Semigrupos y EDPs

2022-1

Ramón G. Plaza

Lección 1.2: Teorema de Bochner. Espacios Lp([0,T];X).

Teorema (Bochner)

Sea $\bar{u} : [0,T] \longrightarrow X$ una función fuertemente medible. $\bar{u}$ es Bochner integrable si y sólo si el mapeo $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$, $t \in [0,T]$, es Lebesgue integrable. En este caso tenemos la estimación

$$\left\| \int_0^T \bar{u}(t)\,dt \right\| \leq \int_0^T \|\bar{u}(t)\|\,dt \qquad \cdots (1)$$

y además,

$$\left\langle \ell, \int_0^T \bar{u}(t)\,dt \right\rangle = \int_0^T \langle \ell, \bar{u}(t) \rangle\,dt \qquad \cdots (2)$$

$\forall\, \ell \in X^*$.

Demostración:

"$\Rightarrow$" Sabemos que existe una sucesión de funciones simples, $s_k : [0,T] \to X$, $k \in \mathbb{N}$, tal que $s_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$ si $k \to \infty$ y

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^T \|s_k(t) - \bar{u}(t)\|\,dt = 0$$

Como cada s_k es simple entonces $\|s_k(t)\|$ es Lebesgue integrable; de hecho

$$\int_0^T \|s_k(t)\|\,dt = \sum_{i=1}^{m(k)} \|u_i\|\,|E_i| \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Entonces, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, $\forall\, t \in [0,T]$,

$$\|\bar{u}(t)\| \leq \|\bar{u}(t) - S_k(t)\| + \|S_k(t)\|$$

implica que

$$\int_0^T \|\bar{u}(t)\|\, dt \leq \underbrace{\int_0^T \|\bar{u}(t) - S_k(t)\|\, dt}_{\to 0 \text{ si } k\to\infty} + \int_0^T \|S_k(t)\|\, dt \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\therefore$ el mapeo $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ es Lebesgue integrable.

Mas aún,

$$(3) \cdots \quad \int_0^T \|\bar{u}(t)\|\, dt \leq \lim_{k\to\infty} \int_0^T \|S_k(t)\|\, dt$$

Este último límite existe ya que

$$\int_0^T \big|\, \|S_k(t)\| - \|S_m(t)\| \,\big|\, dt \leq \int_0^T \|S_k(t) - S_m(t)\|\, dt$$

$$\leq \int_0^T \|S_k(t) - \bar{u}(t)\|\, dt + \int_0^T \|S_m(t) - \bar{u}(t)\|\, dt$$

$< 2\epsilon$ si $m, k \gg 1$ suficientemente grandes y $\forall \epsilon > 0$.

$\therefore \lim_{k\to\infty} \int_0^T \|S_k(t)\|\, dt \ \exists$ y se cumple (3).

"$\Leftarrow$" Sea $\bar{u} : [0,T] \to \underline{X}$ es fuertemente medible y $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ es Lebesgue integrable.

sabemos que $\exists\ S_k : [0,T] \to X$, simples tal que $S_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$ si $k \to \infty$

Entonces definimos:

$$q_k(t) := \begin{cases} s_k(t), & \text{si } \|s_k(t)\| \leq \|\bar{u}(t)\|\left(1+\frac{1}{k}\right) \\ 0, & \text{si } \|s_k(t)\| > \|\bar{u}(t)\|\left(1+\frac{1}{k}\right) \end{cases}$$

para $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$. Entonces $q_k : [0,T] \to X$ es una sucesión de funciones simples tal que:

- $\|q_k(t)\| \leq \|\bar{u}(t)\|\left(1+\frac{1}{k}\right)$ ✓
- $\lim_{k\to\infty} \|\bar{u}(t) - q_k(t)\| = 0$ c.d.s. en $[0,T]$

La segunda propiedad se verifica observando que

$$F_k := \left\{ t \in [0,T] : \|s_k(t)\| > \|\bar{u}(t)\|\left(1+\frac{1}{k}\right) > \|\bar{u}(t)\| \right\}$$

son conjuntos medibles. Además, por la convergencia $s_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $[0,T]$ si $k\to\infty$ implica convergencia en norma,

$$\|s_k(t)\| \to \|\bar{u}(t)\| \quad \text{c.d.s. en } [0,T] \text{ si } k\to\infty$$

Entonces claramente $|F_k| \to 0$ si $k\to\infty$. Mas aún, $\|s_k(t) - q_k(t)\| \neq 0$ sólo si $t \in F_k \setminus N_0$ con $|N_0| = 0$. Por lo tanto

$$\|s_k(t) - q_k(t)\| \to 0 \quad \text{c.d.s. en } [0,T] \text{ si } k\to\infty$$

Así, $\|\bar{u}(t) - g_k(t)\| \leq \underbrace{\|\bar{u}(t) - S_k(t)\|}_{\downarrow \, 0} + \underbrace{\|S_k(t) - g_k(t)\|}_{\downarrow \, 0}$

c.d.s. en $[0,T]$
si $k \to \infty$

$$\therefore \quad \|\bar{u}(t) - g_k(t)\| \to 0 \quad \text{c.d.s. en } [0,T] \text{ si } k \to \infty.$$

Ahora, por integrabilidad de $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ podemos aplicar el lema de Fatou a la sucesión de funciones reales

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t) - g_k(t)\| &\leq \|\bar{u}(t)\| + \|g_k(t)\| \\ &\leq \|\bar{u}(t)\| \left(2 + \frac{1}{k}\right) \\ &\leq 3\|\bar{u}(t)\| \quad \text{(integrable)} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 &\leq \limsup_{k \to \infty} \int_0^T \|\bar{u}(t) - g_k(t)\| \, dt \\ &\leq \int_0^T \limsup_{k \to \infty} \|\bar{u}(t) - g_k(t)\| \, dt = 0 \end{aligned}$$

concluimos que $\exists \; g_k : [0,T] \to X$, simples tal que $g_k(t) \to \bar{u}(t)$ c.d.s. en $[0,T]$ si $k \to \infty$ y

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T \|\bar{u}(t) - g_k(t)\| \, dt = 0.$$

Es decir, $\bar{u} : [0,T] \to X$ es Bochner integrable.

En este caso, por definición de g_k y de la integral de Bochner,

$$\left\| \int_0^T \bar{u}(t)\, dt \right\| = \left\| \lim_{k\to\infty} \int_0^T g_k(t)\, dt \right\|$$

g_k simple

$$\leq \int_0^T \lim_{k\to\infty} \| g_k(t) \|\, dt$$

$\|g_k(t)\| \leq \|\bar{u}(t)\|(1+\frac{1}{k})$

$$\leq \int_0^T \|\bar{u}(t)\|\, dt \quad \Rightarrow \quad (1).$$

Finalmente, sea $\ell \in X^*$. Tomando la misma sucesión $g_k : [0,T] \to X$, simples, entonces por linealidad y continuidad de ℓ sabemos que:

$$\int_0^T \langle \ell, g_k(t) \rangle\, dt = \left\langle \ell, \int_0^T g_k(t)\, dt \right\rangle$$

Mas aún,

$$|\langle \ell, g_k(t) \rangle| \leq \|\ell\|_* \, \|g_k(t)\| \leq \|\ell\|_* \|\bar{u}(t)\| \left(1+\frac{1}{k}\right)$$

y $\lim_{k\to\infty} \langle \ell, g_k(t) \rangle = \langle \ell, \bar{u}(t) \rangle$ c.d.s. en $t \in [0,T]$.

Por lo tanto, el mapeo $t \mapsto \langle \ell, \bar{u}(t) \rangle$ es integrable, con

$$\int_0^T \langle \ell, \bar{u}(t) \rangle\, dt = \lim_{k\to\infty} \int_0^T \langle \ell, g_k(t) \rangle\, dt$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left\langle \ell, \int_0^T g_k(t)\, dt \right\rangle$$

$$= \left\langle \ell, \int_0^T \bar{u}(t)\, dt \right\rangle \quad \Rightarrow (2)$$

$\square$

1.2 Espacios dependientes del tiempo.

Espacios $L^p([0,T];X)$

para $\bar{u}:[0,T] \to X$, vamos a examinar su integrabilidad en sentido de Bochner.
$\bar{u}(t) \in X$ para cada $t \in [0,T]$ fijo.

Las definiciones y teoremas se pueden aplicar al caso $L^p(I;X)$ con $I=[0,\infty)$ ó $I=\mathbb{R}$.

Definición $L^1([0,T];X)$ es el conjunto de (clases de equivalencia de) funciones, $\bar{u}:[0,T]\to X$ integrables según Bochner. Se define

$$(1)\cdots \quad \|\bar{u}\|_{L^1([0,T];X)} := \int_0^T \|\bar{u}(t)\|\,dt < \infty$$

$$\forall\, \bar{u} \in L^1([0,T];X)$$

Proposición 1 $L^1([0,T];X)$ es un espacio de Banach en la norma $\|\cdot\|_{L^1([0,T];X)}$. Además, el conjunto

$$(2)\cdots \quad \mathcal{D}([0,T];X) := C_0^\infty([0,T];X)$$

es denso en $L^1([0,T];X)$.

Dem. corolario de un teorema más gral. $\square$

Nota: Aquí los espacios $C^k([0,T];X)$ se definen de la manera usual con diferenciabilidad con respecto a $t\in[0,T]$ en la norma de X.

- $C([0,T];X)$ son todas las funciones continuas $\bar{u}:[0,T]\to X$, donde

$$\|\bar{u}\|_{C([0,T];X)} := \max_{t\in[0,T]} \|\bar{u}(t)\|_X < \infty$$

$C([0,T];X)$ es un espacio de Banach.

- $C^k([0,T];X)$ con $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ son las funciones $\bar{u}:[0,T]\to X$ derivables hasta orden k y con derivadas continuas.

$$\bar{u}'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{u}(t+h)-\bar{u}(t)}{h} \quad \text{existe en } X$$

$$\vdots$$

$$\bar{u}^{(k)}(t) = \lim_{h\to 0} \frac{\bar{u}^{(k-1)}(t+h)-\bar{u}^{(k-1)}(t)}{h} \quad \text{'' ''}$$

$C^k([0,T];X)$ es un espacio de Banach en la norma

$$\|\bar{u}\|_{C^k([0,T];X)} := \sum_{j=0}^{k} \|\bar{u}^{(j)}(t)\|_{C([0,T];X)}$$

- $C^\infty([0,T];X) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}\cup\{0\}} C^k([0,T];X)$

(no es de Banach pero $\exists$ una métrica completa)

- $C_0^\infty([0,T];X) = \{ \varphi \in C^\infty([0,T];X) : \overline{\{t\in[0,T] : \varphi(t)\neq 0\}}$ es compacto en $[0,T]\}$

<u>Definición</u> $L^2([0,T);X)$ es el conjunto de funciones $\bar{u}: [0,T] \to X$ tales que
- $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ es Lebesgue medible
- $\int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 \, dt < \infty$

En este caso se define

$$(3) \dots \quad \|\bar{u}\|_{L^2([0,T];X)} := \left(\int_0^T \|\bar{u}(t)\|^2 dt\right)^{1/2} < \infty$$

Si además, $(X, \langle , \rangle)$ es un espacio de Hilbert entonces se puede definir el producto

$$(4) \dots \quad \langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_{L^2([0,T];X)} := \int_0^T \langle \bar{u}(t), \bar{v}(t) \rangle_X \, dt$$

<u>Proposición 2</u> $L^2([0,T];X)$ es un espacio de Banach en la norma $\|\cdot\|_{L^2([0,T];X)}$ y $C_0^\infty([0,T];X)$ es denso en $L^2([0,T];X)$. Si $(X, \langle , \rangle)$ es de Hilbert entonces $L^2([0,T];X)$ es de Hilbert con el producto interno definido en (4).

<u>Dem.</u> Corolario de un teo. más general. Que (4) define un producto interno: ejercicio

$\square$

<u>Definición</u> sea $1 \leq p \leq \infty$. Se denota $L^p((0,T];\bar{X})$ al conjunto de funciones, $\bar{u}:[0,T] \to \bar{X}$, tales que:

(i) $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|$ es lebesgue medible

(ii) $\|\bar{u}(t)\| \in L^p([0,T])$.

En este caso, para $\bar{u} \in L^p([0,T];\bar{X})$ se define

$$(5)\cdots \quad \|\bar{u}\|_{L^p([0,T];\bar{X})} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|\bar{u}(t)\|^p dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t\in[0,T]} \|\bar{u}(t)\|, & p = \infty \end{cases}$$

<u>Teorema</u> Para cada $1 \leq p \leq \infty$, $L^p([0,T];\bar{X})$ es un espacio de Banach en la norma $\|\cdot\|_{L^p([0,T];\bar{X})}$. Mas aún, si $1 \leq p < \infty$ entonces $\mathcal{D}((0,T);\bar{X}) = C_0^\infty([0,T];\bar{X})$ en denso en $L^p([0,T];\bar{X})$.

<u>Demostración</u>: Se probará para $1 \leq p < \infty$. (El caso $p = \infty$ se deja como ejercicio.)

Sea $\bar{u}_j \in L^p([0,T];\bar{X})$ una sucesión de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \quad M = M(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que si $j,k \geq M$ entonces $\|\bar{u}_j - \bar{u}_k\|^p_{L^p([0,T];\bar{X})} =$

$$= \int_0^T \|\bar{u}_j(t) - \bar{u}_k(t)\|^p dt < \varepsilon^p$$

Tomando $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon := 1/2^k$ existe $M_k = M(1/2^k)$ tal que si $j \geq M_k$ entonces $\|\bar{u}_j - \bar{u}_{j+1}\|_{L^p([0,T];X)} < \frac{1}{2^k}$.

Es decir, existe una subsucesión $\bar{u}_k$ tal que

$$\|\bar{u}_k - \bar{u}_{k+1}\|_{L^p((0,T);X)} < \frac{1}{2^k} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Se define:

$$\rho_N(t) := \|\bar{u}_1(t)\| + \sum_{k=1}^{N} \|\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t)\| \quad \cdots (b)$$

$N \in \mathbb{N}$

Claramente, $\rho_N(t) \geq 0$ es una sucesión de funciones medibles. Por el lema de Fatou

$$\int_0^T \left(\liminf_{N\to\infty} \rho_N(t)\right)^p dt \leq$$

$$\leq \liminf_{N\to\infty} \int_0^T \left(\|\bar{u}_1(t)\| + \sum_{k=1}^{N} \|\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t)\|\right)^p dt$$

Tomando raíz $1/p$ y por la desigualdad de Minkowski ($\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$) para funciones reales en $L^p([0,T])$:

$$\left(\int_0^T \left(\liminf_{N\to\infty} \rho_N(t)\right)^p dt\right)^{1/p} \leq \left(\int_0^T \|\bar{u}_1(t)\|^p dt\right)^{1/p} +$$

$$+ \liminf_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \left(\int_0^T \|\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t)\|^p dt\right)^{1/p}$$

$$\leq \|\bar{u}_1\|_{L^p([0,T];X)} + \liminf_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{2^k}$$

$$\leq \|\bar{u}_1\|_{L^p([0,T];X)} + 1$$

Sea $E := \left\{ t \in [0,T] ; \liminf_{N\to\infty} g_N(t) < \infty \right\}$

Entonces E es Lebesgue medible y $|[0,T] \setminus E| = 0$. Es decir, la serie converge c.d.s. en $[0,T]$

$$g_N(t) \longrightarrow g(t) := \|\bar{u}_1(t)\| + \sum_{k=1}^{\infty} \|\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t)\|$$

si $N \to \infty$.

Mas aún, $g \in L^p([0,T])$.

Definimos $\bar{u}(t) \in \underline{X}$, c.d.s. en $t \in [0,T]$, mediante:

$$(7) \cdots \quad \bar{u}(t) := \begin{cases} \bar{u}_1(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t) \right), & \text{si } t \in E \\ 0, & \text{si } t \notin E \end{cases}$$

Dado que

$$\|\bar{u}_k(t)\| \leq \|\bar{u}_1(t)\| + \sum_{j=1}^{k-1} \|\bar{u}_{j+1}(t) - \bar{u}_j(t)\| \leq g(t)$$

y que $\bar{u}_k(t)$ converge c.d.s. en $t \in [0,T]$ a $\bar{u}(t)$ cuando $k \to \infty$ (es decir,

$$\|\bar{u}_k(t) - \bar{u}(t)\| \to 0 \text{ si } k \to \infty, \text{ c.d.s. en } t \in [0,T]$$

ya que el residuo $\sum_{k=M}^{\infty} \|\bar{u}_{k+1}(t) - \bar{u}_k(t)\| \to 0$ si $M \to \infty$)

entonces, podemos aplicar el teorema de convergencia dominada a la sucesión de funciones reales medibles, $\|\bar{u}_k(t)\|$ (dominadas por $g(t) \in L^p([0,T])$) para concluir que

$$\|\bar{u}(t)\| \in L^p([0,T]).$$

Ahora, en virtud de que

$$\|\bar{u}(t) - \bar{u}_k(t)\|^p \leq (2g(t))^p$$

aplicamos nuevamente convergencia dominada para concluir que

$$0 = \lim_{k\to\infty} \|\bar{u} - \bar{u}_k\|_{L^p([0,T];X)}$$

es decir, $\bar{u}_k \to \bar{u}$ en $L^p([0,T];X)$.

Pero si $m \geq M(\varepsilon)$ y $k \gg 1$ es suficientemente grande entonces

$$\int_0^T \|\bar{u}_m(t) - \bar{u}_k(t)\|^p \, dt < \varepsilon^p$$

Por el lema de Fatou,

$$\int_0^T \|\bar{u}_m(t) - \bar{u}(t)\|^p \, dt \leq \liminf \int_0^T \|\bar{u}_m(t) - \bar{u}_k(t)\|^p$$

$$\leq \varepsilon^p$$

si $m \geq M(\varepsilon)$. Es decir, la sucesión original, $\bar{u}_m : [0,T] \to X$, converge a $\bar{u}$ en $L^p([0,T];X)$. $\therefore$ $L^p([0,T];X)$ es completo.

Para $\varepsilon>0$ sea $\eta_\varepsilon(\cdot)$ el alisador de Friedrichs. Definimos

$$\bar{u}_\varepsilon(t) := (\eta_\varepsilon * \bar{u})(t)$$
$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\bar{u}(t')\,dt' \quad \in \mathbb{X}$$

Queremos demostrar que $\bar{u}_\varepsilon \in L^p([0,T];\mathbb{X})$ $\forall \varepsilon>0$. Vamos a demostrar que

$$(9)\ldots \quad \int_0^T \|\bar{u}_\varepsilon(t)\|^p\,dt \leq \int_0^T \|\bar{u}(t)\|^p\,dt \quad \forall \varepsilon>0.$$

Por ser Bochner integrable

$$\|\bar{u}_\varepsilon(t)\| = \left\|\frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\bar{u}(t')\,dt'\right\|$$
$$\leq \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\|\bar{u}(t')\|\,dt'$$

Caso $1<p<\infty$: $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, por Hölder:

$$\|\bar{u}_\varepsilon(t)\| \leq \int_0^T \left(\frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\right)^{1/q}\left(\frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\right)^{1/p}\|\bar{u}(t')\|\,dt'$$
$$\leq \underbrace{\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)dt'\right]^{1/q}}_{\leq 1}\left[\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\|\bar{u}(t')\|^p\,dt'\right]^{1/p}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^T \|\bar{u}_\varepsilon(t)\|^p\,dt \leq \int_0^T\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)\|\bar{u}(t')\|^p\,dt'\,dt$$
$$\leq \int_0^T \left(\|\bar{u}(t')\|^p \underbrace{\int_0^T \frac{1}{\varepsilon}\eta\left(\frac{t-t'}{\varepsilon}\right)dt}_{\leq 1}\right)dt'.$$

$$\leq \int_0^T \|\bar{u}(t')\|^p \, dt' \Rightarrow (9) \text{ para el caso } 1<p<\infty$$

El caso $p=1$ es directo (ejercicio).

Por propiedades del alisador es fácil verificar que $\bar{u}_\varepsilon \in C_0^\infty([0,T];X)$ (ejercicio).

Estimamos,

$$\|\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}\|_{L^p([0,T];X)} = \int_0^T \|\bar{u}_\varepsilon(t) - \bar{u}(t)\|^p \, dt$$

$$= \int_0^T \left\| \frac{1}{\varepsilon} \int_0^T \eta_\varepsilon(t-t')(\bar{u}(t') - \bar{u}(t)) \, dt' \right\|^p dt$$

por propiedades del alisador.

$g(t') := \|\bar{u}(t') - \bar{u}(t)\|^p$ con $t \in [0,T]$ fijo

satisface $g_\varepsilon := \eta_\varepsilon * g \longrightarrow g$ en $L^1([0,T])$ cuando $\varepsilon \to 0$.

Por lo tanto,

$$\int_0^T \frac{1}{\varepsilon} \eta_\varepsilon(t-t') \|\bar{u}(t') - \bar{u}(t)\|^p \, dt \to 0$$

si $\varepsilon \to 0$. Esto demuestra que

$$\|\bar{u}_\varepsilon - \bar{u}\|_{L^p([0,T];X)} \to 0 \quad \text{si } \varepsilon \to 0.$$

Es decir, $C_0^\infty([0,T];X)$ es denso en $L^p([0,T];X)$ $\square$

Lema Sean $1<p<\infty$, $\bar{u}\in L^p([0,T];X)$ y $\bar{v}\in L^{p'}([0,T];X^*)$ donde $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$.

Entonces el mapeo

$$t\mapsto \langle \bar{v}(t),\bar{u}(t)\rangle$$

es integrable $t\in[0,T]$, con

$$\int_0^T |\langle \bar{v}(t),\bar{u}(t)\rangle|\,dt \leq \|\bar{v}\|_{L^{p'}([0,T];X^*)} \|\bar{u}\|_{L^p([0,T];X)}$$

Demostración: Ejercicio.

Teorema Sea $1\leq p<\infty$. Supongamos que X es reflexivo, o bien X^* es separable. Entonces,

$$L^p([0,T];X)^* \cong L^{p'}([0,T];X^*)$$

Más aún, si $1<p<\infty$ y X es reflexivo entonces $L^p([0,T];X)$ es reflexivo.

Dem. Ejercicio. (Más difícil que en el caso de funciones reales: ver Dinculeanu, "Vector measures" (1967), cap. 13, théorem 8, pg. 282). $\square$

Corolario Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ de Banach y $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ (operador $A: \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, lineal y acotado). Si $\bar{u} \in L^p([0,T]; \mathbb{X})$ entonces $A\bar{u} \in L^p([0,T]; \mathbb{Y})$, con

$$\|A\bar{u}\|_{L^p([0,T];\mathbb{Y})} \leq \|A\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{Y}} \|\bar{u}\|_{L^p([0,T];\mathbb{X})}$$

Si $\bar{u} \in L^1([0,T]; \mathbb{X})$ entonces

$$A\left(\int_0^T \bar{u}(t)\, dt\right) = \int_0^T (A\bar{u})(t)\, dt.$$

Dem. Ejercicio: nótese que si $p < \infty$ entonces estas propiedades son evidentes si $\bar{u} \in C_0^\infty([0,T]; \mathbb{X})$. Por densidad tenemos el resultado. Si $p = \infty$ entonces $(A\bar{u})(t)$ es medible c.d.s. en $t \in [0,T]$ y

$$\|(A\bar{u})(t)\|_{\mathbb{Y}} \leq \|A\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{Y}} \|\bar{u}(t)\|_{\mathbb{X}}$$

$$\leq \|A\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{Y}} \|\bar{u}\|_{L^\infty([0,T];\mathbb{X})}$$

c.d.s. en $t \in [0,T]$.

$\blacksquare$