Lección 2.13: Estabilidad de semigrupos. Teorema de Gearhart-Prüss. Problema abstracto de Cauchy homogéneo.

$A: D(A) \subset X \to X$ generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Tenemos las siguientes definiciones:

(1)... $\omega_0(A) = \inf \{ \omega \in \mathbb{R} : \exists\, M_\omega \geq 1$ tal que $\|S(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}, \ \forall t \geq 0 \}$

"cota de crecimiento"

(2)... $s(A) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A) \}$ "cota espectral"

(3)... $r(A) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in \sigma(A) \}$ "radio espectral"

$= \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}$ (si A es acotado)

<u>Lema</u> $-\infty \leq s(A) \leq \omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$

$= \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$

<u>Corolario</u> $r(S(t)) = e^{\omega_0 t} \quad \forall t > 0$

<u>Corolario</u> Si $\omega_0 = -\infty$ entonces $r(S(t)) = 0$ $\forall t > 0$.

Ejemplo: si $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es nil-potente.

Observación Puede ocurrir que $\omega_0 > s(A)$.

Ejemplo: Sea

$$X = C_0(\mathbb{R}_+) \cap L^1(\mathbb{R}_+; e^x dx)$$

$u \in X$ si y sólo si $u \in C(\mathbb{R}_+)$ con $\lim_{x \to +\infty} u(x) = 0$; y además u es integrable en $\mathbb{R}_+$ con la medida $e^x dx$:

$$\|u\|_1 = \int_0^\infty e^x |u(x)| \, dx < \infty$$

La norma en X es:

$$\|u\|_X := \|u\|_\infty + \|u\|_1$$
$$= \sup_{x \in \mathbb{R}_+} |u(x)| + \int_0^\infty e^x |u(x)| \, dx$$

$(X, \|\cdot\|_X)$ es un espacio de Banach (ejercicio).

Sea el operador:

$$(4)\ldots \begin{cases} Au = \dfrac{du}{dx} \\ D(A) := \left\{ u \in X : \begin{array}{l} u \in C^1(\mathbb{R}_+) \\ du/dx \in X \end{array} \right\} \end{cases}$$

A es el generador del semigrupo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$

de traslaciones izquierdas, $(S(t)u)(x) = u(x+t)$, $\forall\, t \geq 0$. Por lo tanto, $\|S(t)\| = 1$, $\forall\, t > 0$. Por lo tanto,

$$s(A) \leq \omega_0 = 0.$$

Sea $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re} \lambda < -1$, tomamos $X \ni u_\lambda(x) = e^{\lambda x}$. Claramente $\frac{du_\lambda}{dx} = \lambda e^{\lambda x} \in X$.

$$\therefore \quad u_\lambda \in D(A)$$

Además, $\quad A u_\lambda = \lambda u_\lambda \quad \therefore \quad s(A) \geq -1.$

Para $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > -1$, y $\forall\, u \in X$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|S(t)u\|_1 &= \int_0^\infty |(S(t)u)(x)|\, e^x \, dx \\
&= \int_0^\infty |u(x+t)|\, e^x \, dx \\
&= \int_t^\infty |u(\xi)|\, e^\xi e^{-t} \, d\xi \\
&\leq e^{-t} \int_0^\infty |u(\xi)|\, e^\xi \, d\xi \\
&= e^{-t} \|u\|_1
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{t \to \infty} \left\| \int_0^t e^{-\lambda \tilde{t}} S(\tilde{t}) u \, d\tilde{t} \right\|_1$$

$$\leq \lim_{t\to\infty} \int_0^t |e^{-\lambda\tilde{t}}| \, e^{-\tilde{t}} \|u\|_1 \, d\tilde{t}$$

$$\leq \left(\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-(\operatorname{Re}\lambda+1)\tilde{t}} \, d\tilde{t} \right) \|u\|_1$$

$$\leq C \, \|u\|_1 \qquad \text{ya que} \qquad \operatorname{Re}\lambda > -1.$$

Análogamente, dado que $\int_0^\infty e^x |u(x)| \, dx < \infty$ es posible verificar que

$$\lim_{t\to\infty} \left\| \int_0^t e^{-\lambda\tilde{t}} S(\tilde{t}) u \, d\tilde{t} \right\|_\infty \quad \text{existe} \quad \forall u \in X$$

Así, $\forall u \in X$

$$\exists \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t) u \, dt = (\lambda I - A)^{-1} u$$

Esto implica que $\lambda \in \rho(A)$. Por lo tanto,

$$\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq -1 \}$$

Así,

$$s(A) = -1 < \omega_0 = 0.$$

Además, $\quad r(S(t)) = e^{\omega_0 t} = 1 \quad \forall\, t > 0.$

Esto implica, en particular, $\exists\, \mu \in \sigma(S(t))$ tal que

$$\mu \notin e^{t\sigma(A)} = \{ e^{\lambda t} : \lambda \in \sigma(A) \}$$

Definición Se dice que el C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, con generador infinitesimal $A : D(A) \subset X \to X$, satisface la propiedad del mapeo espectral (PME) si

$$(5) \ldots \quad \sigma(S(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)} \quad \forall t \geq 0$$

Se dice que satisface la propiedad del mapeo espectral débil (PMEd) si

$$(6) \ldots \quad \sigma(S(t)) \setminus \{0\} = \overline{e^{t\sigma(A)}} \setminus \{0\}, \quad \forall t \geq 0$$

En el contraejemplo se vió que $s(A) < \omega_0$.

Proposición Para todo C_0-semigrupo se tiene que:

$$(PME) \Rightarrow (PMEd) \Rightarrow s(A) = \omega_0.$$

Demostración: Ejercicio. Ver Engel-Nagel (2006). $\square$

¿Cuándo falla esta propiedad?

Lema 1 Sea $A : D(A) \subset X \to X$, generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces

$$(7) \ldots \quad e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(S(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Demostración Para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$, por el lema de reescalamiento:

$$\{\tilde{S}(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{-\lambda t} S(t)\}_{t \geq 0}$$

es un C_0-semigrupo, con generador $\tilde{A} = A - \lambda I$, $D(\tilde{A}) = D(A)$.

Así, por propiedades elementales:

$$\tilde{S}(t)u - u = \begin{cases} \tilde{A} \int_0^t \tilde{S}(\xi) u \, d\xi & \forall u \in X \\ = \int_0^t \tilde{S}(\xi) \tilde{A} u \, d\xi & \text{si } u \in D(\tilde{A}) \end{cases}$$

Entonces, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$:

$$(8) \cdots \quad e^{\lambda t} u - S(t) u = \begin{cases} (\lambda I - A) \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} S(\xi) u \, d\xi & \forall u \in X \\ \int_0^t e^{\lambda(t-\xi)} S(\xi)(\lambda I - A) u \, d\xi & \text{si } u \in D(A) \end{cases}$$

Notamos que si $\lambda \in \sigma_{pt}(A)$ entonces existe $u \in D(A)$ tal que $Au = \lambda u$. De (8) obtenemos que $e^{\lambda t} \in \sigma_{pt}(S(t))$. Así,

$$e^{t \sigma_{pt}(A)} \subset \sigma_{pt}(S(t)).$$

De hecho, si $\lambda I - A$ no es inyectivo
$\Rightarrow$ $e^{\lambda t} - S(t)$ no es inyectivo,
es decir,
$$e^{t\sigma_{ept}(A)} \subset \sigma_{ept}(S(t)).$$

Tomando $\lambda \in \sigma_{res}(A)$, tenemos que $\mathcal{R}(\lambda I - A)$ <u>no</u> es denso en X. De (8) es claro que

$$\mathcal{R}(e^{\lambda t} I - S(t)) \subset \mathcal{R}(\lambda I - A)$$

$$\therefore \quad \mathcal{R}(e^{\lambda t} I - S(t)) \text{ no es denso en } X$$

$$\therefore \quad e^{t\sigma_{res}(A)} \subset \sigma_{res}(S(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\lambda \in \sigma_{app}(A)$ entonces existe $u_n \in D(A)$ tal que $\|u_n\| = 1$ y $(\lambda I - A)u_n \to 0$ si $n \to \infty$. Por (8) tenemos

$$\|(e^{\lambda t} - S(t))u_n\| \leq \int_0^t |e^{\lambda(t-s)}| \, \|S(s)\| \, \|(\lambda I - A)u_n\| \, ds$$

$$\leq C_t \|(\lambda I - A)u_n\| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty$$

$\forall t \geq 0$ <u>fijo</u>.

$$\therefore \quad e^{\lambda t} \in \sigma_{app}(S(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

$$\therefore \quad e^{t\sigma_{app}(A)} \subset \sigma_{app}(S(t)). \quad \forall t \geq 0.$$

$$\sigma = \sigma_{ept} \cup \sigma_{res} \cup \sigma_{app} = \sigma_{pt} \cup \sigma_{ess}$$

$\sigma_{pt} \cap \sigma_{ess} = \phi$

$$\therefore \quad e^{t\sigma_{ess}(A)} \subset \sigma_{ess}(S(t)) \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Concluimos que

$$e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(S(t)) \qquad \forall\, t \geq 0$$

$\square$

<u>Teorema</u> Sea $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un C_0-semigrupo. Si el semigrupo es analítico (A sectorial), o bien si es uniformemente continuo (A acotado), entonces éste satisface la propiedad del mapeo espectral

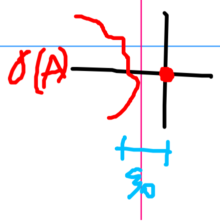
$$\sigma(S(t)) \setminus \{0\} = e^{t\sigma(A)}, \quad \forall\, t \geq 0.$$

<u>Dem.</u> Ver Engel, Nagel (2006), corolario 2.10. $\square$

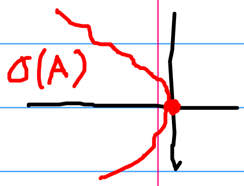
<u>Definición</u> Un semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se denomina:

(a) uniformemente exponencialmente estable (UEE) si existe $\eta > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} e^{\eta t} \|S(t)\| = 0$$



(b) uniformemente estable (UE) si



$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)\| = 0$$

(c) fuertemente estable (FE) si

$$\lim_{t\to\infty} \|S(t)u\| = 0 \qquad \forall\, u \in X.$$

(d) débilmente estable (DE) si

$$\lim_{t\to\infty} \langle l, S(t)u \rangle = 0, \qquad \forall\, u \in X, \ \forall\, l \in X^*.$$

Lema 2 Sea $\{S(t)\}$ un C_0-semigrupo. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes :

(i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es (UEE)
(ii) " " (UE)
(iii) $\exists\ \eta > 0$ tal que

$$\lim_{t\to\infty} e^{\eta t} \|S(t)u\| = 0 \qquad \forall\, u \in X.$$

Demostración : Claramente

$$(UEE) \Rightarrow \begin{cases} (UE) \\ (FE) \end{cases}$$

Basta con demostrar que $(ii) \Rightarrow (i)$
$(iii) \Rightarrow (i)$

$(ii) \Rightarrow (i)$: para un C_0-semigrupo

$$e^{\omega_0 t} = r(S(t)) \leq \|S(t)\| \quad \forall\ t \geq 0$$

Por lo tanto, si el semigrupo es (UE), $\|S(t)\| \to 0$ si $t \to \infty$, lo cual implica necesariamente que $\omega_0 < 0$. Esto implica (i).

$(iii) \Rightarrow (i)$: Suponiendo $\exists\ \eta > 0$ tal que $e^{\eta t} \|S(t)u\| \to 0$ si $t \to \infty$, $\forall\ u \in X$.
Esto implica que el semigrupo $\{\tilde{S}(t)\} = \{e^{\eta t} S(t)\}$ es uniformemente acotado.

Por lo tanto existe $0 < \hat{\eta} = \frac{1}{2}\eta$ tal que

$$0 \leq \lim_{t \to \infty} e^{\frac{1}{2}\eta t} \|S(t)\| = \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{1}{2}\eta t} \underbrace{\|e^{t\eta} S(t)\|}_{\|\tilde{S}(t)\| \leq C}$$

$$\leq C \lim_{t \to \infty} e^{-\frac{1}{2}\eta t} = 0.$$

$\square$

<u>Lema 3</u> Sea un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\omega_0 < 0$, es decir, el semigrupo es (UEE)

(b) $\lim_{t\to\infty} \|S(t)\| = 0$

(c) $\|S(t_0)\| < 1$ para algún $t_0 > 0$.

(d) $r(S(t_1)) < 1$ para algún $t_1 > 0$.

Dem Es consecuencia inmediata de la fórmula

$$0 > \omega_0 = \inf_{t>0} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$$

$$= \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|S(t)\|$$

$$= \frac{1}{t_0} \log r(S(t_0)) \quad \text{para cualquier } t_0 > 0.$$

$\square$

Observación En aplicaciones uno posee información sobre el generador A (con suerte, sobre $R(\lambda, A)$), pero difícilmente con la forma explícita de $S(t)$.

Teorema (Gearhart, Prüss)

Un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}$, en un espacio de Hilbert H, con generador $A: D(A) \subset H \to H$ es (UEE) si y sólo si $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda > 0\} \subset \rho(A)$ y

$$(9) \ldots \quad \sup_{\operatorname{Re}\lambda > 0} \| R(\lambda, A) \| =: M < \infty .$$

Dem. Ver Engel-Nagel (2000). $\square$

Notas: La cota (9) es importante (hay contraejemplos). El teorema con esta generalidad no se cumple si el espacio no es de Hilbert.

2.6 El problema abstracto de Cauchy.

Sea X un espacio de Banach.
Sea $A: D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal. Sea $u_0 \in X$, dado. El problema abstracto de Cauchy para el operador A consiste en: hallar la solución $u = u(t)$ a

$$(1) \ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t), & T \geq t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$T > 0$

Aquí $f:[0,T]\longrightarrow X$ es una función conocida (forzamiento) y hallar la solución a (1) significa:

- $[0,T]\ni t\longmapsto u(t)\in X$ es continuo $\qquad T>0$, dado
- $t\longmapsto u(t)$ es diferenciable $\forall\, t>0$
- $u(t)\in D(A)\quad \forall\, t>0$.

De estas consideraciones, queda claro que

No $\nexists$ solución de (1) si $u_0\notin \overline{D(A)}$.

En efecto, como caso particular tomamos $f\equiv 0$; $u(t)\in D(A)$ continua en $t\in[0,T]$ si hay solución

$$\lim_{t\to 0^+} \underbrace{u(t)}_{\in D(A)} = u_0 \in \overline{D(A)}.$$

Examinemos primero el problema de Cauchy homogéneo:

$$(2)\dots\quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Por lo visto hasta el momento, si $A: D(A) \subset X \to X$ es el generador de un C_0-semigrupo entonces el problema (2) tiene solución:

$$\forall u_0 \in X = \overline{D(A)} \quad (A \text{ generador})$$

$$u(t) := S(t)u_0 \in D(A)$$

y resuelve $\dfrac{du}{dt} = A\,S(t)u_0 = Au \quad \forall\, t>0.$

($S(t)u_0$ es diferenciable en $t>0$, $\forall u_0 \in X$)

Además, es la única solución (ejercicio).

Sin embargo, la unicidad de la solución a (2) se puede garantizar con menos hipótesis.

Lema 1 Sea $t \mapsto u(t) \in X$, continua y Bochner integrable en $[0,T]$, $T>0$. Si existe $M>0$ tal que

$$(3)\ldots \quad \left\| \int_0^T e^{nt} u(t)\,dt \right\| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

entonces $u(t) \equiv 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$.

Demostración Sea $\ell \in X^*$, arbitrario.
Definimos

$$\varphi(t) := \langle \ell, u(t) \rangle$$

$\therefore$ φ es continua en $[0,T]$. Además,

$$\left| \int_0^T e^{nt} \varphi(t)\, dt \right| = \left| \int_0^T e^{nt} \langle \ell, u(t) \rangle\, dt \right|$$

$$= \left| \langle \ell, \int_0^T e^{nt} u(t)\, dt \rangle \right|$$

u(t) Bochner int. continua

$$\leq \|\ell\| M = M_\ell > 0 \quad \text{uniforme.}$$

(3)

Por demostrar: $\varphi(t) \equiv 0$ en $[0,T]$.
Como $\ell \in X^*$ es arbitrario, esto implica que $X \ni u(t) \equiv 0 \quad \forall\, t \in [0,T]$.

La serie,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{knt} = 1 - \exp(-e^{nt})$$

converge uniformemente en compactos de $t \in \mathbb{R}$. Así,

$$\left| \int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k!} e^{kn(t-T+\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi \right|$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} e^{kn(t-T)} \left| \int_0^T e^{kn\xi} \varphi(\xi)\, d\xi \right|$$

$$\leq M_\ell \exp\left(e^{n(t-T)} - 1 \right)$$

para $t<T$ el lado derecho tiende a 0 si $n\to\infty$.

Por otro lado,

$$\int_0^T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} e^{kn(t-T+\xi)} \varphi(\xi)\, d\xi$$

$$= \int_0^T \left(1-\exp\left(e^{-n(t-T+\xi)}\right)\right) \varphi(\xi)\, d\xi$$

Por convergencia dominada, el límite del lado derecho cuando $n\to\infty$ tiende a

$$\int_{T-t}^{T} \varphi(\xi)\, d\xi$$

Por lo tanto, $\forall$ $0\le t<T$ tenemos que

$$\int_{T-t}^{T} \varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

Esto implica que $\varphi(\xi)=0$ $\forall$ $\xi\in[0,T]$

$\square$

<u>Lema 2</u> Sea $A: D(A)\subset X\to X$, densamente definido. Si $R(\lambda,A)$ existe $\forall$ $\lambda\ge\lambda_0$ real, y además

$$\limsup_{\lambda\to\infty} \frac{\log\|R(\lambda,A)\|}{\lambda} = 0$$

entonces el problema de Cauchy homogéneo (2) tiene, a lo más, una solución $\forall\, u_0 \in \underline{X}$.

<u>Dem.</u> Ver Pazy, Teorema IV-1.2 $\square$

Entonces:

- no es necesario suponer que A genera un C_0-semigrupo para concluir unicidad (Lema 1,2)
- también es posible obtener existencia de la solución a (2) para $u_0 \in D$, con $\overline{D} = \underline{X}$

Sin embargo, para garantizar existencia y unicidad, y diferenciabilidad $\forall\, t \in (0,\infty)$ es necesario que A sea el generador de un C_0-semigrupo.

(Próxima clase.)