]$ se asocia al tiempo. $\bar{u}(t) \in X$

Definición (a) una función $s : [0,T] \longrightarrow X$ se denomina simple si tiene la forma

$$s(t) = \sum_{j=1}^{m} \chi_{E_j}(t)\, v_j, \qquad t \in [0,T] \qquad \cdots (1)$$

donde $E_j \subset [0,T]$, $1 \leq j \leq m$, $v_j \in X$. $\chi_E(\cdot)$ es la función característica de $E \subset [0,T]$.

(b) Una función $\bar{u} : [0,T] \longrightarrow X$ es fuertemente medible si existe una sucesión de funciones simples, $s_k : [0,T] \longrightarrow X$, $k \in \mathbb{N}$, tal que

$$s_k(t) \longrightarrow \bar{u}(t) \quad \text{c.d.s. en } t \in [0,T] \text{ cuando } k \to \infty$$

(c) Una función $\bar{u} : [0,T] \longrightarrow X$ es débilmente medible si para cada $v \in X^*$ el mapeo

$$t \mapsto v(\bar{u}(t)) = \langle v, \bar{u}(t) \rangle, \quad t \in [0,T]$$

es Lebesgue medible.

Notación $l \in X^*$, $l(u) = \langle l, u \rangle \quad \forall\, u \in X$.

<u>Definición</u> una función $\bar{u} : [0,T] \to X$ es separadamente valuada si su rango $R(\bar{u}) := \{ \bar{u}(t) \in X : t \in [0,T] \}$ es un conjunto separable en X. $\bar{u} : [0,T] \to X$ es casi separadamente valuada si $\exists\ N_0 \subset [0,T]$ Lebesgue medible con $|N_0| = 0$ tal que $\{ \bar{u}(t) \in X : t \in [0,T] \setminus N_0 \}$ es un conjunto separable.

El siguiente teorema provee condiciones necesarias y suficientes para $\bar{u}$ sea fuertemente medible.

<u>Teorema</u> (Pettis)

una función $\bar{u} : [0,T] \to X$ es fuertemente medible si y sólo si es débilmente medible y casi separadamente valuada.

<u>Lema 1</u>. Sea X de Banach. Una sucesión $\{l_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X^*$ converge débilmente-$*$ a $l \in X^*$ si y sólo si (i) $\{ \|l_n\|_* \}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto acotado, y (ii) $\lim_{n \to \infty} l_n(u) = l(u)$ $\forall\, u \in D \subset X$, con D denso en X.

Nota: $\ell_n \in \mathfrak{X}^*$, $\ell_n \to \ell \in \mathfrak{X}^*$ débilmente $-*$ ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n(u) = \ell(u)$ $\forall\, u \in \mathfrak{X}$.

" $w^*\text{-}\lim \ell_n = \ell$ "

<u>Demostración del lema 1</u>

"$\Rightarrow$" suponiendo $w^*\text{-}\lim \ell_n = \ell$, entonces $\|\ell_n\| = \sup\limits_{\|u\|\leq 1} |\ell_n(u)| < \infty$ ya que $\lim\limits_{n\to\infty} \ell_n(u) = \ell(u)$ $\exists$ $\forall\, u \in \mathfrak{X}$.

En particular $\forall\, u \in D \subset \mathfrak{X}$ (denso) $\Rightarrow$ (i), (ii)

"$\Leftarrow$" suponiendo (i) y (ii).
Así, $\exists$ $C>0$ uniforme tal que $\|\ell_n\|, \|\ell\| \leq C$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $D \subset \mathfrak{X}$ denso. Sea $u \in \mathfrak{X}$ arbitrario. Entonces $\forall\, \epsilon > 0$ $\exists$ $v \in D$ tal que $\|u - v\| < \epsilon$. Así,

$$|\ell_n(u) - \ell(u)| \leq |\ell_n(u) - \ell_n(v)| + |\ell_n(v) - \ell(v)| + |\ell(v) - \ell(u)|$$

$$\leq \underbrace{\|\ell_n\|\,\|u-v\|}_{\leq C\epsilon} + \underbrace{|\ell_n(v) - \ell(v)|}_{\to 0 \text{ si } n\to\infty\ \forall v\in D,\ \text{por (ii)}} + \underbrace{\|\ell\|\,\|u - v\|}_{\leq C\epsilon}$$

Así, $\ell_n(u) \to \ell(u)$ si $n \to \infty$ $\forall\, u \in \mathfrak{X}$

$\Rightarrow$ $w^*\text{-}\lim \ell_n = \ell$ $\square$

Lema 2. Sea X de Banach, separable. Entonces existe una sucesión $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X^*$ con $\|l_n\| \leq 1$ tal que para cada $l \in X^*$ con $\|l\| \leq 1$ podemos extraer una subsucesion $l_{n_j} \in X^*$ que satisface

$$\lim_{j\to\infty} l_{n_j}(u) = l(u) \quad \forall u \in X.$$

Demostración:

X separable $\Rightarrow \exists \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ denso en X.
Sea

$$S^* = \{ l \in X^* : \|l\| \leq 1 \}$$

la esfera unitaria en X^*. Consideremos el mapeo

$$(2) \cdots \quad \begin{cases} \varphi_n : S^* \longrightarrow l^2(n) \\ \varphi_n(l) := \left(l(u_1), l(u_2), \ldots, l(u_n) \right) \end{cases}$$

$l^2(n)$ es el espacio de Hilbert n-dimensional de vectores $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ con norma
$$\|(\xi_1, \ldots, \xi_n)\|_{l^2(n)} = \left(\sum_{j=1}^{n} \xi_j^2 \right)^{1/2}$$

Por ser de dimensión finita, $l^2(n)$ es separable $\forall n \in \mathbb{N}$ fijo.

Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ fijo existe una sucesión $\{l_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^*$ tal que el conjunto

$$\{ \varphi_n(\ell_k^{(n)}) : k \in \mathbb{N} \}$$

en denso en $\varphi_n(S^*)$ (imagen de S^* bajo φ_n).

Es decir, para cada $g \in S^*$ existe una subsucesión $\{\ell_{k_j}^{(n)}\}_{j\in\mathbb{N}}$ tal que

$$|\ell_{k_j}^{(n)}(u_i) - g(u_i)| < \frac{1}{j} \quad \forall\ i = 1,2,\dots,n,$$

en virtud de que

$$\| \varphi_n(\ell_{k_j}^{(n)}) - \varphi_n(g) \|_{\ell^2(n)} = \Big(\sum_{i=1}^{n} \underbrace{|\ell_{k_j}^{(n)}(u_i) - g(u_i)|^2}_{\downarrow\ 0} \Big)^{1/2} \quad \text{si } j \to \infty$$

Esto implica que $\lim\limits_{j\to\infty} \ell_{k_j}^{(n)}(u_i) = g(u_i)$

$\forall\ 1 \le i \le n, \forall\ n \in \mathbb{N}$ fijo.

Es decir: (i) $\|\ell_{k_j}^{(n)}\| \le 1$, acotada

(ii) $\lim\limits_{j\to\infty} \ell_{k_j}^{(n)}(u) = g(u)$ $\forall\ u \in D = \{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ denso

Por el lema 1, concluimos $\exists$ sucesión $\{\ell_k^{(n)}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset S^*$ de la cual podemos extraer una subsucesión $\{\ell_{k_j}^{(n)}\} \in S^*$ tal que

$$\ell_j(u) := \ell_{k_j}^{(n)}(u) \longrightarrow g(u)$$

si $j \to \infty$ $\forall\ g \in S^*$. $\square$

Demostración del teorema de Pettis:

"$\Rightarrow$" suponiendo $\bar{u}:[0,T]\to X$ es fuertemente medible. Entonces $\exists$ $S_k:[0,T]\to X$ sucesión de funciones simples tal que

$$S_k(t)\to \bar{u}(t) \quad \text{si } k\to\infty$$

$$\forall\, t\in[0,T]\setminus N_0, \quad \text{con } |N_0|=0.$$

Los rangos de cada S_k

$$R_k := \{ S_k(t) : t\in[0,T] \} \subset X$$

toman un # finito de valores $\forall\, k\in\mathbb{N}$ fijo. Así, la unión es un conjunto separable

$$R := \bigcup_{k\in\mathbb{N}} R_k \subset X$$

Así, la cerradura de la unión, $\overline{R}\subset X$ es separable y contiene al conjunto $\{\bar{u}(t) : t\in[0,T]\setminus N_0\}$. En efecto,

$$\bar{u}(t) = \lim_{k\to\infty} S_k(t) \quad \forall\, t\in[0,T]\setminus N_0$$

implica que $\bar{u}(t)\in\overline{R}$ si $t\in[0,T]\setminus N_0$.

Así, concluimos que $\bar{u}:[0,T]\to X$ es casi separadamente valuada. Además es fácil demostrar que

$\bar{u}$ es fuertemente medible $\Rightarrow$ $\bar{u}$ es débilmente medible

(ejercicio).

"$\Leftarrow$" Supongamos que $\bar{u} = [0,T] \to X$ es débilmente medible y casi separadamente valuada.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que:

(a) $\bar{u}$ es separadamente valuada ($R(\bar{u})$ es separable) ya que lo es excepto en un conjunto $N_0 \subset [0,T]$, con $|N_0| = 0$. Fuertemente medible $s_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$ $\therefore$ es suficiente suponer $R(\bar{u})$ separable.

(b) X es un espacio separable. Si no lo es entonces trabajamos con el subespacio cerrado $\tilde{X} \subset X$ más pequeño que contiene a $R(\bar{u})$ separable.

(ejercicio: (a) y (b)).

Bajo estas hipótesis, probaremos que el mapeo

$$t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$$

es Lebesgue medible.

Sea $a \in \mathbb{R}$ arbitrario. Definimos

$$A := \{ t \in [0,T] \; : \; \|\bar{u}(t)\| \leq a \} \subset [0,T]$$

$$A_\ell := \{ t \in [0,T] \; : \; |\ell(\bar{u}(t))| \leq a \} \subset [0,T]$$

donde $\ell \in X^*$.

Por demostrar:
$$A = \bigcap_{\substack{\ell \in X^* \\ \|\ell\| \leq 1}} A_\ell = \bigcap_{\ell \in S^*} A_\ell$$

Claramente, $A \subseteq \bigcap_{\ell \in S^*} A_\ell$ en virtud de que $\forall \, \ell \in S^*$ se tiene $|\ell(\bar{u}(t))| \leq \|\ell\| \, \|\bar{u}(t)\| \leq a$ si $t \in A$.

Por otro lado, por el teorema de Hahn-Banach para $t \in [0,T]$ fijo existe un elemento $\ell_0 \in X^*$ con $\|\ell_0\| = 1$ tal que $|\ell_0(\bar{u}(t))| = \|\bar{u}(t)\|$. Esto implica que

$$\bigcap_{\ell \in S^*} A_\ell \subseteq A.$$

Así,
$$\bigcap_{\ell \in S^*} A_\ell = A.$$

Por la hipótesis (b), X separable, aplicamos el Lema 2 para observar que

$$\bigcap_{\ell \in S^*} A_\ell = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\ell_n}$$

donde $\{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^*$ es la sucesión del Lema 2. En efecto, si $t \in \bigcap_{l\in S^*} A_l$ entonces por definición $|l(\bar{u}(t))| \leq a \ \forall\, l \in S^*$. Pero para cada elemento $l \in S^*$ existe una subsucesión $\{l_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{l_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset S^*$ tal que

$$\lim_{j\to\infty} l_{n_j}(\bar{u}) = l(\bar{u})$$

por lo que $|l_{n_j}(\bar{u}(t))| \leq a$ si $j \gg 1$ es suficientemente grande. Por lo tanto

$$t \in \bigcap_{n=1}^{\infty} A_{l_n}$$

Por lo tanto,

$$A = \{t \in [0,T] : \|\bar{u}(t)\| \leq a\}$$
$$= \bigcap_{n=1}^{\infty} \{t \in [0,T] : |l_n(\bar{u}(t))| \leq a\}$$

intersección de conjuntos lebesgue medibles en $[0,T]$ ya que $\bar{u}$ es débilmente medible ($t \mapsto \langle l, \bar{u}(t)\rangle = l(\bar{u}(t))$ es medible $\forall\, l \in X^*$).

Concluimos que el mapeo

$$[0,T] \ni t \longmapsto \|\bar{u}(t)\|$$

es medible.

$R(\bar{u}) = \{ \bar{u}(t) : t \in [0,T] \} \subset X$ es separable. (hipótesis)

Entonces para todo $m \in \mathbb{N}$ este rango puede ser cubierto por un conjunto numerable de bolas abiertas $B_{j,m}$, $j \in \mathbb{N}$, m fijo, de radios $1/m$:

$$B_{j,m} = \{ u \in X : \|u - u_{j,m}\| < \frac{1}{m} \}$$

$j \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$ fijo, $X \ni u_{j,m}$ centros de las bolas

Hemos demostrado que el mapeo

$$t \mapsto \|\bar{u}(t) - u_{j,m}\|, \quad t \in [0,T]$$

es Lebesgue medible $\forall j, m$. Por lo tanto,

$$E_{j,m} := \{ t \in [0,T] : \bar{u}(t) \in B_{j,m} \}$$

es Lebesgue medible y además

$$[0,T] = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,m}$$

Si $t \in [0,T]$ entonces $\bar{u}(t) \in R(\bar{u}) \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} B_{j,m}$ $\forall m \in \mathbb{N}$ fijo. Es decir, $t \in \bigcup_{j=1}^{\infty} E_{j,m}$.

Definimos $\tilde{E}_{i,m} := E_{i,m} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_{j,m} \right)$, $i \in \mathbb{N}$

También para $t \in \tilde{E}_{i,m}$ se define

$$u_m(t) := u_{i,m} \quad \text{centro de la bola } B_{i,n}$$

Los conjuntos $\tilde{E}_{i,m}$ son disjuntos:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_{i,m} := \bigcup_{i=1}^{\infty} \left(E_{i,m} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^{i-1} E_{j,m} \right) \right.$$

$$= \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{i,m} = [0,T]$$

Por lo tanto:

$$\| \bar{u}(t) - u_m(t) \| < \frac{1}{m} \quad \forall t \in [0,T]$$

ya que $t \in \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{E}_{i,m}$, $\forall m \in \mathbb{N}$ fijo.

Cada función $u_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$, es fuertemente medible ya que:

- $\tilde{E}_{i,m}$ son Lebesgue medibles $\forall i, m$
- $$u_m(t) = \lim_{i \to \infty} S_i^{(m)}(t) := \lim_{i \to \infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{i} \chi_{\tilde{E}_{k,m}}(t) u_{k,m}}_{\text{función simple } \forall i}$$

Finalmente, el límite fuerte de funciones fuertemente medibles es fuertemente medible.

$u_m : [0,T] \to X$ fuertemente medible

$\Rightarrow \exists \quad S_{k,m} : [0,T] \to X$ simples tales que

$S_{k,m}(t) \to u_m(t)$
c.d.s. en $[0,T]$ si $k \to \infty$

$\therefore \quad |\bar{u}(t) - S_{k,m}(t)| \leq \underbrace{|\bar{u}(t) - u_m(t)|}_{0 \text{ si } m\to\infty} + \underbrace{|u_m(t) - S_{k,m}(t)|}_{\downarrow 0 \text{ c.d.s. si } k\to\infty \ \forall m}$

Tomando la sucesión diagonal

$$\begin{matrix} S_{1,1} & S_{1,2} & S_{1,3} \\ S_{2,1} & S_{2,2} & \cdots \end{matrix}$$

obtenemos subsucesión $S_{k_j}(t) \to \bar{u}(t)$
c.t.s. si $j \to \infty$.

Concluimos que $\bar{u} : [0,T] \to X$ es fuertemente medible

$\square$

La integral de Bochner

Definición (integral de Bochner para una función simple)
Sea $s : [0,T] \to X$ una función simple de la forma

$$s(t) = \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t)\, u_i ,$$

$E_i \subset [0,T]$, $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}} \in X$. Se define la integral de Bochner de $s(t)$ mediante

$$(5) \ldots \qquad \int_0^T s(t)\, dt := \sum_{i=1}^{m} u_i\, |E_i| \in X$$

Observación: Para cualquier $s(t)$ simple esta integral está bien definida (la serie es absolutamente convergente, - serie finita) y es un elemento de X. Además, $\|s(t)\|$ es Lebesgue integrable en $[0,T]$ con

$$\mathbb{R} \ni \int_0^T \|s(t)\|\, dt = \int_0^T \Big\| \sum_{i=1}^{m} \chi_{E_i}(t)\, u_i \Big\|\, dt$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|\, |E_i|$$

Por el teorema de Pettis sabemos que $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ es Lebesgue medible $\forall$ $\bar{u}$ separadamente valuada y débilmente medible. En particular para s simple.

$\therefore$ $t \mapsto \|s(t)\|$ es Lebesgue medible.

$\therefore$ $\|s(t)\|$ es Lebesgue integrable en $[0,T]$.

$\|s(t)\|$ es real, toma un no. finito de valores, $\{\|u_i\|\}_{i=1}^{m}$ y su integral de Lebesgue es

$$\int_0^T \|s(t)\|\, dt = \sum_{i=1}^{m} \|u_i\| \, |E_i|$$

Mas aún, tenemos la estimación:

$$\|\underbrace{\int_0^T s(t)\, dt}_{\in X}\| = \|\sum_{i=1}^{m} u_i |E_i| \, \| \leq \sum_{i=1}^{m} \|u_i\| \, |E_i| = \int_0^T \|s(t)\|\, dt \quad \cdots (4)$$

__Definición__ Se dice que $\bar{u}:[0,T] \to X$ es Bochner integrable si existe una sucesión de funciones simples, $\{s_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, $s_k:[0,T]\to X$, tal que:

(i) $s_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $t\in[0,T]$ si $k\to\infty$

(ii) $\lim_{k\to\infty} \int_0^T \|s_k(t) - \bar{u}(t)\|\, dt = 0$.

En este caso se define la integral de Bochner de $\bar{u}$ en $[0,T]$ mediante

$$(5) \ldots \quad \int_0^T \bar{u}(t)\, dt := \lim_{k\to\infty} \int_0^T s_k(t)\, dt \in X$$

Observación: La integral de Bochner está bien definida. Por (i), $\bar{u} : [0,T] \to X$ es fuertemente medible. Por la prueba del teo. de Pettis sabemos que el mapeo

$$t \mapsto \|\bar{u}(t) - s_k(t)\|$$

es Lebesgue medible y por lo tanto $\int_0^T \|\bar{u}(t) - s_k(t)\| \, dt$ está bien definida $\forall k \in \mathbb{N}$.

Tomando $m, k \in \mathbb{N}$,

$$\Big\| \underbrace{\int_0^T s_k(t)\, dt}_{= \sum_{i=1}^{m} |E_i^{(k)}| u_i^{(k)} \in X} - \int_0^T s_m(t)\, dt \Big\|$$

$$= \Big\| \int_0^T \big(s_k(t) - s_m(t)\big)\, dt \Big\|$$

$$\le \int_0^T \| s_k(t) - s_m(t) \| \, dt$$

(H) $s_k - s_m$ simple

$$\le \int_0^T \| s_k(t) - \bar{u}(t) \| \, dt + \int_0^T \| \bar{u}(t) - s_m(t) \| dt$$

$$\le T\varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \text{ si } m, k \gg 1 \text{ son suficientemente grandes (por (ii)).}$$

$$\Rightarrow \left\{ \int_0^T s_m(t)\, dt \right\}_{m \in \mathbb{N}} \subset X$$

es de Cauchy. Por ende tiene límite:

$$\lim_{m \to \infty} \int_0^T s_m(t)\, dt \in X.$$

El límite es independiente de la sucesión ya que dos sucesiones aproximantes se pueden combinar en una sola sucesión aproximante (también simple). El límite no cambia (ejercicio).

Así, la integral de Bochner en (s) está bien definida.