Lección 2.14: Problema abstracto de Cauchy homogéneo. Soluciones "mild".

X de Banach. $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ operador lineal. Consideremos el problema abstracto de Cauchy homogéneo:

$$(1) \dots \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde $t \geq 0$ representa el tiempo y $u_0 \in X$ es la condición inicial (conocida).

Definición Resolver (1) significa hallar un mapeo $t \mapsto u(t) \in X$, $t \in [0, T]$, $T > 0$, tal que $u(t) \in D(A)$ $\forall\, t > 0$, $t \mapsto u(t)$ es continuamente diferenciable $\forall\, t \geq 0$ y satisface (1).

Por ejemplo, si A es el generador de un C_0-semigrupo entonces sabemos que:

- $t \mapsto S(t)u_0$ es diferenciable $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, u_0 \in D(A)$
- $S(t)u_0 \in D(A)$ $\forall\, t \geq 0$, $\forall\, u_0 \in D(A)$
- $\dfrac{d}{dt}\big(S(t)u_0\big) = AS(t)u_0$, $\forall\, t > 0$, $\forall\, u_0 \in D(A)$

<u>Proposición</u> Sea $A : D(A) \subset \underline{X} \to \underline{X}$ el generador de un C_0-semigrupo. Entonces para cualquier $u_0 \in D(A)$, el mapeo órbita

$$(2) \cdots \begin{cases} t \longmapsto \bar{u}(t) \\ \bar{u}(t) = S(t)\, u_0 \end{cases}$$

es solución clásica del problema de Cauchy (1).

<u>Corolario</u> La solución clásica existe si y sólo si $u_0 \in D(A)$.

Esto se deduce directamente de la definición de $D(A)$.

Para cualquier $u_0 \in \underline{X}$, un requisito para la existencia de una solución clásica es que $u_0 \in \overline{D(A)}$. Por ende, es útil extender el concepto de solución.

<u>Definición</u> Una función continua $u : [0,\infty) \longrightarrow \underline{X}$ se denomina solución "mild" del problema de Cauchy homogéneo (1) si

$$\text{(i)} \quad \int_0^t u(\xi)\, d\xi \in D(A) \qquad \forall\, t \geq 0$$

$$\text{(ii)} \quad u(t) = A \int_0^t u(\xi)\, d\xi + u_0, \qquad \forall\, t \geq 0$$

Lema Sea $A: D(A) \subset X \to X$ el generador de un C_0-semigrupo. Entonces para cualquier condición inicial $u_0 \in X$, el mapeo órbita (2) es la única solución "mild" al problema de Cauchy homogéneo (1).

Demostración: Por propiedades de semigrupos sabemos que $\forall u_0 \in X$, el mapeo

$$t \mapsto \int_0^t S(\xi) u_0 \, d\xi$$

es diferenciable en $t \in [0, \infty)$. Por lo tanto,

$$\int_0^t S(\xi) u_0 \, d\xi \in D(A) \quad \forall\, t \geq 0$$

Esto verifica (i). Además,

$$A \underbrace{\int_0^t S(\xi) u_0 \, d\xi}_{\in D(A)} \underset{\text{lema anterior}}{=} S(t) u_0 - u_0$$

es decir,

$$S(t) u_0 = A \int_0^t S(\xi) u_0 \, d\xi + u_0$$

Esto verifica (ii). Así, $u(t) = S(t) u_0$ es solución "mild" de (1).

Para probar la unicidad, sean $u_1, u_2 : [0, \infty) \to X$ dos soluciones "mild" de (1) con la misma condición inicial $u_0 \in X$.

Entonces $v := u_1 - u_2 : [0,\infty) \to X$ es solución "mild" del problema homogéneo con condición inicial $v(0) = 0$:

- $\displaystyle\int_0^t v(\xi)\, d\xi \in D(A) \quad \forall t \geq 0$
- $\displaystyle v(t) = A \int_0^t v(\xi)\, d\xi$

Entonces, para cada $\xi \in (0,t)$ tenemos

$$\frac{d}{d\xi}\left(S(t-\xi) \int_0^{\xi} v(\tau)\, d\tau \right) = - S(t-\xi) A \int_0^{\xi} v(\tau)\, d\tau + S(t-\xi) v(\xi)$$

$$= - S(t-\xi) v(\xi) + S(t-\xi) v(\xi)$$

$$= 0$$

Integrando en $\xi \in (0,t)$ obtenemos

$$\int_0^t v(\tau)\, d\tau = 0 , \quad \forall t > 0$$

Por ende, $v(t) \equiv 0 \quad \forall t \geq 0.$ $\square$

Pareciera que cualquier solución de (1) está asociada al generador de un semigrupo. Esto no es cierto.

Contraejemplo: Sea X de Banach, y $B : D(B) \subset X \longrightarrow X$ un operador no acotado. En el espacio $X \times X$ consideremos el siguiente operador:

$$(3) \cdots \begin{cases} A : D(A) \subset X \times X \longrightarrow X \times X \\ D(A) := X \times D(B) \\ A := \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Para cualquier $(u_0, v_0) \in D(A)$ ($u_0 \in X$, $v_0 \in D(B)$) el mapeo

$$t \mapsto (u(t), v(t)) := (u_0 + t\, B v_0, v_0) \in X \times D(B) = D(A)$$

es solución clásica del problema de Cauchy asociado al operador A en $X \times X$.

En efecto, $(u(t), v(t)) \in D(A)$ $\forall t \geq 0$, $(u(0), v(0)) = (u_0, v_0)$ y

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B v_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$$

Sin embargo, A no es generador de un C_0-semigrupo en $X \times X$. En efecto, para cualquier $\lambda \in \mathbb{C}$ se tiene que

$$(\lambda I - A) D(A) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda u - Bv \\ \lambda v \end{pmatrix} : u \in X,\ v \in D(B) \right\}$$

$$\subset X \times D(B) \neq X \times X$$

Es decir, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I - A$ no es suprayectivo $\therefore \lambda \notin \rho(A)$. Es decir, $\sigma(A) = \mathbb{C}$.

Este contraejemplo nos indica que es menester añadir algunas propiedades a las soluciones de (1) para poder caracterizarlas como órbitas asociadas a semigrupos.

La siguiente es una condición de $\exists!$:

$(*) \cdots \left\{ \text{Para cada } u_0 \in D(A) \text{ existe una única solución clásica al problema homogéneo de Cauchy (1), que denotamos por } \bar{u}(t, u_0) \right.$

A $(*)$ hay que añadir, ya sea $\rho(A) \neq \emptyset$ o una noción de continuidad.

Teorema Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal cerrado. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A genera un C_0-semigrupo

(b) A satisface (*) y, además, $\rho(A) \neq \emptyset$.

(c) A satisface (*), $D(A)$ es denso en X, y para cada sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A)$ tal que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \bar{u}(t, u_n) = 0$$

uniformemente en compactos de t, $[0, t_0]$, donde $\bar{u}(t, u_0)$ denota (por (*)) la única solución clásica de (1) con condición inicial $u_0 \in D(A)$.

Definición El problema abstracto de Cauchy homogéneo está bien planteado (con operador cerrado A), si se cumple la propiedad (c) del teorema anterior.

Nótese que (c) $\Leftrightarrow$
- $\exists$ solución
- unicidad
- depende continuamente de los datos iniciales.

Demostración del teorema:

(a) ⇒ (b): Se deduce directamente del lema anterior ($S(t)u_0$ es solución clásica de (1) y es única (ejercicio: por unicidad de solución "mild"). Además, $\rho(A) \neq \emptyset$ por Feller-Miyadera-Phillips.

(a) ⇒ (c): Se deduce de las propiedades de semigrupos y sus generadores: existe una única solución clásica $S(t)u_0$, $D(A)$ es denso, y claramente

$$\|S(t)u_n\| \leq M \left(\sup_{[0,t_0]} e^{\omega t}\right) \|u_n\| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

$S(t)u_n \to 0$ uniformemente en compactos $[0,t_0]$.

(b) ⇒ (c) Primero probaremos que $\forall u_0 \in X$ exista una única solución "mild" de (1). Por hipótesis de (b), A satisface (*) y $\rho(A) \neq \emptyset$. Por lo tanto, para cada

$$v_0 := R(\lambda, A)u_0 \in D(A), \quad \lambda \in \rho(A)$$

existe una única solución clásica de (1) con condición inicial $v_0 \in D(A)$. La denotamos por $u(t, v_0)$.

Entonces, $v(t) := (\lambda I - A)u(t, v_0)$ es una solución "mild" al problema de Cauchy

homogéneo pero con condición inicial
$v(0) = u_0 \in X$.

En efecto, por (b) sabemos que (*) se cumple, $u(t, v_0)$ es la solución clásica con condición inicial v_0. Por lo tanto, $u(t, v_0) \in D(A)$ $\forall\, t \geq 0$ y así $v(t) = (\lambda I - A)\, u(t, v_0)$ está bien definida.

Además, claramente

$$v(0) = (\lambda I - A)\, u(0, v_0) = (\lambda I - A)\, v_0$$
$$= (\lambda I - A)\, R(\lambda, A)\, u_0$$
$$= u_0$$

Por definición,

$$\int_0^t v(\xi)\, d\xi = \lambda \int_0^t \underbrace{u(\xi, v_0)}_{\in D(A)}\, d\xi - A \int_0^t u(\xi, v_0)\, d\xi$$

Pero,

$$A \int_0^t u(\xi, v_0)\, d\xi = \int_0^t A u(\xi, v_0)\, d\xi$$
$$= \int_0^t \frac{du}{d\xi}(\xi, v_0)\, d\xi$$
$$= u(t, v_0) - v_0 \in D(A)$$

$$\Rightarrow \int_0^t v(\xi)\, d\xi \in D(A) \qquad \text{(prop. (i))}.$$

Asimismo,

$$A\int_0^t v(\xi)\,d\xi = \lambda A\int_0^t u(\xi,v_0)\,d\xi - Au(t,v_0) + Av_0$$

$$= \lambda u(t,v_0) - \lambda v_0 - Au(t,v_0) +$$

$$+ A R(\lambda,A) u_0$$

$$= (\lambda I - A) u(t,v_0) - \lambda v_0 +$$

$$+ (A-\lambda I) R(\lambda,A) u_0 + \lambda v_0$$

$$= v(t) - u_0$$

$$\Rightarrow \quad v(t) = A\int_0^t v(\xi)\,d\xi + u_0 \qquad (\text{prop. (ii)})$$

$\therefore$ $v(t) = (\lambda I - A) u(t,v_0)$ es solución "mild" con $v(0) = u_0 \in \underline{X}$.

Para probar la unicidad, sea $v(t,0)$ una solución "mild" con condición inicial 0. Entonces $\int_0^t v(\xi,0)\,d\xi$ es solución clásica con valor inicial 0. Por $(*)$ la única solución clásica con valor inicial cero es cero $\therefore$ $v(t,0) \equiv 0 \quad \forall\, t \geq 0$.

Concluimos $\forall u_0 \in X$ existe una única solución "mild" con $v(0) = u_0$, dada por $v(t) = (\lambda I - A) u(t, v_0)$. La denotamos como $\tilde{u}(t, u_0)$. Por ser solución "mild"

$$\int_0^t \tilde{u}(\xi, u_0)\, d\xi \in D(A) \quad \forall t \geq 0.$$

Es decir,

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t} \int_0^t \tilde{u}(\xi, u_0)\, d\xi = \tilde{u}(0, u_0)$$
$$= u_0$$

Como $u_0 \in X$ es arbitrario, deducimos que $D(A)$ es denso en X.

Tenemos:
- $\tilde{u}(t, u_0)$ única solución "mild" $\forall u_0 \in X$
- $\bar{u}(t, u_0)$ única solución clásica cuando $u_0 \in D(A)$.

Si $u_0 \in D(A)$ entonces es fácil verificar que $\tilde{u}(t, u_0) = \bar{u}(t, u_0)$. Por propiedades de la solución "mild" y por ser la única solución "mild", ésta es lineal en la condición inicial

$$\tilde{u}(t, u_1) + \tilde{u}(t, u_2) = \tilde{u}(t, u_1 + u_2)$$
$$\forall u_j \in X$$

Sea $t_0 > 0$, fijo. Consideremos el mapeo lineal

$$(4) \ldots \quad \begin{cases} \Phi : X \longrightarrow C([0,t_0]; X) \\ u_0 \longmapsto \tilde{u}(t, u_0) \end{cases}$$

Supongamos que $u_n \to u_0$, cuando $n \to \infty$.
y $\Phi(u_n) \longrightarrow y \in C([0,t_0]; X)$, " " .

Entonces, $\forall t \in [0,t_0]$,

$$D(A) \ni \int_0^t \tilde{u}(\xi, u_n) \, d\xi \longrightarrow \int_0^t y(\xi) \, d\xi$$

$$y \quad A \int_0^t \tilde{u}(\xi, u_n) \, d\xi = \tilde{u}(t, u_n) - u_n$$

$\tilde{u}$ sol. "mild"

$$\longrightarrow y(t) - u_0 \quad n \to \infty$$

Como A es cerrado, concluimos que

$$\int_0^t y(\xi) \, d\xi \in D(A)$$

$$y \quad A \int_0^t y(\xi) \, d\xi = y(t) - u_0$$

$\therefore$ $y(t)$ es la única solución "mild" con condición inicial u_0, siempre y cuando extendamos $y(t)$ para $t > t_0$ mediante

$$y(t) := u(t - t_0, y(t_0))$$

Así, $y(t) = \tilde{u}(t, u_0)$ $\forall t \geq 0$ solución "mild" y además $\Phi(u_0) = y(t)$.
Por el teorema de la gráfica cerrada, Φ es continuo. Por lo tanto, para $u_n \to 0$ obtenemos $\tilde{u}(t, u_n) = \bar{u}(t, u_n) \to 0$ en $C([0, t_0]; X)$, es decir, uniformemente en el compacto $[0, t_0]$.

Esto prueba (c).

(c) ⇒ (a) : La hipótesis (c) implica que existe una familia de operadores acotados

$$t \geq 0 \quad \begin{cases} S(t) : D(S(t)) \longrightarrow X \\ S(t) u_0 := \bar{u}(t, u_0), \quad \forall u_0 \in D(A) \end{cases}$$

$D(S(t)) = D(A)$, familia de operadores "solución":

$\bar{u}(t, u_0)$ es la única solución clásica de (1) con condición inicial $u_0 \in D(A)$ por (*).

Afirmamos que $\sup_{t \in [0,1]} \|S(t)\| < \infty$.

Por contradicción, supongamos que $\exists$ sucesión $t_n \in [0,1]$ tal que $\|S(t_n)\| \to \infty$ si $n \to \infty$. Entonces podemos hallar

$u_n \in D(A)$ tales que $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ y $\| S(t_n) u_n \| \geq 1$. Pero

$$\| \bar{u}(t_n, u_n) \| = \| S(t_n) u_n \| \geq 1 \quad \text{si } n \to \infty$$

Esto contradice, la hipótesis de (c).
$\therefore$ $\| S(t) \|$ es uniformemente acotada en $t \in [0,1]$.

Por ser solución clásica,

$$t \longmapsto S(t) u_0 = \bar{u}(t, u_0)$$

es continuo $\forall u_0 \in D(A)$

Como $D(A)$ es denso en X, la familia se extiende a una familia de operadores continuos en todo X.

$$\{S(t)\}_{t \geq 0} \subset \mathcal{B}(X).$$

Además, la unicidad de la solución clásica $\bar{u}(t, u_0)$ $\forall u_0 \in D(A)$ y $D(A)$ denso en X implica que

$$S(t+\xi) u_0 = S(t) S(\xi) u_0 \quad \forall s, \xi \geq 0 \quad \forall u_0 \in X.$$

$\therefore$ $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ es un C_0-semigrupo.

$\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subset X \to X$

Su generador claramente satisface $A \subset \tilde{A}$. Mas aún, $S(t) D(A) \subset D(A)$. $\forall\, t \geq 0$. Es fácil verificar que $D(A)$ es un núcleo para $\tilde{A}$ ($D(A)$ es denso en $D(\tilde{A})$ en la norma de la gráfica (ejercicio). Como A es cerrado esto implica que $A = \tilde{A}$.

$\square$

Corolario Para $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ cerrado. El problema de Cauchy (1) está bien planteado ssi A es el generador de un C_0-semigrupo.

Problema abstracto de Cauchy no homogéneo

Consideremos el siguiente problema abstracto de Cauchy:

$$(1) \cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f(t), & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde $f : [0,T] \to X$ es conocida, $T > 0$.

Hipótesis: A genera un C_0-semigrupo. De este modo el problema de Cauchy con $f \equiv 0$ está bien planteado: $\forall u_0 \in D(A)$ $\exists!$ $\bar{u}(t) = S(t)u_0$ tal que $\frac{d\bar{u}}{dt} = A\bar{u}$, $\bar{u}(0) = u_0$.

<u>Definición</u> Una función $\bar{u} : [0,T] \to X$ es solución <u>clásica</u> de (1) en $[0,T)$ si:

(i) $t \mapsto \bar{u}(t)$ es continua en $[0,T)$

(ii) " " es continuamente diferenciable en $(0,T)$

(iii) $\bar{u}(t) \in D(A)$ $\forall$ $t \in (0,T)$

(iv) $\bar{u}$ es solución de (1):
$\frac{d\bar{u}}{dt} = A\bar{u} + f$, $\bar{u}(0) = u_0$.

Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ el C_0-semigrupo generado por A. Sea $\bar{u}(t)$ una solución clásica de (1). Entonces el mapeo

$$(2) \cdots \begin{cases} \xi \mapsto S(t-\xi)\bar{u}(\xi) =: \bar{v}(\xi) \in X \\ \bar{v} : (0,t) \to X \end{cases}$$

es diferenciable en $\xi \in (0,t)$. Además,

$$\frac{d\bar{v}}{d\xi} = -AS(t-\xi)\bar{u}(\xi) + S(t-\xi)\frac{d\bar{u}}{d\xi}$$
$$= -AS(t-\xi)\bar{u}(\xi) + S(t-\xi)\left[A\bar{u}(\xi)+f(\xi)\right]$$
$$= S(t-\xi)f(\xi).$$

Supongamos que $f \in L^1([0,T];X)$. Entonces $S(t-\xi)f(\xi)$ es integrable. Integrando en $\xi \in (0,t)$:

$$\bar{v}(t) - \bar{v}(0) = \bar{u}(t) - S(t)u_0$$
$$= \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

es decir,

$$(3) \cdots \quad \bar{u}(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

fórmula de variación de parámetros.

Corolario Si $f \in L^1([0,T];X)$ entonces para cada $u_0 \in X$ el problema no homogéneo tiene a lo sumo una solución. Si tiene solución entonces satisface la fórmula (3).

Definición Sea A el generador de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sean $u_0 \in X$, $f \in L^1([0,T];X)$. Entonces $\bar{u} \in C([0,T];X)$ definida por la fórmula (3) se denomina la solución "mild" del problema de Cauchy no homogéneo (1).

Observación La continuidad de f no es suficiente, en general, para garantizar la existencia de soluciones clásicas de (1) $\forall$. $u_0 \in D(A)$.

Sea A generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Seleccionamos $u_0 \in X$ tal que $S(t)u_0 \notin D(A)$, $\forall t \geq 0$.

Definimos $f(t) := S(t)u_0$, f es continua. Consideremos el problema

$$(4) \cdots \begin{cases} \dfrac{d\bar{u}}{dt} = A\bar{u} + f(t), \quad t \geq 0 \\ \phantom{\dfrac{d\bar{u}}{dt}} = A\bar{u} + S(t)u_0 \\ \bar{u}(0) = 0 \in D(A) \end{cases}$$

(4) no tiene solución clásica, aún cuando $\bar{u}(0) = 0 \in D(A)$.

En efecto, la solución "mild" siempre existe y es única, dada por

$$\bar{u}(t) = \int_0^t S(t-\xi)\, S(\xi)\, u_0 \, d\xi$$

$$= \int_0^t S(t)\, u_0 \, d\xi = t\, S(t)\, u_0$$

Pero $t \mapsto tS(t)u_0$ no es diferenciable para $t>0$.

Moraleja: para obtener que (1) siempre tiene solución clásica hay que pedirle más a la f.