Lección 2.17 : Regularidad en espacios de Hölder. Sistemas de evolución.

clase pasada :

Teorema 1 A generador de un semigrupo analítico. Se $f \in L^p([0,T]; X)$ con $1<p<\infty$ entonces la solución "mild" es Hölder continua con exponente $\theta = (p-1)/p$ en $[\varepsilon, T]$ $\forall \varepsilon > 0$ con condición inicial $u_0 \in X$. Si $u_0 \in D(A)$ entonces es Hölder continua en $[0,T]$ (mismo exponente).

Teorema 2 A generador de un semigrupo analítico. Sea $f \in L^1([0,T]; X)$. Supongamos que $\forall t \in (0,T)$ fijo existen $\delta(t) > 0$ y $\psi(t) : [0,\infty) \to [0,\infty)$ tal que $\|f(t) - f(\xi)\| \leq \psi(t)(|t-\xi|)$ y $\int_0^{\delta(t)} \psi(t)(\xi)/\xi \, d\xi < \infty$. Entonces $\forall u_0 \in X$ la solución "mild" es una solución clásica.

Como consecuencia del teorema 2 tenemos :

Lema 1 Sea $A : D(A) \subset X \to X$ generador de un semigrupo analítico. Supongamos que $f \in L^1([0,T]; X)$, y f es localmente Hölder continua en $(0,T]$, con exponente $0<\theta<1$. Entonces para todo $u_0 \in X$ el problema de Cauchy tiene una única solución clásica.

Demostración : Por hipótesis $f \in L^1([0,T]; X)$ y para cada $t \in [0,T]$ fijo existe una vecindad de t donde f es Hölder continua:

$$\| f(\xi_1) - f(\xi_2) \| \leq L |\xi_1 - \xi_1|^{\theta}$$

$\forall\ \xi_1 \xi_2 \in (t - \delta_{(t)}, t + \delta_{(t)})$ con $\delta_{(t)} > 0$.
Escogiendo $\psi_{(t)}(s) := Ls^{\theta}$, $\forall\ s > 0$, tenemos que $\| f(t) - f(\xi) \| \leq \psi_{(t)}(|\xi - t|)$ $\forall\ |\xi - t| < \delta_{(t)}$ y además

$$\int_0^{\delta_{(t)}} \frac{\psi_{(t)}(s)}{s} ds = \int_0^{\delta_{(t)}} L s^{\theta - 1} ds = \frac{L\delta_{(t)}^{\theta}}{\theta} < \infty$$

$\forall\ t \in (0, T]$, fijo.

Así, aplicando el teorema 2 concluimos que la única solución "mild" con $u_0 \in X$ es también solución clásica. Por unicidad de la solución "mild", ésta es la única solución clásica

$\square$

Sin embargo, con las hipótesis del lema 1 podemos decir mucho más con respecto a la regularidad de la solución. Para ello necesitamos:

Lema 2 Sea $A : D(A) \subset X \to X$ el generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Sea $f \in C^{\theta}([0,T]; X)$, Hölder continua con exponente $0 < \theta < 1$. Sea,

$$w(t) = \int_0^t S(t-\xi)\big(f(\xi)-f(t)\big)\,d\xi \quad \cdots (1)$$

Entonces $w(t) \in D(A)$ $\forall\ t \in [0,T]$ y además $Aw(t) \in C^{\theta}([0,T]; X)$.

<u>Demostración</u>: De las estimaciones para semigrupos analíticos tenemos : $\|A^n S(t)\| \leq M_n / t^n$, $\forall\ n = 0,1,2,\dots$, $M_n > 0$. Así,

$$\|S(t)\| \leq M_0$$

$$\|AS(t)\| \leq \frac{M_1}{t} \qquad \forall\ t > 0$$

$$\|A^2 S(t)\| \leq \frac{M_2}{t^2}$$

Por propiedades básicas :

$$\int_0^t S(t-\xi) f(t)\,dt = \int_0^t S(\xi) f(t)\,d\xi \quad \in D(A)$$

$\forall\ t > 0$. De la demostración del teorema 2 tenemos que

$$\int_0^t S(t-\xi) f(\xi)\,d\xi \quad \in D(A) \qquad \forall\ t > 0$$

Así, $w(t) \in D(A)$ $\forall\ t \in [0,T]$.

Además, tenemos la estimación

$$\|Aw(t)\| = \left\| \int_0^t AS(t-\xi)(f(\xi)-f(t))\, d\xi \right\|$$

$$\leq \int_0^t \left(\frac{M_1}{t-\xi}\right) \|f(\xi)-f(t)\|\, d\xi$$

$$\leq M_1 \int_0^t L(t-\xi)^{\theta-1}\, d\xi = \frac{M_1 L t^{\theta}}{\theta} < \infty$$

$$\forall\ t \in [0,T].$$

Para demostrar que $Aw(t) \in C^{\theta}([0,T];X)$ estimamos:

$$\|AS(t) - AS(\xi)\| = \left\| \int_\xi^t \frac{d}{d\eta}(AS(\eta))\, d\eta \right\|$$

$$= \left\| \int_\xi^t A^2 S(\eta)\, d\eta \right\|$$

$$\leq \int_\xi^t \|A^2 S(\eta)\|\, d\eta$$

$$\leq M_2 \int_\xi^t \frac{d\eta}{\eta^2} = \frac{M_2 |t-\xi|}{t\xi} \quad \cdots (2)$$

Así, escribimos:

$$Aw(t+h) - Aw(t) = A\int_0^{t+h} S(t+h-\xi)(f(\xi)-f(t+h))\, d\xi$$

$$- A\int_0^t S(t-\xi)(f(\xi)-f(t))\, d\xi$$

$$= \underbrace{A\int_0^t (S(t+h-\xi) - S(t-\xi))(f(\xi)-f(t))\, d\xi}_{=: I_1(t)} +$$

$$+ \underbrace{A\int_0^t S(t+h-\xi)(f(t)-f(t+h))\, d\xi}_{=: I_2(t)} +$$

$$+ \underbrace{A\int_t^{t+h} S(t+h-\xi)\big(f(\xi)-f(t+h)\big)\, d\xi}_{=:\, I_3(t)}$$

Para estimar I_1 usamos (2):

$$\| I_1(t)\| \le \int_0^t \| AS(t+h-\xi) - AS(t-\xi)\| \, \|f(\xi)-f(t)\| \, d\xi$$

$$\overset{(2)}{\le} M_2 \int_0^t \frac{h}{(t+h-\xi)(t-\xi)} \cdot L(t-\xi)^\theta \, d\xi$$

$$\le LM_2 h \int_0^t \frac{d\xi}{(t+h-\xi)(t-\xi)^{1-\theta}}$$

$$\le Ch^\theta$$

Asimismo,

$$\| I_2(t)\| = \| A\int_0^t S(t+h-\xi)(f(t)-f(t+h))\, d\xi \|$$

Prop. de semigrupos

$A\int_0^t S(\xi) u_0 \, d\xi = S(t)u_0 - u_0$

$$\le \| (S(t+h) - S(h))(f(t)-f(t+h)) \|$$

$$\le 2M_0 L h^\theta$$

Finalmente,

$$\| I_3(t)\| \le \int_t^{t+h} \| AS(t+h-\xi)\| \, \| f(\xi) - f(t+h)\| \, d\xi$$

$$\le M_1 L \int_t^{t+h} (t+h-\xi)^{\theta-1} \, d\xi \le Ch^\theta$$

combinando las estimaciones concluimos que $Aw(t) \in C^\theta([0,T];\mathfrak{X})$.

$\square$

<u>Teorema 3</u> $A: D(A) \subset \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ generador de un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Sea $f \in C^\theta([0,T];\mathfrak{X})$, Hölder continua con exponente $0 < \theta < 1$. Sea $u:[0,T] \to \mathfrak{X}$ la solución "mild" del problema de Cauchy,

$$(3) \cdots \quad u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

$\forall\, u_0 \in \mathfrak{X}$. Entonces:

(a) $\forall\, \delta > 0$, $Au(t) \in C^\theta([\delta,T];\mathfrak{X})$ y $du/dt \in C^\theta([\delta,T];\mathfrak{X})$.

(b) Si $u_0 \in D(A)$ entonces $Au(t), du/dt \in C([0,T];\mathfrak{X})$.

(c) Si $u_0 = 0$ y $f(0) = 0$ entonces $Au(t), du/dt \in C^\theta([0,T];\mathfrak{X})$.

<u>Demostración</u>: Escribimos $v(t) := \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$. Así, $u(t) = S(t)u_0 + v(t)$.

Por la estimación (2), $AS(t)u_0$ es Lipschitz continua en $[\delta,T]$, para todo $\delta > 0$ y $u_0 \in \mathfrak{X}$.

Por lo tanto, basta con verificar que $Av(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$, $\forall \delta > 0$. Para ello descomponemos:

$$v(t) = v_1(t) + v_2(t)$$

$$= \underbrace{\int_0^t S(t-\xi)(f(\xi) - f(t))\, d\xi}_{= v_1(t)} +$$

$$+ \underbrace{\int_0^t S(t-\xi) f(t)\, d\xi}_{= v_2(t)}$$

Por Lema 2: $Av_1(t) \in C^\theta([0,T]; X)$. Basta con verificar que $Av_2(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$.

Por propiedades básicas:

$$Av_2(t) = \int_0^t S(t-\xi) f(t)\, d\xi = (S(t) - I) f(t)$$

Como $f \in C^\theta([0,T]; X)$, sólo tenemos que probar que $S(t)f(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$. Sean $t \geq \delta > 0$, y $h > 0$; entonces:

$$\| S(t+h)f(t+h) - S(t)f(t) \| \leq$$

$$\leq \| S(t+h) \| \, \| f(t+h) - f(t) \| +$$

$$+ \underbrace{\| S(t+h) - S(t) \|}_{\leq C \min\{1, \frac{h}{t}\}} \underbrace{\| f(t) \|}_{\leq \|f\|_\infty}$$

$$\leq M_0 L h^\theta + C \min\left\{1, \frac{h}{t}\right\} \|f\|_\infty \quad \forall\, t, t+h \in [\delta, T]$$

$$\leq M_0 L h^\theta + \frac{Ch}{\delta} \|f\|_\infty$$

$$\leq C_2 h^\theta$$

donde $\|f\|_\infty = \max_{t \in [0,T]} \|f(t)\|$, y ya que $1 + h^{1-\theta} \leq \tilde{C}$ uniformemente acotado si $t+h \in [\delta, T]$, $h > 0$. Esto demuestra que $Av_2(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$ y concluimos que $Au(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$. Además, por ser solución

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \in C^\theta([\delta, T]; X)$$

Esto prueba (a).

(b) Supongamos $u_0 \in D(A)$. Por continuidad del semigrupo $AS(t)u_0 = S(t)Au_0 \in C([0,T]; X)$. Por lo tanto,

$$Au(t) = \underbrace{AS(t)u_0}_{\in C([0,T];X)} + \underbrace{Av_1(t)}_{\substack{\in C^\theta([0,T];X) \\ \text{por lema 2}}} + Av_2(t)$$

con

$$Av_2(t) = A\int_0^t S(t-\xi) f(t)\, dt$$

$$= A\int_0^t S(\xi) f(t)\, dt$$

$$= S(t) f(t) - f(t)$$

Como $f \in C^{\theta}([0,T];X)$, basta con probar que $S(t)f(t)$ es continua en $[0,T]$.
Por el inciso (a), $S(t)f(t) \in C((0,T];X)$.
La continuidad en $t=0$ se deduce de la siguiente estimcción:

$$\|S(t)f(t) - f(0)\| \leq \|S(t)f(0) - f(0)\| + $$

$$+ \|S(t)\| \, \|f(t) - f(0)\|$$

$$\leq \underbrace{\|(S(t) - I)f(0)\|}_{\substack{\to 0 \text{ si } t\to 0^+ \text{ por} \\ \text{cont. del semigrupo}}} + \underbrace{M_0 \|f(t) - f(0)\|}_{\substack{\to 0 \text{ si } t\to 0^+ \\ \text{por continuidad} \\ \text{de } f.}}$$

Así, $Au(t) \in C([0,T];X)$ y además

$$\frac{du}{dt} = Au(t) + f(t) \in C([0,T];X).$$

Esto demuestra (b).

(c) Por los mismos argumentos, basta con demostrar que, cuando $u_0 = 0$ y $f(0) = 0$, se tiene $S(t)f(t) \in C^{\theta}([0,T];X)$. Para esto estimamos:

$$\|S(t+h)f(t+h) - S(t)f(t)\| \leq$$

$$\leq \|S(t+h)\| \, \|f(t+h) - f(t)\| +$$

$$+ \|(S(t+h) - S(t))f(t)\|.$$

$$\leq M_0 L h^\theta + \left\| \int_t^{t+h} A S(\xi) f(t)\, d\xi \right\|$$

$$= M_0 L h^\theta + \left\| \int_t^{t+h} A S(\xi)(f(t) - f(0))\, d\xi \right\|$$

$f(0)=0$ ✓

$$\leq M_0 L h^\theta + M_1 L \int_t^{t+h} \frac{t^\theta}{\xi}\, d\xi$$

$$\leq M_0 L h^\theta + M_1 L \int_t^{t+h} \xi^{\theta-1}\, d\xi$$

$$\leq C h^\theta$$

$\square$

2.7 Sistemas de evolución

Hemos analizado soluciones a ecuaciones de la forma

$$\frac{du}{dt} = Au + f(t)$$

donde A es un operador dado independiente de t.

Como analogía con EDOs nos interesa examinar el caso en que $A = A(t)$ es decir, para cada $t \in [0,T]$, $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ es un operador lineal en X.

EDOs $(X \cong \mathbb{R}^n)$	$\dim X = \infty$
$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ matriz constante genera el semigrupo $e^{tA} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\forall\, t \geq 0$.	$A : D(A) \subset X \to X$ generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$
$\frac{du}{dt} = A(t)u$, $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ solución : matriz fundamental principal $\Phi(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ $\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi(t)$, $\Phi(0) = I$	$A(t)$ familia de operadores $\Rightarrow$ sistemas de evolución

Observación: En EDPs usualmente nos encontramos con problemas de la forma

$$\begin{cases} \sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha(u) D^\alpha u = F(u) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad \text{condiciones iniciales} \end{cases}$$

Dada $v = v(x,t)$ conocida, consideramos el problema lineal

$$A(t)u := \sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha(v(x,t)) D^\alpha u$$

Encontrar la solución muchas veces se reduce a encontrar un <u>punto fijo</u>:

$$\left(\sum_{|\alpha|\leq m} C_\alpha(v(x,t)) D^\alpha u \right)\Bigg|_{v=u} = F(u)$$

El estudio de sistemas de evolución resulta útil.

<u>Problema homogéneo</u>

Para cada $0 \leq t \leq T$ fijo, sea $A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal. El problema,

$$(1) \cdots \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u(t), & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

se denomina <u>problema de evolución homogéneo</u>.

<u>Definición</u> Una función $u : [s,T] \longrightarrow X$ se denomina solución clásica de (1) si u es continua en $[s,T]$; $u(t) \in D(A(t))$ $\forall\ s < t \leq T$; $u(t)$ es continuamente diferenciable en $s < t \leq T$ y satisface (1) para cierto $u_0 \in X$ dado.

Vamos a comenzar con el caso más sencillo: la familia de operadores satisface

(i) $A(t) \in \mathcal{B}(X)$, ($A(t)$ es acotado $\forall\ t \in [0,T]$ fijo).

(ii) $t \longmapsto A(t)$ es continua en la topología uniforme de operadores (es decir, en la norma $\|\cdot\|_{X \to X}$)

Teorema 1 Supongamos que la familia de operadores $A(t) : D(A(t)) \subset X \longrightarrow X$, $t \in [0,T]$ satisface (i) y (ii). Entonces $\forall\ u_0 \in X$ el problema de evolución homogéneo (1) tiene una única solución clásica, $u : [s,T] \longrightarrow X$, para cada $0 \leq s \leq t$.

Demostración: Se aplica directamente el método clásico de iteraciones de Picard. Sea

$$\alpha := \max_{t \in [0,T]} \|A(t)\| < \infty$$

Se define el mapeo:

$$(2) \begin{cases} \Upsilon : C([s,T];X) \longrightarrow C([s,T];X) \\ (\Upsilon u)(t) := u_0 + \int_s^t A(\xi)u(\xi)\, d\xi \end{cases}$$

Denotamos $\|u\|_\infty = \max\limits_{s\le t\le T} \|u(t)\|$.

Es fácil verificar que

$$\|(\mathcal{T}u)(t) - (\mathcal{T}v)(t)\| \leq \alpha(t-s)\|u-v\|_\infty$$

$$\forall\ s\le t\le T$$

Por inducción se tiene :

$$\|(\mathcal{T}^n u)(t) - (\mathcal{T}^n v)(t)\| \le \frac{\alpha^n (t-s)^n}{n!} \|u-v\|_\infty$$

$$\forall\ s\le t\le T$$

Por lo tanto,

$$\|\mathcal{T}^n u - \mathcal{T}^n v\|_\infty \leq \frac{\alpha^n (t-s)^n}{n!} \|u-v\|_\infty$$

para $n \gg 1$ suficientemente grande

$$\frac{\alpha^n (T-s)^n}{n!} < 1$$

Por el teorema de punto fijo de Banach
$\mathcal{T}$ tiene un único punto fijo

$$\hat{u} \in C([s,T];X)$$

que satisface

(3) ... $\hat{u}(t) = u_0 + \int_s^t A(\xi)\hat{u}(\xi)\, d\xi$

como $\tilde{u}$ es continua, $\int_s^t A(\xi)\tilde{u}(\xi)\,d\xi$ es diferenciable. Así,

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = A(t)\tilde{u}(t), \qquad s \leq t \leq T$$

Claramente $\tilde{u}(s) = u_0$. $\therefore$ $\tilde{u}$ es solución clásica de (1). Toda solución clásica resulta, por integración, en la fórmula (3).

$$\Rightarrow \quad u(t) = u_0 + \int_s^t A(\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

es la única solución clásica

$\square$

En vista del Teorema 1, definimos el operador solución del problema (1) como

$$\begin{cases} U(t,s)\,u_0 := u(t) & \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T \\ U(t,s) : \underline{X} \to \underline{X} \end{cases}$$

donde $u(t)$ es la única solución clásica de (1) con $u_0 \in \underline{X}$. El operador solución define una familia biparamétrica de operadores.

Observación: Por unicidad de la solución de (1), si $A(t) \equiv A \in \mathcal{B}(X)$ (generador de un semigrupo uniformemente continuo $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$) entonces

$$V(t,s) = e^{(t-s)A}, \quad \forall\ 0 \leq s \leq t \leq T.$$