Lección 2.12: Potencias fraccionarias (continuación). Estabilidad de semigrupos.

La clase pasada vimos:

Lema 1 Sean $A : D(A) \subset X \to X$, generador de un semigrupo analítico; $B : D(B) \subset X \to X$, cerrado con $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$ para cierto $0 < \alpha < 1$, fijo. Entonces $\exists$ $C > 0$ tal que

$$(1) \cdots \quad \|Bu\| \leq C \left(r^\alpha \|u\| + r^{\alpha - 1} \|Au\| \right)$$

$\forall u \in D(A)$, $\forall r > 0$.

En aplicaciones, uno verifica directamente (1). A veces es más complicado demostrar $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$. Tenemos el siguiente:

Lema 2 $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $B : D(B) \subset X \to X$, cerrado, tal que $D(A) \subset D(B)$. Supongamos que para cierto $\theta \in (0,1)$ y $\forall r \geq r_0 > 0$ se tiene

$$(2) \cdots \quad \|Bu\| \leq C \left(r^\theta \|u\| + r^{\theta - 1} \|Au\| \right)$$

$\forall u \in D(A)$. Entonces $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$ para cualquier $1 \geq \alpha > \theta$.

Demostración: Sea $u \in D((-A)^{\alpha})$ con $1 \geq \alpha > 0$. Esto significa que $(-A)^{-\alpha} u \in D(A) \subset D(B)$.

(Ya que $D((-A)^{1-\alpha}) = R((-A)^{-1+\alpha})$.)
Como B es cerrado, entonces

$$\underbrace{B(-A)^{-\alpha}u}_{\in D(B)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty t^{\alpha-1} BS(t)u \, dt$$

siempre y cuando la integral converja.
Para verificarlo, definimos

$$J_1 u = \int_0^q t^{\alpha-1} BS(t)u \, dt$$

$$J_2 u = \int_q^\infty t^{\alpha-1} BS(t)u \, dt$$

con $q>0$. Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es analítico sabemos que $S(t)u \in D(A) \subset D(B)$, $\forall t>0$.
Escogemos $q = 1/r_0$. También tenemos:

$$(3).- \begin{cases} \|S(t)\| \leq M e^{-\xi_0 t} \\ \|AS(t)\| \leq \dfrac{M_1}{t} e^{-\xi_0 t} \end{cases}$$

para cierto $\xi_0>0$. Usamos (2) con $r=r_0$:

$$\|J_2 u\| \leq \int_{1/r_0}^\infty t^{\alpha-1} \|BS(t)u\| \, dt$$

$$\underset{\substack{(2)\\ r=r_0}}{\leq} C\int_{1/r_0}^\infty t^{\alpha-1}\left(r_0^\theta \|S(t)u\| + r_0^{\theta-1}\|AS(t)u\|\right) dt$$

$$\overset{(3)}{\le} M C r_0^{\theta} \overbrace{\int_{1/r_0}^{\infty} e^{-\xi_0 t}\, t^{\alpha-1}\, dt}^{\le C} \cdot \|u\| \;+$$

$$+ M_1 C r_0^{\theta-1} \underbrace{\int_{1/r_0}^{\infty} e^{-\xi_0 t}\, t^{\alpha-2}\, dt}_{\le C} \cdot \|u\|$$

$$\le \tilde{C} \|u\| .$$

usando (2) con $r = 1/t > r_0$ tenemos

$$\|J_1 u\| \le \int_0^{1/r_0} t^{\alpha-1} \|BS(t)u\|\, dt$$

$$\overset{(2)\; r=1/t}{\le} C \int_0^{1/r_0} t^{\alpha-1} \left(t^{-\theta} \|S(t)u\| + t^{-\theta+1} \|AS(t)u\| \right) dt$$

$$\underset{(3)}{\le} CM \int_0^{1/r_0} t^{\alpha-\theta-1} e^{-\xi_0 t}\, dt \cdot \|u\| \;+$$

$$+ CM_1 \int_0^{1/r_0} t^{\alpha-\theta-1} e^{-\xi_0 t}\, dt \cdot \|u\|$$

como $\alpha > \theta$ obtenemos

$$\|J_1 u\| \le \tilde{C} \|u\| .$$

Asi, $\forall \alpha > \theta$

$$\| B(-A)^{-\alpha} u \| \le C_\alpha \|u\|$$

$$\forall u \in D((-A)^{1-\alpha})$$

como $B(-A)^{-\alpha}$ es cerrado y $D((-A)^{1-\alpha})$ es denso en X, por el teorema de la gráfica cerrada se tiene que $\| B(-A)^{-\alpha} u \| \leq C_\alpha \|u\|$ $\forall u \in X$. Esto implica que $D((-A)^\alpha) \subset D(B)$.

$\square$

Ejemplo: Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dominio abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. En $X = L^2(\Omega)$ consideramos el operador

$$\begin{cases} A = \Delta : D(\Delta) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \\ \qquad \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ \Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u \end{cases}$$

Perturbamos Δ por un operador de transporte:

$$\begin{cases} B : D(B) = H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ Bu = \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \partial_{x_j} u + c(x) u \end{cases}$$

donde $b_j, c \in C(\overline{\Omega})$.

Teorema Δ con datos de Dirichlet genera un semigrupo analítico contractivo en $L^2(\Omega)$. Ver Vrabie, Sect. 7.2.

Sea $\quad C = A + B = \Delta + B$

$D(C) = D(A)$

claramente $\quad D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega) = D(B)$

Vamos a probar (2):

$$\|Bu\|_{L^2(\Omega)} = \left\| \sum_{j=1}^{n} b_j(\cdot)\, \partial_{x_j} u + c(\cdot) u \right\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \|b_j\|_\infty \|u\|_{H^1(\Omega)} + \|c\|_\infty \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq C \|u\|_{H^1(\Omega)}$$

$\forall\, u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$.

Si $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, podemos integrar por partes:

$$\|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq c\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx \right)$$

$$= c\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \int_\Omega u \Delta u\, dx \right)$$

$$\leq C\left(\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

$$\leq C \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{H^2(\Omega)}$$

Se puede probar que $\forall\, u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ $\exists\; C > 0$ tal que

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

Se requiere regularidad elíptica ($\partial\Omega \in C^1$) : si $u \in H_0^1(\Omega) \cap \underbrace{H^2(\Omega)}_{\partial\Omega \in C^1}$ es solución de

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

con $f \in L^2(\Omega)$ entonces

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)}$$
$$= C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

Así,

$$\|Bu\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^{1/2}$$
$$\leq C\left(r^{1/2} \|u\|_{L^2(\Omega)} + r^{-1/2} \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}\right)$$

para cualquier $r > 0$. Por el lema 2 $D((-\Delta)^{\alpha}) \subset D(B) = H_0^1(\Omega)$ $\forall$ $\alpha > 1/2$

De hecho, $D((-\Delta)^{1/2}) = H_0^1(\Omega)$.

2.5 Espectro de semigrupos y sus generadores.

$\longrightarrow$ Estabilidad de semigrupos:

- Engel y Nagel (2000), (2006)
- Kapitula, Promislow (2013), Springer

Idea: en EDOs, si $A \in M_n(\mathbb{C})$, matriz compleja de $n \times n$, A genera un semigrupo uniformemente continuo en $\mathbb{C}^n$, $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$. Tenemos:

Teorema (Lyapunov)

Sea $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$, semigrupo generado por $A \in M_n(\mathbb{C})$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) El semigrupo es "estable", es decir, $\lim\limits_{t \to \infty} \| e^{tA} \| = 0$.

(b) Todos los valores propios de A tienen parte real negativa, $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$.

Objetivo: relacionar el espectro del generador con la estabilidad del semigrupo.

Recordatorio: $A : D(A) \subset X \to X$, operador lineal cerrado ($D(A)$ no es necesariamente denso).

(1) ... $\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ es biyectivo, $(\lambda I - A)^{-1} = R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X) \}$

(2) .. $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ espectro de A

<u>Lema</u> (propiedades básicas)

(i) $\rho(A)$ es abierto en $\mathbb{C}$ y $\forall \mu \in \rho(A)$

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1} \quad \text{.. (3)}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$ tal que $|\mu - \lambda| < \dfrac{1}{\|R(\mu, A)\|}$.

(ii) El mapeo resolvente $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$ es localmente analítico con

$$\frac{d^n}{d\lambda^n} R(\lambda, A) = (-1)^n n! \, R(\lambda, A)^{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(iii) Si $\lambda_n \in \rho(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \hat{\lambda}$ entonces $\hat{\lambda} \in \sigma(A)$ si y sólo si $\lim_{n\to\infty} \| R(\lambda_n, A) \| = \infty$.

<u>Demostración</u>: (i) Sea $\lambda \in \mathbb{C}$; escribimos

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \mu I - A + (\lambda - \mu) I \\ &= \big(I - (\mu-\lambda) R(\mu, A) \big)(\mu I - A). \end{aligned}$$

$\mu \in \rho(A)$. El operador $\lambda I - A$ es invertible si y sólo si $I - (\mu-\lambda) R(\mu, A)$ es invertible. Esto ocurre si

$$|\mu - \lambda| < \frac{1}{\|R(\mu, A)\|}$$

y en ese caso

$$R(\lambda, A) = R(\mu, A)\left(I - (\mu-\lambda) R(\mu, A)\right)^{-1}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

$\Rightarrow$ (i)

(ii) Se deduce inmediatamente de (i).

(iii) Sea $\lambda_n \in \rho(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \hat{\lambda}$

Supongamos que $\hat{\lambda} \in \sigma(A)$. De (i) sabemos que

$$\|R(\mu, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\mu, \sigma(A))}$$

$$\forall \mu \in \rho(A)$$

$$\therefore \quad \|R(\lambda_n, A)\| \geq \frac{1}{\operatorname{dist}(\lambda_n, \sigma(A))} \longrightarrow \infty$$

$\therefore \quad \|R(\lambda_n, A)\| \to \infty$ si $n \to \infty$.

Asumiendo $\lim_{n\to\infty} \| R(\lambda_n, A) \| = \infty$.

Por contradicción: suponemos $\hat{\lambda} = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \in \rho(A)$.

El mapeo resolvente, $\lambda \mapsto R(\lambda, A)$, es continuo en el conjunto compacto $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$. Por lo tanto $\|R(\lambda_n, A)\| \leq C$ acotado (contradicción)

$\square$

Corolario $\sigma(A)$ es cerrado en $\mathbb{C}$.

Observación Si $A : D(A) \subset X \to X$ es acotado, $A \in \mathcal{B}(X)$, entonces

$$\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq \|A\| \}$$

En efecto, la serie

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda}\left(I - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

existe $\forall\ |\lambda| > \|A\|$.

Así, si A es acotado entonces $\sigma(A)$ es compacto en $\mathbb{C}$. Además $\sigma(A) \neq \emptyset$ (ejercicio).

Definición (radio espectral)

$$r(A) := \sup\{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$$
$$= \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n} \quad (\text{si } A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}), \text{ por la serie})$$

Corolario: Si $A \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$ entonces

$$r(A) \leq \|A\|$$

Partición del espectro

(5)... $\sigma_{pt}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ es de Fredholm con $\operatorname{ind}(\lambda I - A) = 0$ y núcleo no trivial $\}$.

(6)... $\sigma_{ess}(A) := \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ no es de Fredholm, o bien, es de Fredholm con $\operatorname{ind}(\lambda I - A) \neq 0 \}$.

A es semi-Fredholm si $\mathcal{R}(A)$ es cerrado y alguno de $\operatorname{nul}(A) = \dim \operatorname{Ker} A$ ó, $\operatorname{def}(A) = \operatorname{codim} \mathcal{R}(A)$, es finito.
A es Fredholm si es semi-Fredholm y $\operatorname{nul}(A) < \infty$, $\operatorname{def}(A) < \infty$. En ambos casos

$$\operatorname{ind}(A) = \operatorname{nul}(A) - \operatorname{def}(A).$$

Claramente: $\sigma_{pt}(A) \subset \sigma(A)$
$\sigma_{ess}(A) \subset \sigma(A)$

Como A es cerrado,

$$\sigma(A) \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ cerrado} \\ \subset}}{=} \sigma_{ess}(A) \cup \sigma_{pt}(A)$$

(Kato, pág. 167)

$$\sigma_{ess}(A) \cap \sigma_{pt}(A) = \phi \quad \text{(definición)}$$

Partición de Weyl.

Engel y Nagel (2000):

Espectro aproximado

(7)... $\sigma_{app}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ no es inyectivo, o bien, $R(\lambda I - A)$ no es cerrado $\}$

Espectro puntual extendido:

(8)... $\sigma_{ept}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - A$ no es inyectivo $\}$

Claramente $\sigma_{pt}(A) \subset \sigma_{ept}(A) \subset \sigma_{app}(A)$

Espectro residual

(9)... $\sigma_{res}(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} : R(\lambda I - A)$ no es denso en $\mathfrak{X} \}$

Lema $\lambda \in \sigma_{app}(A)$ si y sólo si existe $u_n \in D(A)$ con $\|u_n\| = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$ tal que $\|(\lambda I - A) u_n\| \to 0$ si $n \to \infty$.

Dem. Engel, Nagel (2000), pág 160, lema 1.9 $\square$

$\lambda \in \sigma_{pt}(A) \Rightarrow \exists\ u \in Ker(\lambda I - A),\ u \neq 0$ tal que $\lambda u = Au$

$\therefore\ u_n \equiv \dfrac{u}{\|u\|}$.

$\lambda \in \sigma_{app}(A)$.

$\sigma_{pt}(A)$ es importante pues contiene a valores propios aislados con multiplicidad algebraica finita.

$\sigma_{ess}(A)$ es fácil de calcular (en el caso de operadores diferenciales).

Definición (cota espectral)

Sea $A : D(A) \subset X \to X$, lineal cerrado, se define la cota espectral como

$$s(A) := \sup \{ Re\, \lambda : \lambda \in \sigma(A) \}$$

Recordemos: si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0-semigrupo, entonces

$$\omega_0(S(t)) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists\, M_\omega \geq 1 \text{ tal que } \|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t} \ \forall t \geq 0 \}$$

"cota de crecimiento"

Notación: $\omega_0(S(t)) = \omega_0(A)$ con A generador.

Lema Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces,

(10) -- $$-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| = \frac{1}{t_0} \log(r(S(t_0))) < \infty$$

para cualquier $t_0 > 0$. En particular el radio espectral de $S(t)$ está dado por

$$r(S(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t \geq 0.$$

Lema auxiliar: Sea $\psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ una función acotada en compactos de $\mathbb{R}_+$ y subaditiva, es decir,

$$\psi(s+t) \leq \psi(s) + \psi(t), \quad \forall\ s,t \geq 0$$

Entonces,

$$\inf_{t>0} \frac{\psi(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t}.$$

Dem. Sea $t_0 > 0$, fijo.
Escribimos $t = kt_0 + s$
$s \in [0, t_0)$, $k \in \mathbb{N}$. Por subaditividad

$$\frac{\psi(t)}{t} = \frac{\psi(kt_0 + s)}{kt_0 + s}$$

$$\leq \frac{\psi(kt_0) + \psi(s)}{kt_0}$$

$$\leq \frac{\psi(kt_0)}{t_0} + \frac{\psi(0)}{kt_0}$$

Claramente, si $t \to \infty$ entonces $k \to \infty$.
Así,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} \leq \frac{\psi(t_0)}{t_0} \quad \forall\ t_0 > 0 \text{ fijo.}$$

De este modo,

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t} \leq \inf_{t>0} \frac{\psi(t)}{t} \leq \liminf_{t\to\infty} \frac{\psi(t)}{t}$$

$\square$

Demostración:

Definimos $t \mapsto \psi(t) := \log \|S(t)\|$.

ψ acotada en compactos de $\mathbb{R}_+$ y subaditiva.

Definimos:

$$\theta := \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\| \underset{\text{lema aux}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$$

Por lo tanto,

$$e^{\theta t} \leq \|S(t)\| \quad \forall\, t \geq 0.$$

Por definición, obtenemos

$$\theta \leq \omega_0$$

Ahora, sea $\omega > \theta$. Entonces existe $t_0 > 0$ tal que

$$\frac{1}{t} \log \|S(t)\| \leq \omega \qquad \forall\, t \geq t_0$$

Es decir, $\|S(t)\| \leq e^{\omega t} \quad \forall\, t \geq t_0$.

En $[0, t_0]$ la norma de $\|S(t)\|$ está acotada. Así, $\exists\, \tilde{M} \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq \tilde{M} \qquad \forall\ t \in [0, t_0]$$

$$\Rightarrow \qquad \|S(t)\| \leq \begin{cases} e^{\omega t}, & t \geq t_0 \\ \tilde{M}, & t \in [0, t_0] \end{cases}$$

$\therefore\ \exists\ M \geq 1$ tal que

$$\|S(t)\| \leq M e^{\omega t} \qquad \forall\ t \geq 0.$$

Por definición, $\omega_0 \leq \omega$. $\forall\ \omega > \theta$.

concluimos que $\omega_0 = \theta$.

Falta probar que

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0} \log\left(r\left(S(t_0)\right)\right)$$

Usando la fórmula del radio espectral para operadores acotados:

$$r(S(t)) = \lim_{n \to \infty} \|S(nt)\|^{1/n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \exp\left(t \, \frac{\log \|S(nt)\|}{nt} \right)$$

$$= \exp\left(t \lim_{n \to \infty} \frac{\log \|S(nt)\|}{nt} \right)$$

$$= e^{\omega_0 t}$$

La desigualdad $s(A) \leq \omega_0$ es consecuencia de FMP: si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es de tipo (M, ω) entonces $\forall$ $\mathrm{Re}\lambda > \omega$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$.

$$\Rightarrow \quad s(A) \leq \omega_0$$

$\square$