Lección 1.3: Distribuciones vectoriales. Espacios W^1,p([0,T];X).

Distribuciones vectoriales

Espacio de funciones de prueba $\mathcal{D}(\Omega) = C_0^\infty(\Omega)$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω abierto.

$$\mathcal{D}((0,T)) = C_0^\infty((0,T))$$

Definición Denotamos mediante

$$(1) \ldots \qquad \mathcal{D}'((0,T);X) := \mathcal{B}(\mathcal{D}((0,T));X)$$

al conjunto de los operadores lineales continuos de $\mathcal{D}((0,T))$ en X.

$$L \in \mathcal{D}'((0,T);X), \qquad L : \mathcal{D}((0,T)) \longrightarrow X$$

Observación: si $\bar{u} \in L^1_{loc}([0,T];X)$ (es decir, si $\bar{u} \in L^1(K;X)$ para cualquier $K \subset [0,T]$, compacto) entonces

$$(2) \ldots \quad \begin{cases} \langle L_{\bar{u}}, \varphi \rangle := \int_0^T \varphi(t)\bar{u}(t)\,dt \in X \\ \varphi \in \mathcal{D}((0,T)) \end{cases}$$

define un elemento de $\mathcal{D}'([0,T];X)$

Notación: " $L_{\bar{u}} = \bar{u} \in \mathcal{D}'((0,T);X)$ "

El espacio de distribuciones $\mathcal{D}'((0,T))$ es el caso particular $X = \mathbb{R}$.

Definición Sea $L \in \mathcal{D}'([0,T];X)$. Se define la derivada distribucional, $L' \in \mathcal{D}'((0,T);X)$, mediante

$$(3) \ldots \qquad \langle L', \varphi \rangle := -\langle L, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}((0,T))$$

Proposición Sea $1 \leq p < \infty$, $\bar{u} \in L^p(\mathbb{R};X)$. Sea

$$(T_h \bar{u})(t) := \frac{1}{h} \int_t^{t+h} \bar{u}(s)\, ds$$

para $t \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Entonces $T_h \bar{u} \in L^p(\mathbb{R};X) \cap C_b(\mathbb{R};X)$. Además

$$T_h \bar{u} \longrightarrow \bar{u} \quad \text{en } L^p(\mathbb{R};X)$$

c.d.s. cuando $h \to 0$.

Dem. Checar Cazenave, Haraux "Semilinear evolution equations..." pág 10., Prop. 1.4.29.

$\square$

Corolario 1 Sea $\bar{u} \in L^1_{loc}([0,T];X)$ tal que $L_{\bar{u}} \in \mathcal{D}'((0,T);X)$ definida en (2), es la distribución cero, $L_{\bar{u}} = 0$. Entonces, $\bar{u} = 0$ c.d.s. en $[0,T]$.

Demostración: Si $I \subset [0,T]$ es un subintervalo abierto, entonces $\int_I \bar{u}(t)\, dt = 0$.

En efecto, tomando una sucesión $\varphi_n \in \mathcal{D}((0,T))$ tal que $|\varphi_n| \leq 1$, $\varphi_n \longrightarrow \chi_I$ c.d.s. cuando $n \to \infty$, tenemos:

$$\int_I \bar{u}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_0^T \varphi_n(t)\bar{u}(t)\,dt$$
$$= \lim_{n\to\infty} \langle L_{\bar{u}}, \varphi_n \rangle = 0$$

Entonces fijamos $I \subset [0,T]$, arbitrario.
Definimos $\bar{v} \in L^1(\mathbb{R};X)$ mediante

$$\bar{v}(t) := \begin{cases} \bar{u}(t), & \text{si } t \in I \\ 0, & \text{si } t \notin I \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Además,

$$(T_h \bar{v})(t) = \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \bar{u}(s)\,ds = 0 \quad \forall h > 0$$

Aplicamos la proposición $T_h \bar{v} \to \bar{v}$ c.d.s. en $L^1(\mathbb{R};X)$ si $h \to 0$. Es decir, $\bar{v} = 0$ c.d.s. en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $\bar{u} = 0$ c.d.s. en I.

I arbitrario $\therefore$ $\bar{u} = 0$ c.d.s. en $[0,T]$

Δ

<u>Corolario 2</u> Sea $\bar{u} \in L^1_{loc}(\mathbb{R};X)$. Se define

$$\bar{v}(t) := \int_{t_0}^{t} \bar{u}(s)\,ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

para $t_0 \in \mathbb{R}$ fijo. Entonces:

(i) $\bar{v} \in C(\mathbb{R};X)$

(ii) $\bar{v}' = \bar{u}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R};X)$ (es decir, $L_{\bar{v}}' = L_{\bar{u}}$)

(iii) $\bar{v}$ es diferenciable c.d.s. en $\mathbb{R}$ y $\bar{v}' = \bar{u}$ c.d.s.

Dem. Ejercicio: aplicar la proposición

$$(T_h \bar{u})(t) = \frac{1}{h}\left(\bar{v}(t+h) - \bar{v}(t)\right) \longrightarrow \bar{v}$$

en $L^1(\mathbb{R}; X)$ c.d.s. si $h \to 0$

$\Rightarrow$ (i), (iii)

Para $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle L_{\bar{u}}', \varphi \rangle = \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}} (T_{(-h)}\bar{u})(s)\, ds$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \bar{v}(s)\varphi(s)\, ds = \langle L_{\bar{v}}, \varphi \rangle$$

$\square$

$\Rightarrow$ (ii)

Lema Sea $L \in \mathcal{D}'((0,T); X)$ tal que $L' = 0$ en $\mathcal{D}'((0,T); X)$. Entonces existe $u_0 \in X$ tal que $L = L_{u_0}$, es decir,

$$\langle L, \varphi \rangle = u_0 \int_0^T \varphi(t)\, dt \in X$$

$\forall \varphi \in \mathcal{D}((0,T))$.

Demostración: Sea $\theta \in \mathcal{D}((0,T))$ tal que $\int_0^T \theta(s)\, ds = 1$. Definimos

$$u_0 := \langle L, \theta \rangle \in X$$

Sea $\operatorname{supp}\theta \subset (a,b) \subset (0,T)$ y $t_0 \in (0,T)$ tal que $t_0 < a$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}((0,T))$ arbitraria. Se define $\psi \in \mathcal{D}((0,T))$ mediante

$$\psi(t) := \int_{t_0}^{t} \left(\varphi(s) - \theta(s) \int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi \right) ds$$

$t \in [0,T]$.

Entonces, $$\psi'(t) = \varphi(t) - \theta(t) \int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi \in \mathcal{D}((0,T))$$

Como $L' = 0$ en $\mathcal{D}'((0,T);X)$ entonces

$$\begin{aligned} 0 = -\langle L', \psi \rangle &= \langle L, \psi' \rangle \\ &= \langle L, \varphi \rangle - \langle L, \theta(t) \int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi \rangle \\ &= \langle L, \varphi \rangle - u_0 \int_0^T \varphi(\xi)\, d\xi \end{aligned}$$

$\square$

Definición Sea $\bar{u} \in L^1([0,T];X)$. Se dice que $\bar{v} \in L^1([0,T];X)$ es la derivada débil de $\bar{u}$, $\bar{u}' = \bar{v}$, si $L'_{\bar{u}} = L_{\bar{v}}$ en $\mathcal{D}'([0,T];X)$ es decir,

$$X \ni \int_0^T \varphi'(t)\bar{u}(t)\, dt = - \int_0^T \varphi(t)\bar{v}(t)\, dt$$

$$\forall\ \varphi \in \mathcal{D}((0,T)) = C_0^\infty((0,T))$$

Espacios $W^{1,p}([0,T];X)$

Definición Sea $1 \leq p \leq \infty$. El espacio $W^{1,p}([0,T];X)$ se define como el conjunto de funciones $\bar{u} \in L^p([0,T];X)$ tal que $\bar{u}'$ existe en sentido de distribuciones en $\mathcal{D}'([0,T];X)$ y además $\bar{u}' \in L^p([0,T];X)$. En este caso se define:

$$\|\bar{u}\|_{W^{1,p}([0,T];X)} := \begin{cases} \left(\int_0^T \|\bar{u}(t)\|^p + \|\bar{u}'(t)\|^p \, dt\right)^{1/p}, & 1 \leq p < \infty \\ \operatorname*{ess\,sup}_{[0,T]} \left(\|\bar{u}(t)\| + \|\bar{u}'(t)\|\right), & p = \infty \end{cases}$$

Notación: $H^1([0,T];X) = W^{1,2}([0,T];X)$.

Teorema $\left(W^{1,p}([0,T],X), \|\cdot\|_{W^{1,p}([0,T];X)}\right)$ es un espacio de Banach.

Dem. Ejercicio. $\square$

Lema 1 Sea $\bar{u} \in W^{1,p}([0,T];X)$, $1 \leq p \leq \infty$. Entonces

(i) $\bar{u} \in C([0,T];X)$ (para alguna versión de $\bar{u}$)

(ii) $$\bar{u}(t) = \bar{u}(s) + \int_s^t \bar{u}'(\xi)\, d\xi, \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T$$

(iii) $\max_{t\in[0,T]} \|\bar{u}(t)\| \leq C \|\bar{u}\|_{W^{1,p}([0,T];X)}$

con $C = C(T) > 0$.

Dem. Ejercicio. Ver Evans, cap. 5, pág. 302.

$\square$

Lema 2 $\bar{u} \in L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))$, con $\bar{u}' \in L^2([0,T]; H^{-1}(\Omega))$

$H^{-1}(\Omega) = H_0^1(\Omega)^*$, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto, acotado.

Entonces:

(i) $\bar{u} \in C([0,T]; L^2(\Omega))$

(ii) el mapeo $t \mapsto \|\bar{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$

es absolutamente continuo y

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}(t)\|^2_{L^2(\Omega)} = 2\langle \bar{u}'(t), \bar{u}(t)\rangle_{L^2(\Omega)}$$

c.d.s. en $t \in [0,T]$

(iii) Además,

$$\max_{t\in[0,T]} \|\bar{u}(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\bar{u}\|_{L^2([0,T]; H_0^1(\Omega))} + \|\bar{u}'\|_{L^2([0,T]; H^{-1}(\Omega))}\right)$$

$C = C(T) > 0$.

Nota: $\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} |u(x,t)|^2\,dx = 2\int_{\mathbb{R}} u(x,t)\,u_t(x,t)\,dx$

$$\frac{d}{dt}\|\bar{u}(t)\|^2_{L^2(\mathbb{R})} = 2\langle u_t, u\rangle_{L^2(\mathbb{R})}$$

Dem. Evans, pág. 303

Lema $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^\infty$.
Sea $m \geq 0$, $m \in \mathbb{Z}$.

Suponemos $\bar{u} \in L^2([0,T]; H^{m+2}(\Omega))$

con $\bar{u}' \in L^2([0,T]; H^m(\Omega))$.

Entonces:

(i) $\bar{u} \in C([0,T]; H^{m+1}(\Omega))$

(ii) $\max\limits_{t\in[0,T]} \|\bar{u}(t)\|_{H^{m+1}(\Omega)} \leq$

$$\leq C\left(\|\bar{u}\|_{L^2([0,T];H^{m+2}(\Omega))} + \|\bar{u}'\|_{L^2([0,T],H^m)}\right)$$

con $C = C(T,\Omega,m) > 0$.

Dem. Ver Evans, pg. 304.

$\square$

2. Teoría de semigrupos

Motivación: La teoría de C_0-semigrupos o semigrupos fuertemente continuos surge de formular EDPs de evolución como si fuesen sistemas dinámicos en espacios de dimensión infinita:

$$\begin{cases} u_t = Au, & u \in X \text{ de Banach} \\ u(0) = u_0, & u_0 \in X. \end{cases}$$

A → operador diferencial

Analogía con un sistema dinámico en $\mathbb{R}^n$: familia de mapeos $\{\varphi(t)\}_{t\geq 0}$, parametrizada por $t \geq 0$, $\varphi(t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, que satisface

$$\begin{cases} \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s), & \forall t,s \geq 0 \\ \varphi(0) = Id. \end{cases}$$

$$\underset{\in \mathbb{R}^n}{x} \mapsto \underset{\in \mathbb{R}^n}{\varphi(t)x}$$ → "estado" del sistema dinámico en $t>0$ que en el tiempo $t=0$ estaba en $x \in \mathbb{R}^n$

Caso más sencillo: lineal y autónomo, $\varphi(t)$ es el flujo generado por las soluciones al problema de Cauchy

$$(1) \cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, & t \geq 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$u \in \mathbb{R}^n$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$.

$X = \mathbb{R}^n$
$A \in \mathbb{M}_{n \times n}$
matriz constante.

La solución es :

$$u(t) = e^{tA} u_0 = \varphi(t) u_0$$

donde
$$e^{tA} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} \in \mathbb{M}_{n\times n}$$

absolutamente convergente

$e^{tA} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ satisface :

- $e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$ $\quad \forall\, s,t \geq 0$, $\forall\, A \in \mathbb{M}_{n\times n}$
- $\left(e^{tA}\right)\Big|_{t=0} = I \in \mathbb{M}_{n\times n}$
- $A = \left(\dfrac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)\right)\Big|_{t=0}$
- $t \mapsto e^{tA}$ es continuo.

Caso $A(t)$: el semigrupo o mapeo de flujo está dado por la matriz fundamental principal, $\Phi(t)$.

Ejemplo:

$$(2)\ \cdots \begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \Omega,\ t > 0 \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^\infty$.

- $A := \Delta : L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$
  con dominio $D(A) = H_0^2(\Omega) \subset L^2(\Omega)$

- $H_0^2(\Omega)$, $u_0 \in H_0^2(\Omega)$ condición inicial.

(2) se puede plantear:

hallar $u \in D(A)$ tal que

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

"sistema dinámico" en $\mathfrak{X} = L^2(\Omega)$.

Problema: ¿cómo definir el "semigrupo" o flujo asociado al sistema dinámico?
¿Cómo dar sentido a la expresión

$$e^{tA} = e^{t\Delta} \ ?$$

Principal problema es definir e^A para $A \in \mathcal{L}(X)$, X de Banach.
En particular nos interesa el caso en que A no es acotado $A \notin \mathcal{B}(X)$.

1) Serie de potencias:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

es inútil si A no es acotado. Ejemplo: $\Delta = A$ en $L^2(\Omega)$, u debe ser C^∞ y todas las derivadas de orden par anularse en $\partial\Omega$ para definir $A^k u$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

2) Método espectral. En EDOs, se expresa A como una descomposición de Jordan,

$$A = T^{-1} J T$$

$A^2 = T^{-1} J (T T^{-1}) J T = T^{-1} J^2 T$

J matriz de bloques básicos de Jordan

Así,

$$e^A = T^{-1} e^J T$$

En $\dim X = \infty$ no hay un análogo de la descomposición de Jordan ni siquiera para operadores acotados. Pero para operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert el teorema espectral se puede interpretar como como una "diagonalización" y definir $\exp(A)$.

3) Fórmula de Euler: $e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$

$A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ $\qquad e^A = \lim_{n\to\infty} \left(I + \frac{A}{n}\right)^n$

Para $\dim \mathbb{X} = \infty$ esta fórmula adolece de la misma limitación que la serie: no funciona si $A \notin \mathcal{B}(\mathbb{X})$

Otra fórmula de Euler:

$$e^A = \lim_{n\to\infty} \left(I - \frac{A}{n}\right)^{-n}$$

Aproximación de Hille.

potencias del resolvente. Hille encontró las condiciones para la existencia del límite.

4) Aproximación de Yosida. Considerar sucesión de operadores acotados

$$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \qquad A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$$

e^{A_n} se puede definir mediante una serie.

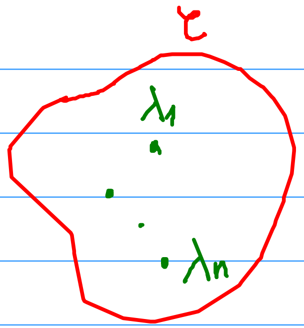
$$e^A = \lim_{n\to\infty} e^{A_n}$$

Aproximación de Yosida.

5) Fórmula integral de Cauchy.

$A \in \mathbb{M}_{n\times n}$ matriz real de $n\times n$

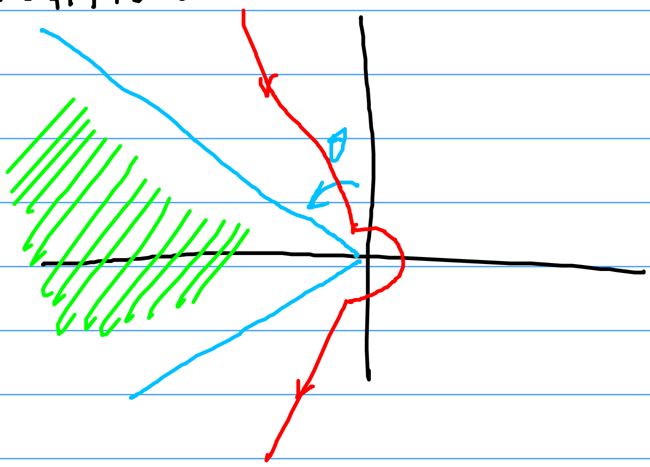
$\mathbb{C} \supset \sigma(A)$ = conjunto discreto y finito.



$$e^{A} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}} e^{\lambda}(\lambda I - A)^{-1}\, d\lambda$$

En dim $X = \infty$, $\sigma(A)$ generalmente no es acotado.

En algunos casos el espectro se comporta de tal manera que para una elección apropiada de un contorno no acotado $\mathcal{C}$ la expresión tiene sentido: semigrupos analíticos.



Antes de encontrar las condiciones sobre A para generar un semigrupo (para definir $\exp(At)$), vamos a definir lo que entendemos por semigrupo. La noción de continuidad en espacios de Banach provee de la definición útil para generar la teoría.