Lección 2.11: Perturbaciones relativamente acotadas. Potencias fraccionarias.

Teorema Sean $A: D(A) \subset X \to X$ generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ de tipo (M, ω), $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, y $B: X \to X$, acotado $D(B) = X$. Entonces $C = A + B$ con $D(C) = D(A)$ es generador de un C_0-semigrupo, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, de tipo $(M, \omega + M \|B\|)$, el cual se puede representar mediante

$$T(t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t)$$

$$T_0(t) = S(t)$$

$$(1) \cdots \qquad T_{n+1}(t) = \int_0^t S(t-\xi) B T_n(\xi) \, d\xi$$

De hecho, $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, es la única familia que resuelve

$$(2) \cdots \quad T(t) = S(t) + \int_0^t S(t-\xi) B T(\xi) \, d\xi$$

Corolario: $\| S(t) - T(t) \| \leq M e^{\omega t} \left(e^{M \|B\| t} - 1 \right)$

Pregunta: ¿qué relación tiene $T(t)$ con e^{tB}?
En general, ninguna. Si $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ entonces

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad \text{sólo si} \quad AB = BA.$$

En general, $A, B \in \mathcal{B}(X)$, $e^{t(A+B)} \neq e^{tA} e^{tB}$

$$e^{(t+s)A} = e^{tA} e^{sA}$$

Que la perturbación $B \in \mathcal{B}(X)$ sea acotada es limitante. Para considerar perturbaciones más generales tenemos:

Definición Sean $A, B : X \to Y$, operadores lineales, X, Y de Banach. Se dice que B es relativamente acotado con respecto de A si $D(A) \subset D(B)$ y existen constantes $a, b \geq 0$ tales que

$$(3) \cdots \| Bu \| \leq a \| Au \| + b \|u\|, \quad \forall u \in D(A)$$

Teorema 1 (perturbación relativamente acotada de generadores de semigrupos analíticos)

Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un semigrupo analítico. Si $B : D(B) \subset X \to X$ es cerrado y relativamente acotado con respecto a A, entonces existe $\eta > 0$ tal que si $0 \leq a < \eta$, donde a es la constante en (3) entonces $A+B$ es el generador de un semigrupo analítico.

Demostración Primero supongamos que el semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, generado por A es de tipo $(M, 0)$, es decir, es uniformemente acotado

$$\| S(t) \| \leq M \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Por ser un semigrupo analítico: A es sectorial y

$$\rho(A) \supset \Sigma_{\delta+\pi/2} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| \leq \tfrac{\pi}{2} + \delta \} \setminus \{0\}$$

para cierto $\delta > 0$. Además, sobre $\Sigma_{\delta+\pi/2}$ tenemos

$$(4) \ldots \qquad \| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{|\lambda|} .$$

Por lo tanto, el operador $BR(\lambda,A)$ es acotado $\forall \lambda \in \Sigma_{\delta+\pi/2}$. En efecto, dado que B es relativamente acotado con respecto a A

$$\| BR(\lambda,A) u \| \leq a \| AR(\lambda,A) u \| + b \| R(\lambda,A) u \|$$

(3), $R(\lambda,A) \in D(A)$

$$\leq a \| \lambda R(\lambda,A) - I \| \, \|u\| + b \| R(\lambda,A) \| \, \|u\|$$

(4)

$$\leq a (M+1) \|u\| + b \frac{M}{|\lambda|} \|u\|$$

$$\therefore \quad \| BR(\lambda,A) \| \leq a(M+1) + \frac{bM}{|\lambda|}$$

Escogemos $0 < \eta < \frac{1}{2}(M+1)^{-1}$ de modo que:

para cualquier $|\lambda| > 2bM$ tenemos que si $0 \leq a < \eta$ entonces

$$\| BR(\lambda, A) \| \leq a(1+M) + \frac{bM}{|\lambda|}$$

$$< \eta(1+M) + \frac{1}{2}$$

$$< 1$$

Por lo tanto, el operador $I - BR(\lambda, A)$ es invertible. Además, notamos que

(5).- $(\lambda I - (A+B))^{-1} = R(\lambda, A)(I - BR(\lambda, A))^{-1}$

En efecto,

$$\lambda I - (A+B) = \lambda I - A - BR(\lambda, A)(\lambda I - A)$$

$$= (I - BR(\lambda, A))(\lambda I - A)$$

$\Rightarrow (5)$

concluimos que: para $|\lambda| > 2bM$, $|\arg \lambda| \leq \frac{\pi}{2} + \delta$ y si $0 \leq a < \eta$ entonces existe $\tilde{M} > 0$ tal que

$$\| R(\lambda, A+B) \| \leq \frac{\tilde{M}}{|\lambda|}$$

Esto implica que $A+B$ es sectorial y genera un semigrupo analítico.

En el caso general, A genera un semigrupo de tipo (M, ω), $\|S(t)\| \leq e^{\omega t} M$ $\forall\, t>0$. Por el lema de reescalamiento sabemos que $e^{-\omega t} S(t)$ es un C_0-semigrupo analítico de tipo $(M, 0)$ con generador $A - \omega I$. Como B es relativamente acotado con respecto a A tenemos que

$$\|Bu\| \leq a\|Au\| + b\|u\|$$

$$= a\|(A-\omega I)u + \omega u\| + b\|u\|$$

$$\leq a\|(A-\omega I)u\| + (b + a|\omega|)\|u\|$$

es decir, B es relativamente acotado con respecto a $A - \omega I$.

Por el caso acotado (con $\omega = 0$) tomamos la misma $\eta > 0$, de manera que si $0 \leq a < \eta$ entonces $A - \omega I + B$ es el generador de un semigrupo analítico. Regresándonos con el lema de reescalamiento, concluimos que $A+B$ es el generador de un semigrupo analítico con abcisa en ω (de hecho podemos concluir que $A+B$ es sectorial en el sector $\Sigma_{\omega, \delta + \pi/2}$). $\square$

Si $a=0$ en (3) entonces B es un operador acotado. Tenemos:

Corolario: Sea A generador de un semigrupo analítico. Si B es un operador acotado entonces $A+B$ es el generador de un semigrupo analítico.

Potencias fraccionarias

Sea $A: D(A) \subset X \to X$ el generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, tal que

$$\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda < 0 \} \quad \cdots (1)$$

Es decir, A es sectorial, densamente definido con ángulo $0 < \delta \leq \pi/2$ con

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} = \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| < \frac{\pi}{2} + \delta \} \setminus \{0\}$$
$$\subset \rho(A) \quad \cdots (2)$$

Nota: en el caso general, $\sigma(A) \subset \{ \operatorname{Re} \lambda < \omega \}$ tenemos mismas definiciones y conclusiones gracias al lema de reescalamiento.

Como $\sigma(A) \subset \{ \operatorname{Re} \lambda < 0 \}$ y $\sigma(A)$ es cerrado en $\mathbb{C}$ ($\rho(A)$ es abierto) entonces existe $\xi_0 > 0$ tal que

$$\sigma(A) \subset \{ \mathrm{Re}\,\lambda < -\xi_0 < 0 \} \quad \left(\text{spectral gap}\right)$$

Por las cotas obtenidas para semigrupos analíticos sabemos que

$$(3)\cdots \begin{cases} \|S(t)\| \leq M e^{-\xi_0 t} \\ \|AS(t)\| \leq \dfrac{M_1}{t} e^{-\xi_0 t} & \forall\, t \geq 0 \\ \|A^n S(t)\| \leq \dfrac{M_n}{t^n} e^{-\xi_0 t} \end{cases}$$

Además, $A^n S(t) = \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \forall\, t \geq 0$, lo cual implica que

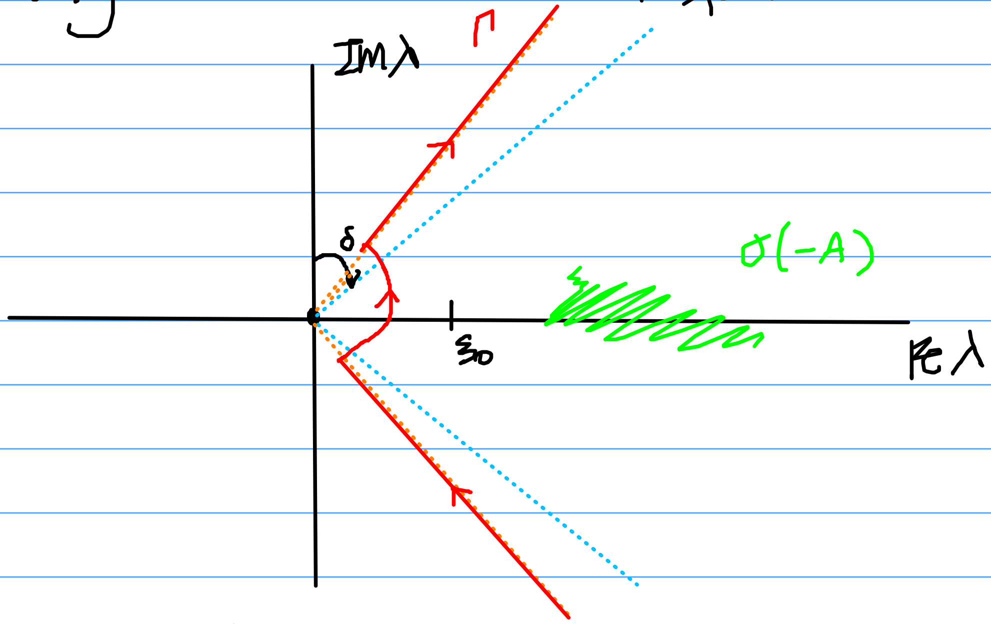
$$\|A^n S(t)\| \leq \frac{M_n}{t^n} e^{-\xi_0 n t} \leq \frac{M_n}{t^n} e^{-\xi_0 t}$$

Definimos, para cualquier fracción $0 < \alpha < 1$:

$$(5)\cdots \quad (-A)^{-\alpha} := -\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \lambda^{-\alpha} R(\lambda, A)\, d\lambda$$

donde Γ es una curva suave por pedazos que conecta $\infty e^{-i\theta}$ con $\infty \cdot e^{i\theta}$

para cualquier $\frac{\pi}{2} - \delta < \theta < \pi$ de manera que $\sigma(-A)$ esté a la derecha de Γ y el origen esté a la izquierda de Γ.



Aquí, $\lambda^{-\alpha}$ denota la rama analítica que toma valores positivos en el eje real positivo.

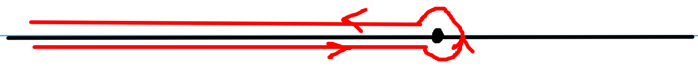
Dado que para $\lambda \in \Sigma_{\delta + \pi/2}$ se tiene

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{C}{|\lambda|}$$

se puede demostrar que la integral en (5) es absolutamente convergente $\forall \alpha > 0$

Ver Pazy : si $\alpha \in n \in \mathbb{N}$ entonces se puede deformar el contorno Γ a un círculo alrededor del origen, usar el teorema del residuo y se verifica que $(-A)^{-n} = (-A^{-1})^{n}$

Si $0<\alpha<1$ se puede deformar Γ a ramas superior e inferior del eje real negativo



El resultado es :

$$(6).- \begin{cases} (-A)^{-\alpha} = \dfrac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \displaystyle\int_0^\infty \lambda^{-\alpha} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda \\ 0<\alpha<1 \end{cases}$$

Ver Pazy.

Por el teorema de FMP sabemos que

$$R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)\, dt$$

sustituyendo en (6)

$$(-A)^{-\alpha} = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \int_0^\infty S(t) \int_0^\infty \lambda^{-\alpha} e^{-\lambda t} d\lambda\, dt$$

$\xi = \lambda t$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \left(\int_0^\infty \xi^{-\alpha} e^{-\xi} d\xi \right) \left(\int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t)\, dt \right)$$

Por la definición de $\Gamma(\cdot)$:

$$\int_0^\infty \xi^{-\alpha} e^{-\xi} d\xi = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)\,\Gamma(\alpha)}$$

Así,

$$(7) \sim \quad (-A)^{-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} S(t)\, dt, \quad 0<\alpha<1$$

<u>Lema</u>. $\exists\ C>0$ tal que $\|(-A)^{-\alpha}\| \leq C$ $\forall\ 0<\alpha<1$.

<u>Dem.</u>

$$\|(-A)^{-\alpha}\| \underset{(7)}{\leq} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} \|S(t)\|\, dt$$

$$\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-\xi_0 t}\, dt$$

$$=: C$$

$\square$

<u>Teorema</u>. Para cualesquiera $\alpha, \beta > 0$ se tiene que

(a) $(-A)^{-\alpha}(-A)^{-\beta} = (-A)^{-(\alpha+\beta)}$

(b) $\lim_{\alpha \to 0} (-A)^{-\alpha} = I$ en la topología fuerte de operadores

<u>Dem.</u> Ejercicio (ver Pazy, Lemas 6.2 y 6.4), Vrabie (lemas 7.6.1, 7.6.4) $\square$

Nota: las fórmulas son válidas $\forall\ \alpha, \beta > 0$.

Nótese que $(-A)^{-\alpha}$ es inyectivo: $(-A)^{-1}$ es inyectivo entonces $(-A)^{-n}$ es inyectivo $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Sea $(-A)^{-\alpha} u = 0$. Tomando $n \geq \alpha$ obtenemos $(-A)^{-n} u = (-A)^{-n+\alpha}((-A)^{-\alpha} u)) = 0$ concluimos que $u=0$.
$\therefore$ $(-A)^{-\alpha}$ es inyectivo.

Definición Suponiendo que A satisface $\Sigma_{\pi/2+\delta} \subset \rho(A)$, para todo $\alpha > 0$ se define

$$(-A)^{\alpha} := ((-A)^{-\alpha})^{-1}$$

para $\alpha = 0$, $(-A)^{0} := I$.

Teorema (propiedades)

(a) $(-A)^{\alpha}$ es cerrado con dominio $D((-A)^{\alpha}) = \mathcal{R}((-A)^{-\alpha})$

(b) Si $\alpha \geq \beta > 0$ entonces

$$D((-A)^{\alpha}) \subset D((-A)^{\beta})$$

(c) $\overline{D((-A)^{\alpha})} = X \quad \forall\ \alpha \geq 0$.

(d) $(-A)^{\alpha+\beta} u = (-A)^{\alpha}(-A)^{\beta} u$
$\forall\, u \in D((-A)^{\gamma})$ $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$.

Dem. Ver Pazy, Teorema 6.8 $\square$

Lema 3 Sea $\alpha>0$. Para cada $u \in D((-A)^{\alpha})$ se tiene que

$$S(t)(-A)^{\alpha}u = (-A)^{\alpha}S(t)u \quad \cdots (8)$$

Mas aún, el operador $(-A)^{\alpha}S(t)$ es acotado con

$$\|(-A)^{\alpha}S(t)\| \leq M_{\alpha}\, t^{-\alpha} e^{-\xi_0 t} \quad \cdots (9)$$

Si además $0<\alpha<1$ y $u \in D((-A)^{\alpha})$ entonces

$$\|S(t)u - u\| \leq C_{\alpha}\, t^{\alpha}\, \|(-A)^{\alpha}u\| \quad \cdots (10)$$

Demostración:

Si $u \in D((-A)^{\alpha}) = \mathcal{R}((-A)^{-\alpha})$ entonces $u = (-A)^{-\alpha}v$, para cierto $v \in X$.
Por lo tanto,

$$S(t)u = S(t)(-A)^{-\alpha}v$$

$$\overset{(7)}{=} \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} \xi^{\alpha-1} S(\xi)S(t)v \, d\xi$$

$$= (-A)^{-\alpha}S(t)v = (-A)^{-\alpha}S(t)(-A)^{\alpha}u$$

Apliando $(-A)^\alpha$ de ambos lados:

$$(-A)^\alpha S(t)u = S(t)(-A)^\alpha u \quad \Rightarrow (8).$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $n-1 < \alpha \leq n$. Entonces

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| = \|(-A)^{\alpha-n}(-A)^n S(t)\|$$

$$= \|(-A)^{-(n-\alpha)}(-A)^n S(t)\|$$

$$\underset{(7)}{\leq} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{n-\alpha-1} \|(-A)^n S(t+\xi)\| \, d\xi$$

$$\leq \frac{M_n}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^\infty \xi^{n-\alpha-1} (t+\xi)^{-n} e^{-\xi_0(t+\xi)} \, d\xi$$

$$\leq \frac{M_n e^{-\xi_0 t}}{\Gamma(n-\alpha) t^\alpha} \underbrace{\int_0^\infty r^{n-\alpha-1} (1+r)^{-n} \, dr}_{\leq C_\alpha}$$

es decir,

$$\|(-A)^\alpha S(t)\| \leq \tilde{M}_\alpha t^{-\alpha} e^{-\xi_0 t} \quad \Rightarrow (9)$$

Finalmente,

$$\|S(t)u - u\| = \left\| \int_0^t A S(\xi) u \, d\xi \right\|$$

$$\underset{(8)}{=} \left\| \int_0^t (-A)^{1-\alpha} S(\xi) (-A)^\alpha u \, d\xi \right\|$$

$$\leq C \int_0^t \xi^{\alpha-1} \| (-A)^\alpha u \| \, d\xi$$

$$\leq C t^\alpha \| (-A)^\alpha u \| \quad \Rightarrow \quad (10)$$

$\square$

<u>Lema 4</u> Sea A el generador de un semigrupo analítico. Supongamos que $B : D(B) \subset X \to X$ es cerrado con $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$ para cierto $\alpha \in (0,1)$, fijo. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

(11) -- $$\|Bu\| \leq C \left(r^\alpha \|u\| + r^{\alpha-1} \|Au\| \right)$$

$\forall\, u \in D(A)$, $\forall\, r > 0$.

Motivación: en aplicaciones, B, perturbación, es un operador diferencial de orden menor al operador diferencial A. Esto se puede interpretar en términos de "fracciones" de A.

<u>Demostración</u>: Si $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$ entonces $B(-A)^{-\alpha}$ está definido en todo X, $D(B(-A)^{-\alpha}) = X$. Por el teorema de la gráfica cerrada (B cerrado) concluimos que $B(-A)^{-\alpha}$ es acotado. Así, existe $C > 0$ tal que

$$\| Bu \| \leq C \, \| (-A)^{+\alpha} u \|$$

Así, para demostrar (11) basta con probar que $\exists$ $C>0$ tal que

$$\| (-A)^{\alpha} u \| \leq C \left(r^{\alpha} \| u \| + r^{\alpha - 1} \| Au \| \right) \quad \dots (12)$$

$\forall$ $u \in D(A)$, $\forall$ $r>0$.

Sabemos que si $0 < \tilde{\alpha} < 1$ entonces por (6)

$$(-A)^{-\tilde{\alpha}} = \frac{\sin(\pi \tilde{\alpha})}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{-\tilde{\alpha}} R(\lambda, A) \, d\lambda$$

Si $u \in D(A)$, $\alpha \in (0,1)$ entonces $0 < \tilde{\alpha} := 1 - \alpha < 1$ y

$$(-A)^{-\tilde{\alpha}} u = (-A)^{\alpha - 1} u$$

$$= \frac{\sin(\pi \alpha)}{\pi} \int_0^{\infty} \lambda^{\alpha - 1} R(\lambda, A) u \, d\lambda$$

El integrando está en $D(A)$, $\forall$ $\lambda > 0$, y además $\lambda^{\alpha-1} A R(\lambda, A) u$ es integrable en $\lambda \in [0, \infty)$. En efecto, cerca de $\lambda = \infty$, $\| A R(\lambda, A) \|$ es uniformemente acotado, y cerca de $\lambda = 0$,
$\| \lambda^{\alpha-1} A R(\lambda, A) u \| \leq \lambda^{\alpha - 2} M \| Au \|$.
Además, si $u \in D((-A)^{\alpha})$ entonces $(-A)^{\alpha-1} u \in D(A)$. Y como A es cerrado:

$$(-A)^{\alpha}u = (-A)\left((-A)^{\alpha-1}u\right)$$

$$= \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\int_0^{\infty}\lambda^{\alpha-1}(-A)R(\lambda,A)u\,d\lambda$$

Así, si $u\in D(A)$ tenemos

$$\|(-A)^{\alpha}u\| \leq \left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_0^{r}\lambda^{\alpha-1}\|AR(\lambda,A)\|\|u\|\,d\lambda$$

$$+\left|\frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi}\right|\int_r^{\infty}\lambda^{\alpha-1}\|R(\lambda,A)\|\,\|Au\|\,d\lambda$$

$$\leq C_{\alpha}\left((1+M)r^{\alpha}\|u\| + CMr^{\alpha-1}\|Au\|\right)$$

$$\Rightarrow (11) \qquad \forall r>0$$

$\square$

→ Kato (1980), "Perturbation theory for linear operators", Springer-Verlag.