Lección 2.10: Perturbación de semigrupos. Perturbaciones relativamente acotadas.

Ejemplo: Ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$

$$(1) \cdots \quad u_t = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0$$

sujeta a una condición inicial

$$(2) \cdots \quad u(x,0) = f(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

f – función conocida.

Teoría básica de EDPs: $f \in C(\mathbb{R}^n)$ y uniformemente acotada entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy$$

es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y es solución de (1)-(2).

Aplicando Hille-Yosida, si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$(3) \cdots \quad (S(t)f)(x) := \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy$$

es un C_0-semigrupo contractivo en $L^2(\mathbb{R}^n)$, con generador infinitesimal,

$$\begin{cases} \Delta : H^2(\mathbb{R}^n) = D(\Delta) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \\ \Delta u = \sum_{j=1}^{2} \partial_{x_j}^2 u \end{cases}$$

Este semigrupo también es <u>analítico</u>.

<u>Lema</u> $\sigma(\Delta)_{|L^2} = (-\infty, 0]$. Si $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ con $|\theta| < \pi$ entonces

$$\| R(\lambda, \Delta) \| \leq \frac{1}{|\lambda| \cos \theta/2} \quad \ldots (4).$$

<u>Demostración</u>: Notemos que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ entonces $\lambda \in \rho(\Delta)$ y podemos invertir $\lambda I - \Delta$ usando la transformada de Fourier

$$(\lambda I - \Delta) u = f \quad \text{ssi} \quad \hat{u} = \frac{\hat{f}}{\lambda + 4\pi^2 |\xi|^2}$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$(\lambda I - \Delta)^{-1} f = \left((\lambda + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-1} \hat{f} \right)^{\vee}$$

claramente esto implica que $\sigma(\Delta) \subset (-\infty, 0]$

Si $\lambda \in (-\infty, 0]$ entonces basta con demostrar que existe una sucesión $u_j \in H^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\frac{\|u_j\|_{L^2}}{\|(\lambda I-\Delta)u_j\|_{L^2}} \longrightarrow \infty \qquad \text{si } j\to\infty$$

es decir, el resolvente $R(\lambda,\Delta) = (\lambda I-\Delta)^{-1}$ no es acotado.

Sea $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ fijo tal que $|\xi_0|^2 = -\lambda = |\lambda|$ y definimos

$$u(x) = e^{i\xi_0\cdot x}$$

Notamos que $\Delta u = -\sum \xi_{0j}^2\, e^{i\xi_0\cdot x} = -\lambda u$

Función propia de Δ que no está en L^2.

Sea $\psi \in C^\infty$ una función cut-off tal que $\operatorname{supp}\psi \subset B_2(0)$, $\psi(x)\equiv 1$ si $x\in B_1(0)$. Podemos escoger ψ tal que $|\Delta\psi|\leq C$, uniformemente acotado en su soporte.
Definimos

$$\psi_j(x) := \psi(x/j), \quad j\in\mathbb{N}$$

de modo que:
- $\operatorname{supp}\psi_j \subset B_{j+1}(0)$
- $\psi_j \equiv 1$ en $B_j(0)$
- $|\Delta\psi_j| \leq C \quad \forall j\in\mathbb{N}$

Sea la sucesión $u_j(x) = \psi_j(x)u(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$.

Por construcción, $(\lambda I - \Delta) u_j$ tiene soporte en $B_{j+1}(0) \setminus B_j(0)$ y el volumen es de orden

$$\operatorname{vol}\left(B_{j+1}(0) \setminus B_j(0) \right) = O(j^{n-1})$$
si $j \to \infty$

Además, $\{ (\lambda I - \Delta) u_j \}$ es uniformemente acotadas en la norma del supremo, por lo cual $\exists$ $C > 0$ tal que

$$\| (\lambda I - \Delta) u_j \|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C j^{n-1}$$

Por otro lado $|u_j(x)| \equiv 1$ si $x \in B_j(0)$ por lo cual

$$\| u_j \|^2_{L^2} \geq \operatorname{vol}(B_j(0)) = \omega_n j^n$$

obtenemos,

$$\frac{\| u_j \|_{L^2}}{\| (\lambda I - \Delta) u_j \|_{L^2}} \longrightarrow \infty \quad \text{si } j \to \infty.$$

concluimos que $\sigma(\Delta) \subset (-\infty, 0]$ y por ende

$$\sigma(\Delta) = (-\infty, 0]$$

Sea $\lambda = |\lambda| e^{i\theta}$ con $|\theta| < \pi$. Esto implica que $\lambda \in \rho(\Delta)$. Queremos resolver

$$(\lambda I - \Delta)u = f \qquad \text{con } f \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Suponiendo $f, u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$:

$$u = \left(\frac{\hat{f}}{(\lambda + 4\pi^2|\xi|^2)}\right)^{\vee}$$

usando transformada inversa, Plancherel y la desigualdad de Young se puede verificar que

$$\|u\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{|\lambda| \cos \theta/2}$$

Por densidad,

$$\|R(\lambda, \Delta)\| \leq \frac{1}{|\lambda| \cos \theta/2} \qquad \square$$

Corolario $\Delta : H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ genera un semigrupo analítico contractivo:

$$\{S(t)\}_{t\geq 0} = \{e^{t\Delta}\}_{t\geq 0}.$$

Tarea I-4 Operador de Stokes. Sea

$$H = \{\bar{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 : \nabla \cdot u = 0\}$$

$$\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle_H = \sum_{j=1}^{3} \langle u_j, v_j \rangle_{L^2}$$

H es un espacio de Hilbert.

El operador de stokes se define:

$$\begin{cases} A : D(A) \subset H \to H \\ D(A) = \{ \bar{u} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 \cap H \ : \ \Delta \bar{u} \in H \} \\ A\bar{u} = \Delta \bar{u} \qquad \forall\, \bar{u} \in D(A) \end{cases}$$

Demostrar que A es el generador de un C_0-semigrupo analítico y contractivo.

(ver Vrabie, pág. 163)

2.4 Perturbación y aproximación de semigrupos.

Perturbación de semigrupos : $\begin{cases} \text{contractivo} \\ \text{analítico} \end{cases}$

Aproximación " " (Trotter-Kato) : exposición

Problema básico : si $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador de un C_0-semigrupo y $B : D(B) \subset X \to X$ es otro operador lineal ¿ cuáles son las condiciones para que $A+B$ genere un C_0-semigrupo ?

Ejemplo: $Au = \partial_x^3 u$ genera un C_0-semigrupo en $L^2(\mathbb{R})$, pero $(A+B)u = \partial_x^3 u - \partial_x^2 u$ no.

Observaciones:

(a) La suma se define $\begin{cases} (A+B)u := Au + Bu \\ D(A+B) := D(A) \cap D(B) \end{cases}$

La intersección podría ser trivial $D(A) \cap D(B) = \{0\}$.

(b) Si A es generador, tomamos $B = -A$. Entonces $A+B = 0$ definida en un subespacio denso, $D(A)$, en X.

(c) Si $B = -2A$ entonces $A+B = -A$, $D(A+B) = D(A)$. $-A$ genera un C_0-semigrupo sólo cuando A genera un C_0-grupo.

(d) Sea A generador y $U \in \mathcal{B}(X)$ un isomorfismo, tal que $D(A) \cap U(D(A)) = \{0\}$. Sea $B = UAU^{-1}$. Se puede probar

$US(t)U^{-1}$

que B es el generador del ~~mismo~~ C_0-semigrupo pero $A+B$ está definido en $D(A+B) = D(A) \cap D(B) = D(A) \cap U(D(A)) = \{0\}$.

Ejemplo: $X = C_0(\mathbb{R}_+)$

$$A = \frac{d}{dx} \qquad D(A) = C_0^1(\mathbb{R}_+)$$

$U = q(x) Z_d$, $\quad 0 < C_1 \leq q(x) \leq C_2$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $\quad C_j > 0$ unit.

pero con $q = q(x)$ no diferenciable c.d.s.

$$Bu = q(x) \frac{d}{dx}\left(q(x)^{-1} u \right)$$

$$D(B) = \{ u \in X : q(x)^{-1} u \in D(A) \}$$

$\therefore$ $A+B$ sólo esta definido en $\{0\}$.

Existe un caso donde todo funciona bien: $B \in \mathcal{B}(X)$ operador acotado.

Teorema (perturbaciones acotadas)

Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo de tipo (M, ω) con $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ (así, $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$). Sea $B : X \to X$ un operador acotado, con $D(B) = X$. Entonces $C := A + B$, con $D(C) = D(A)$ es el generador de un C_0-semigrupo, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, en X tal que

$$(1) \ldots \qquad \| T(t) \| \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t} \qquad \forall t \geq 0.$$

Demostración: Primero suponemos el caso contractivo: $M = 1$, $\omega = 0$. $\|S(t)\| \leq 1$ $\forall t \geq 0$. Entonces por Hille-Yosida $[0, \infty) \subset \rho(A)$ y para todo $\lambda > 0$

podemos escribir

$$
\begin{aligned}
\lambda I - C &= \lambda I - (A+B) \\
&= \lambda I - A - B(\lambda I - A)^{-1}(\lambda I - A) \\
&= (I - BR(\lambda, A))\underbrace{(\lambda I - A)}.
\end{aligned}
$$

como $\lambda I - A$ es invertible : $\lambda I - C$ es invertible si y sólo si $I - BR(\lambda, A)$ es invertible y $(I - BR(\lambda, A))^{-1}$ es acotado.

Es decir,

$$\lambda \in \rho(C) \quad \text{ssi} \quad \begin{array}{l} (I - BR(\lambda, A))^{-1} \ \exists \\ (I - BR(\lambda, A))^{-1} \in \mathcal{B}(X) \end{array}$$

En ese caso, $R(\lambda, C) = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\operatorname{Re} \lambda > \|B\| \geq 0$. Entonces, por Hille - Yosida,

$$
\begin{aligned}
\|BR(\lambda, A)\| &\leq \|B\| \, \|R(\lambda, A)\| \\
&\underset{\text{Hille-Yosida}}{\leq} \frac{\|B\|}{\operatorname{Re} \lambda} < 1
\end{aligned}
$$

Esto implica que $\lambda \in \rho(C)$ y la serie

$$
\begin{aligned}
R(\lambda, C) &= R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1} \\
&= R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n \quad \underline{\text{converge}}.
\end{aligned}
$$

Ahora estimamos,

$$\| R(\lambda, C) \| \leq \| R(\lambda, A) \| \, \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} (BR(\lambda, A))^n \Big\|$$

$$\leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\|B\|}{\mathrm{Re}\,\lambda}\right)} = \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda - \|B\|}$$

Por el teorema de Hille-Yosida (caso cuasi-contractivo) concluimos que C es el generador de un C_0-semigrupo cuasi-contractivo, $\{\hat{S}(t)\}_{t \geq 0}$, que satisface

$$\|\hat{\tilde{S}}(t)\| \leq e^{\|B\| t} \qquad \forall\, t \geq 0$$

En el caso general con $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ por el lema de reescalamiento, $\{\hat{S}(t) = e^{-\omega t} S(t)\}$ es un C_0-semigrupo ~~contractivo~~ con generador $A - \omega I$.

Es posible demostrar que existe una norma

$$(2) \cdots \qquad |||u||| := \sup_{t \geq 0} \|\hat{S}(t) u\|, \quad u \in X$$

tal que

$$\|u\| \leq |||u||| \leq M \|u\|, \qquad \forall u \in X$$

(ver, lema 3.10, cap. II, Engel-Nagel (2006))

Bajo esta norma, $\{\hat{S}(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo contractivo. Asimismo,

$$|||Bu||| \leq M\|Bu\| \leq M\|B\|\,\|u\| \quad \forall u \in X.$$

Por lo visto en el caso contractivo

$$\tilde{C} = \tilde{A} + B = A - \omega I + B$$

es el generador de un C_0-semigrupo casi-contractivo, $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$, que satisface

$$|||\tilde{S}(t)||| = \sup_{|||u|||\leq 1} |||\tilde{S}(t)u||| \leq e^{|||B|||\,t} \leq e^{M\|B\|t}$$

Por lo tanto,

$$\|\tilde{S}(t)u\| \leq |||\tilde{S}(t)u||| \leq e^{M\|B\|t}|||u|||$$
$$\leq Me^{M\|B\|t}\|u\|$$
$$\forall u \in X,\ \forall t \geq 0.$$

Aplicando de regreso el lema de reescalamiento concluimos que $C = A + B$

es el generador de un C_0-semigrupo, $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, $T(t) := e^{\omega t}\tilde{S}(t)$ $\forall\, t\geq 0$, que satisface

$$\|T(t)\| \leq M e^{(\omega + M\|B\|)t} \qquad \forall\, t\geq 0$$

$\square$

Pregunta:

$$A \qquad\qquad B\in \mathcal{B}(X)$$
$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$
$$S(t) \qquad\qquad e^{tB} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{B^n t^n}{n!}$$

$\underset{\text{teo.}}{\Rightarrow}$ $A+B$ genera $\{T(t)\}$

¿ $T(t)$ con $S(t)$ y e^{tB} ?

$A\in\mathcal{B}(X) \Rightarrow S(t) = e^{tA}$ $\qquad e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ ✓ si $\begin{cases} D(A) = X \\ D(B) = X \end{cases}$

¿ $T(t) = S(t)\underbrace{e^{tB}}$?

$$\{\tilde{T}(t) = S(t)e^{tB}\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$$

(S_1) • $\tilde{T}(0) = Id.$

→ (S_2) • $\tilde{T}(s+t) = S(s)S(t)e^{(t+s)B}$

$= S(t)S(s)e^{sB}e^{tB}$

$= S(t)\,\tilde{T}(s)\,e^{tB}$

→ (S_3)

¿ $S(t)e^{tB} = T(t)$?

$$\tilde{A}u = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\tilde{T}(t+h)-\tilde{T}(t)}{h}\right)u \overset{?}{=} (A+B)u$$

$A : D(A) \subset X \to X$ generador de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$

$A+B : D(A) \subset X \to X$ " " $\{T(t)\}_{t\geq 0}$

$B \in \mathcal{B}(X)$

$D(B) = X$

Sea el operador

$$H(\xi) := S(t-\xi)T(\xi) \qquad \forall\ 0 \leq \xi \leq t$$

Para $u \in D(A) = D(A+B)$ el mapeo $\xi \mapsto H(\xi)u$ es diferenciable y además

$$\frac{d}{d\xi}\left(H(\xi)u\right) = -AS(t-\xi)T(\xi)u + $$

$$+ S(t-\xi)(A+B)T(\xi)u$$

$$= -S(t-\xi)AT(\xi)u +$$

$$S(t-\xi)(A+B)T(\xi)u$$

$$= S(t-\xi)BT(\xi)u \qquad \forall u \in D(A)$$

Integrando en $\xi \in (0,t)$:

$$T(t)u = S(t)u + \int_0^t S(t-\xi)BT(\xi)u\, d\xi$$

$$\forall u \in D(A)$$

como los operadores en ambos lados son acotados concluimos que

(3).- $\begin{cases} T(t)u = S(t)u + \displaystyle\int_0^t S(t-\xi)\,\underbrace{BT(\xi)u}\,d\xi \\ \forall u \in X \end{cases}$

$\{T(t)\}_{t\geq 0}$ generado por $A+B$ es la solución de la ecuación integral (3).

Teorema Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo de tipo (M,ω), con $M\geq 1$, $\omega\in\mathbb{R}$. Sea $B: X \to X$ un operador acotado, $D(B)=X$. Entonces existe una única familia de operadores acotados, $\{T(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, tal que el mapeo $t \mapsto T(t)u$ es continuo en $[0,\infty)$ $\forall u \in X$ y que satisface la ecuación integral (3).

Dem. Definimos $T_0(t) := S(t)$, $t\geq 0$.
Inductivamente,

$$\begin{cases} T_{n+1}(t)u := \displaystyle\int_0^t S(t-\xi)\,B\,T_n(\xi)u\,d\xi \\ \forall n\geq 0,\ \forall u\in X \end{cases}$$

Es fácil demostrar que $t \mapsto T_n(t)u$ es continuo en $[0,\infty)$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $\forall u\in X$ (ejercicio).

Vamos a probar:

$$(4)\ldots \quad \|T_n(t)\| \leq Me^{\omega t}\cdot \frac{M^n\|B\|^n t^n}{n!}$$

Por inducción sobre $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$: para $n=0$ tenemos

$$\|T_0(t)\| = \|S(t)\| \leq Me^{\omega t} \Rightarrow (4)$$

Suponiendo (4) para $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_{n+1}(t)u\| = \left\| \int_0^t S(t-\xi) B T_n(\xi) u \, d\xi \right\|$$

$$\leq \int_0^t \|S(t-\xi)\| \|B\| \|T_n(\xi)\| \|u\| \, d\xi$$

$$\leq \int_0^t Me^{\omega(t-\xi)} \|B\| Me^{\omega\xi} \frac{M^n \|B\|^n \xi^n}{n!} \, d\xi$$

$$\leq Me^{\omega t} \cdot M^{n+1} \|B\|^{n+1} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \|u\|$$

$\Rightarrow$ (4), $n+1$.

Por lo tanto podemos definir $T(t)$ mediante la serie

$$T(t) := \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t), \qquad t \geq 0$$

Por (4) la serie converge uniformemente en la topología de $\mathcal{B}(X)$ en intervalos compactos de $t \geq 0$. Así,

$$t \mapsto T(t)u \quad \text{es continuo} \quad \forall u \in X.$$

Además, $T(t)$ resuelve (3):

$$T(t)u = T_0(t)u + \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)u$$

$$= S(t)u + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t S(t-\xi) B T_{n-1}(\xi) u \, d\xi$$

$$= S(t)u + \int_0^t S(t-\xi) B T(\xi) u \, d\xi$$

$\dashv$ (3)

Suponiendo que existe otra familia $\{\tilde{T}(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$, solución de (3) y $t \mapsto \tilde{T}(t)u$ continuo $\forall u \in X$ estimamos

$$\|(T(t)-\tilde{T}(t))u\| = \left\| \int_0^t S(t-\xi) B (T(\xi)-\tilde{T}(\xi)) u \, d\xi \right\|$$

$$\leq \int_0^t M e^{\omega(t-\xi)} \|B\| \, \|(T(t)-\tilde{T}(t))u\| \, d\xi$$

Por el lema de Gronwall aplicado a la función $t \mapsto \|(T(t)-\tilde{T}(t))u\| \geq 0$ continua, obtenemos

$$\|(\tilde{T}(t) - T(t))u\| = 0 \quad \forall u \in X$$

$$\therefore \quad \tilde{T}(t) = T(t) \quad \forall t \geq 0$$

$\square$

Así tenemos una representación para el semigrupo que genera $A+B$:

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)$$

con $\begin{cases} T_0(t) = S(t) \\ T_n(t) = \int_0^t S(t-\xi)\, B\, T_{n-1}(\xi)\, d\xi \end{cases}$

Corolario $\| S(t) - T(t) \| \leq M e^{\omega t} \left(e^{M \|B\| t} - 1 \right)$

Dem. Ejercicio $\square$

(aplicar el teorema,
$\|T\| \leq M \exp((\omega + M\|B\|)t)$.