Lección 2.16 : Regularidad de soluciones al problema de Cauchy.

Teorema : $A : D(A) \subset X$ generador de un $C_0$-semigrupo y $f \in C([0,T]; X)$ que satisface una de las condiciones (i) $f \in L^1([0,T]; D(A))$, ó (ii) $f \in W^{1,1}([0,T]; X)$ entonces para cada $u_0 \in D(A)$ el problema de Cauchy

$$(1) \cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una única solución clásica.

Definición Un espacio de Banach $X$ posee la propiedad de Radon-Nikodym si toda función $f : [0,T] \longrightarrow X$ absolutamente continua satisface: (a) $f$ es diferenciable c.d.s. en $[0,T]$, (b) $f' \in L^1([0,T]; X)$, y (c) $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(\xi)\, d\xi$, $\forall t \in [0,T]$.

Lema 1 Todo espacio de Banach reflexivo posee la propiedad de Radon-Nikodym.

Dem. Ver Diesten, Uhl, "Vector measures" pp. 79-82. $\square$

Corolario 1 $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un $C_0$-semigrupo, $f \in [0,T] \to X$ absoluta mente continua. Si $X$ posee la propiedad de Radon-Nikodym entonces $\forall u_0 \in D(A)$ el problema de Cauchy (1) tiene una única solución clásica.

<u>Dem</u>. $X$ posee prop. R-N $\Rightarrow f \in W^{1,1}([0,T];X)$
Se aplica el teorema. $\square$

<u>Corolario 2</u> Mismas hipótesis que en Corolario 1, si $X$ es reflexivo entonces tenemos la misma conclusión: $\exists!$ sol. clásica de (1) $\forall u_0 \in D(A)$.

<u>Dem</u>. Por Lema 1 y Cor. 1. $\square$

<u>Lema 2</u> (efecto regularizador)
Sea $A : D(A) \subset H \longrightarrow H$ un operador autoadjunto, generador de un $C_0$-semigrupo contractivo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, en un espacio de Hilbert $(H, \langle , \rangle)$. Sea $u \in W^{1,2}([0,T]; H)$ con $u(t) \in D(A)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$, y tal que $Au(t) \in L^2([0,T]; H)$. Entonces la función

$$t \mapsto \frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle$$

es absolutamente continua en $[0,T]$ y además

$$(2) \ldots \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle\right) = \left\langle Au(t), \frac{du}{dt}\right\rangle$$

Demostración: como $A$ genera un semi-grupo contractivo, por Hille-Yosida, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, definimos la aproximación de Yosida de $A$:

$$A_\lambda := \lambda A R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(H).$$

$L \in \mathcal{C}(H)$, $\overline{D(L)} = H$ tal que $L$ es invertible con $L^{-1}$ densamente definido
$\Rightarrow$ $L^*$ tiene una inversa densamente definida y $(L^*)^{-1} = (L^{-1})^*$ (ver Kato, cap. 3).

Así, $A$ auto-adjunto, generador
$\Rightarrow$ $A_\lambda$ es auto-adjunto

Si $X$ es reflexivo y si $u: [0,T] \longrightarrow X$ es a.c., con $du/dt: [0,T] \longrightarrow X$ y $u, du/dt \in L^p([0,T]; X)$ entonces $u$ es diferenciable c.d.s. y $\forall t \in [0,T]$ se tiene que

$$(3) \quad u(t) = u(0) + \int_0^t \frac{du}{dt}(\xi)\, d\xi$$

Ver., Vrabie, Teorema 1.3.4 (pág. 12).

Por lo tanto, de las hipótesis del teorema concluimos que $u(t)$ es a.c. en $[0,T]$, diferenciable c.d.s. en $[0,T]$,

$\frac{du}{dt} \in L^2([0,T];H)$ y $u$ satisface (3) en $[0,T]$. Por lo tanto, podemos calcular

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\langle A_\lambda u(t), u(t)\rangle\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\langle A_\lambda u(t), \frac{du}{dt}\rangle + \frac{1}{2}\langle A_\lambda \frac{du}{dt}, u(t)\rangle$$
$$= \langle A_\lambda u(t), \frac{du}{dt}\rangle$$

$A_\lambda^* = A_\lambda$

Integrando en $0 \le s \le t \le T$ obtenemos

$$\frac{1}{2}\langle A_\lambda u(t), u(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle A_\lambda u(s), u(s)\rangle = \int_s^t \langle A_\lambda u(\xi), \frac{du}{dt}(\xi)\rangle \, d\xi$$

Por convergencia dominada, podemos tomar el límite cuando $\lambda \to \infty$, obteniendo

$$\frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle - \frac{1}{2}\langle Au(s), u(s)\rangle = \int_s^t \langle Au(\xi), \frac{du}{dt}(\xi)\rangle \, d\xi$$

$$\forall\ 0 \le s \le t \le T.$$

Concluimos que $t \mapsto \frac{1}{2}\langle Au(t), u(t)\rangle$ es a.c. en $[0,T]$ y su derivada está dada por (2).

$\square$

Aplicaremos el Lema 2 para encontrar condiciones suficientes bajo las cuales si $f \in L^2([0,T]; H)$ entonces $\exists!$ solución fuerte de (1) con $u_0 \in H$.

## Teorema 1

Sea $A : D(A) \subset H \rightarrow H$ el generador de un $C_0$-semigrupo contractivo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, en un espacio de Hilbert $H$. Entonces: si $A$ es auto-adjunto entonces $\forall\, u_0 \in X$ y $f \in L^2([0,T]; H)$ la única solución "mild" de (1) es una solución fuerte. Asimismo, la función $t^{1/2} \frac{du}{dt}$ está en $L^2([0,T]; H)$, la función $t \mapsto \frac{1}{2} \langle Au(t), u(t) \rangle$ está en $L^1([0,T]; H)$ y para cada $\delta > 0$, $\delta \in (0,T)$, es a.c. en $[\delta, T]$.

Si además $u_0 \in D(A)$ entonces para cada $f \in L^2([0,T]; H)$ la única solución "mild" de (1) es una solución fuerte y satisface $du/dt \in L^2([0,T]; H)$ y $t \mapsto \frac{1}{2} \langle Au(t), u(t) \rangle$ es a.c. en $[0,T]$.

Demostración: La fórmula de variación de parámetros

$$(4) \cdots \quad u(t) = S(t) u_0 + \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

está bien definida en $X$:

$$\left\| \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \right\| \leq \int_0^t \| S(t-\xi) f(\xi) \|\, d\xi$$

$$\leq T^{1/2} \left( \int_0^t \| S(t-\xi) f(\xi) \|^2\, d\xi \right)^{1/2}$$

$\|S(t)\| \leq 1$

$$\leq T^{1/2} \| f \|_{L^2([0,T];X)} < \infty$$

$\forall\ T > 0$, finito.

Además es única (ejercicio : misma dem.).

$\forall u_0 \in H$ y $t > 0$ la función $t \mapsto S(t) u_0$ se queda en $D(A)$ (ejercicio : única solución clásica al problema homogéneo). Esto implica que la solución "mild" (4) es diferenciable en $[0, T]$ y satisface

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t), \quad \text{c.d.s. en } t \in [0, T].$$

es decir, la solución "mild" es fuerte.

Además por el Lema 2 tenemos que (por la fórmula (2)) :

$$t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 = t\, \frac{1}{2} \left[ \frac{d}{dt} \langle Au(t), u(t) \rangle + \right.$$
$$\left. + \langle f(t), \frac{du}{dt} \rangle \right]$$

Integrando en $t \in [0, T]$ :

$$\int_0^T t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt = \left( \frac{1}{2} t \langle Au(t), u(t) \rangle \right) \Big|_{t=0}^{t=T}$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle \, dt$$

$$+ \int_0^T t \left\langle f(t), \frac{du}{dt} \right\rangle dt$$

Por Lumer-Phillips, $A$ genera un semigrupo contractivo $\Rightarrow$ $\langle Au, u \rangle \le 0 \;\; \forall\, u \in D(A)$.
Así, aplicando

$$\left\langle f(t), \frac{du}{dt} \right\rangle \le \frac{1}{2} \| f(t) \|^2 + \frac{1}{2} \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2$$

obtenemos,

$$\int_0^T t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \le \int_0^T t \, \|f(t)\|^2 \, dt$$

$$- \int_0^T \underbrace{\langle Au(t), u(t) \rangle}_{= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(t)\|^2 - \langle f(t), u(t) \rangle} dt$$

$$\Rightarrow \int_0^T | \langle Au(t), u(t) \rangle | \, dt$$

$$= - \int_0^T \langle Au(t), u(t) \rangle \, dt$$

$$\le \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\| \, \|u(t)\| \, dt$$

Así,

$$\int_0^T t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T t \, \|f(t)\|^2 \, dt + \frac{1}{2} \|u_0\|^2 + \int_0^T \|f(t)\| \, \|u(t)\| \, dt$$

Tenemos que $t \mapsto \langle Au(t), u(t) \rangle$ está en $L^1([0,T]; H)$ y el semigrupo es contractivo:

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\| + \int_0 \|f(\xi)\| \, d\xi$$

Sustituyendo obtenemos:

$$\int_0^T t \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \leq \int_0^T t \, \|f(t)\|^2 dt + \frac{1}{2} \left( \|u_0\| + \int_0^T \|f(t)\| \, dt \right)^2$$

Esto demuestra que:

- $t^{1/2} \frac{du}{dt} \in L^2([0,T]; H]$
- $\frac{1}{2} \langle Au(t), u(t) \rangle \in L^1([0,T])$

Además por el lema 2, $\frac{1}{2} \langle Au(t), u(t) \rangle$ es a.c. en $[\delta, T]$, con $\delta > 0$.

Finalmente, supongamos que $u_0 \in D(A)$. En este caso

$$\frac{du}{dt} \in L^2([0,T]; H).$$

En efecto, tomando el prod. interno de $du/dt$ con $du/dt = Au(t) + f(t)$ e integrando:

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt = \frac{1}{2} \langle Au(T), u(T) \rangle - \frac{1}{2} \langle Au_0, u_0 \rangle + \int_0^T \left\langle f(t), \frac{du}{dt} \right\rangle dt$$

Como $A$ es disipativo,

$$\int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt \leq -\frac{1}{2} \langle Au_0, u_0 \rangle + \frac{1}{2} \int_0^T \| f(t) \|^2 dt + \frac{1}{2} \int_0^T \left\| \frac{du}{dt} \right\|^2 dt$$

$$\Rightarrow \quad \left\| \frac{du}{dt} \right\|_{L^2([0,T];H)} \leq - \langle Au_0, u_0 \rangle + \| f \|^2_{L^2([0,T];H)}$$

Es decir, $du/dt \in L^2([0,T];H)$.
A su vez,

$$Au(t) = \frac{du}{dt} - f(t) \in L^2([0,T];H)$$

Aplicamos el Lema 2 y obtenemos la conclusión $\square$

# Regularidad de la solución "mild" para semigrupos analíticos.

Problema de Cauchy no homogéneo

$$(1) \ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Solución "mild":

$$(2) \ldots \quad u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi$$

Vamos a suponer que $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador de un semigrupo analítico $\{S(t)\}_{t \geq 0}$.

Sabemos que si $f \in C^1([0,T]; X)$ entonces $\forall u_0 \in D(A)$ existe una única solución clásica. Si el semigrupo es analítico podemos probar resultados más fuertes (menos regularidad en $f$).

Comenzamos con una observación:

**Lema 1** $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo analítico. Entonces:

- $t \mapsto S(t)u_0$ es analítico en $t > 0$ $\forall u_0 \in X$

- $S(t)u_0 \in D(A^n) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$
- $\| A^n S(t) u_0 \| \leq \dfrac{C}{t^n} \|u_0\| \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ cuando $t \to 0^+$

<u>Dem.</u> Ejercicio: aplicar los resultados para semigrupos analíticos ( $(-A)^\alpha$ con $\alpha = n \in \mathbb{N}$ )

$\square$

En vista del Lema 1, nos concentraremos en la regularidad de

$$v(t) := \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \quad \cdots (3).$$

<u>Definición</u> Se dice que $f \in C^\theta([0,T]; X)$, $0 < \theta < 1$, es Hölder continua con exponente $\theta$, si existe $L > 0$ constante tal que

$$\| f(t) - f(\xi) \| \leq L\, |t - \xi|^\theta \quad \forall\, t, \xi \in [0,T].$$

<u>Teorema 1</u> Sea $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Suponogamos que $f \in L^p([0,T]; X)$ con $1 < p < \infty$. $\forall u_0 \in X$ Entonces la solución "mild" (2) del problema de Cauchy (1) es Hölder continua con exponente $\theta = \dfrac{p-1}{p}$ en $[\varepsilon, T]$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Si adicionalmente

$u_0 \in D(A)$ entonces la solución es Hölder continua en $[0,T]$ con el mismo exponente.

Demostración: Sea $\|S(t)\| \leq M$ $\forall$ $t \in [0,T]$. Como el semigrupo es analítico existe $C>0$ constante tal que

$$\|AS(t)\| \leq \frac{C}{t} \quad \forall\, t \in [0,T]$$

(ver Lema 1). Esto implica que la función

$$t \mapsto S(t)u_0 \text{ es: } \begin{cases} \text{Lipschitz continua en } [\varepsilon,T],\ \forall \varepsilon>0 \text{ si } u_0 \in X \\ \\ \text{Lipschitz continua en } [0,T] \text{ si } u_0 \in D(A) \end{cases}$$

Por lo tanto basta con examinar $v(t) = \int_0^t S(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi$.

Suponiendo que $f \in L^p([0,T];X)$, $1<p<\infty$. Para $h>0$ tenemos que

$$v(t+h) - v(t) = \int_0^{t+h} S(t+h-\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$
$$- \int_0^t S(t-\xi)\, f(\xi)\, d\xi$$

$$= \underbrace{\int_t^{t+h} S(t+h-\xi) f(\xi)\, d\xi}_{=: I_1} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^t \left[ S(t+h-\xi) - S(t-\xi) \right] f(\xi)\, d\xi}_{=: I_2}$$

Por la desigualdad de Hölder con $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $q = p/(p-1)$, tenemos

$$\| I_1 \| \leq M \int_t^{t+h} \| f(\xi) \| \, d\xi$$

$$\leq M h^{(p-1)/p} \left( \int_t^{t+h} \| f(\xi) \|^p \, d\xi \right)^{1/p}$$

$$\leq M h^{(p-1)/p} \| f \|_{L^p([0,T]; X)}$$

Para estimar $I_2$ notamos que $\forall h > 0$,

- $\| S(t+h) - S(t) \| \leq 2M$, para $t, t+h \in [0,T]$
- $\| S(t+h) - S(t) \| \leq \frac{C}{t} h$ para $t, t+h \in (0,T]$

Por lo tanto,

$$\| S(t+h) - S(t) \| \leq C_1 \mu(h,t) := C_1 \min\left\{ 1, \frac{h}{t} \right\}$$

para $t, t+h \in [0,T]$.

Aquí $C_1 > 0$ es constante que satisface $C_1 \geq \max\{2M, C\}$. Aplicando la desigualdad de Hölder,

$$\|I_2\| \leq C_1 \int_0^t \mu(h, t-\xi) \|f(\xi)\| \, d\xi$$

$$\leq C_1 \|f\|_{L^p([0,T];X)} \left( \int_0^t \mu(h, t-\xi)^{p/(p-1)} \right)^{(p-1)/p}$$

Pero, dado que $\mu \geq 0$ tenemos

$$\int_0^t \mu(h, t-\xi)^{p/(p-1)} d\xi = \int_0^t \mu(h, \tau)^{p/(p-1)} d\tau$$

$$\leq \int_0^\infty \mu(h, \tau)^{p/(p-1)} d\tau$$

$$= p \, h^{(p-1)/p}$$

$$\Rightarrow \quad \|I_2\| \leq \tilde{C}_1 h^{(p-1)/p} \|f\|_{L^p([0,T];X]}$$

$$\Rightarrow \quad \|v(t+h) - v(t)\| \leq C_2 h^{(p-1)/p} \|f\|_{L^p([0,T];X)}$$

$\square$

**Teorema 2**

$A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Supongamos que $f \in L^1([0,T]; X)$ y que para cada $0 < t < T$ existe $\delta_{(t)} > 0$ y $\psi_{(t)} : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ tal que:

(4) ... $\|f(t) - f(\xi)\| \leq \varphi_{(t)}(|t-\xi|)$.

y (5) ... $\displaystyle\int_0^{\delta(t)} \frac{\varphi_{(t)}(\xi)}{\xi}\, d\xi < \infty$.

Entonces, para cada $u_0 \in X$, la solución "mild" es una solución clásica.

Dem. Basta con demostrar:

(i) $v(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\, d\xi \in D(A)$ $\forall\ 0 < t < T$

y (ii) $Av(t)$ es continua en $0 < t < T$.

Así, escribimos

$$v(t) = \underbrace{\int_0^t S(t-\xi)\big(f(\xi) - f(t)\big)\, d\xi}_{=:\, v_1(t)} + \underbrace{\int_0^t S(t-\xi) f(t)\, d\xi}_{=:\, v_2(t)}.$$

Por propiedades básicas:

$$v_2(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(t)\, d\xi = \int_0^t S(\xi) f(t)\, d\xi \in D(A)$$

$$y \quad A v_2(t) = A \int_0^t S(\xi) f(t)\, d\xi$$
$$= S(t) f(t) - f(t).$$

Por las hipótesis, $f$ es continua en $[0,T]$.
$\Rightarrow$ $A v_2(t)$ es continua en $(0,T]$.

Definimos,

$$v_{1,\varepsilon}(t) := \begin{cases} \displaystyle\int_0^{t-\varepsilon} S(t-\xi)(f(\xi) - f(t))\, d\xi, & \text{para } t \geq \varepsilon \\ & 0 < \varepsilon \ll 1, \\ 0, \quad \text{si} \quad 0 < t < \varepsilon \end{cases}$$

claramente, $v_{1,\varepsilon}(t) \to v_1(t)$ c.d.s. en $t \in [0,T]$, si $\varepsilon \to 0^+$. Además, claramente

$$v_{1,\varepsilon}(t) \in D(A) \quad \text{si} \quad t \geq \varepsilon$$

$$y \quad A v_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^{t-\varepsilon} A S(t-\xi)(f(\xi) - f(t))\, d\xi$$

De (4) y (5) tenemos que, para $t > 0$

$$A v_{1,\varepsilon}(t) \text{ converge si } \varepsilon \to 0^+.$$

En efecto, para cada $t > 0$ fijo,

$$\| Av_{1,\varepsilon_1}(t) - Av_{1,\varepsilon_2}(t) \|$$

$$\leq \int_{t-\varepsilon_2}^{t-\varepsilon_1} \| AS(t-\xi) \| \, \| f(\xi) - f(t) \| \, d\xi$$

$$\leq \int_{t-\varepsilon_2}^{t-\varepsilon_1} \| AS(t-\xi) \| \, \varphi_{(t)}\big( |t-\xi| \big) \, d\xi$$

$$\leq \int_{t-\varepsilon_2}^{t-\varepsilon_1} C \, \frac{\varphi_{(t)}(|t-\xi|)}{|t-\xi|} \, d\xi \longrightarrow 0 \quad \text{si } \varepsilon_1, \varepsilon_2 \to 0^+$$

$\therefore$ $Av_{1,\varepsilon}(t)$ converge si $\varepsilon \to 0^+$.

Mas aún,

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} Av_{1,\varepsilon}(t) = \int_0^t AS(t-\xi)(f(\xi) - f(t)) \, d\xi$$

Como $A$ es cerrado deducimos que $v_1(t) \in D(A)$ $\forall$ $t>0$, y además

$$Av_1(t) = \int_0^t AS(t-\xi)(f(\xi) - f(t)) \, d\xi .$$

Finalmente, para $0 < \delta < t$ se tiene que

$$Av_1(t) = \int_0^\delta AS(t-\xi)(f(\xi) - f(t)) \, d\xi \; +$$

$$+ \int_\delta^t AS(t-\xi)(f(\xi) - f(t)) \, d\xi$$

Para $\delta > 0$ la segunda integral es continua. La primera integral es de orden $O(\delta)$, uniformement en $t$.

$\Rightarrow$ $Av_1(t)$ es continua en $0 < t \leq T$ $\square$