Lección 2.18: Familias estables de generadores. Sistemas de evolución (caso hiperbólico).

Problema homogéneo de evolución:

$$(1) \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

donde $u_0 \in X$, para cada $0 \leq t \leq T$ fijo $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$ es un operador lineal

$u : [s,T] \to X$ es una solución clásica de (1) si:

- u continua en $[s,T]$
- u continuamente diferenciable en $(s,T]$
- $u(t) \in D(A(t))$ $\forall$ $s < t \leq T$
- u es solución de (1).

Teorema 1 Si $A(t) \in \mathcal{B}(X)$ (acotado) $\forall t \in [0,T]$ fijo y $t \mapsto A(t)$ es continuo en la topología uniforme de $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{X \to X})$ entonces para cada $u_0 \in X$ existe una única solución clásica de (1)

Definición El operador solución

$$(2) \quad \begin{cases} U(t,s) : X \to D(A(t)) \\ U(t,s)u_0 := u(t) \end{cases} \quad 0 \leq s \leq t \leq T$$

donde $u(t)$ es la única solución clásica del Teorema 1 es una familia biparamétrica de operadores. Además, si $A(t) = A \in \mathcal{B}(X)$ entonces $U(t,s) = e^{(t-s)A}$ $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$.

Teorema 2 (propiedades del operador solución; caso acotado)

Sea $A(t) \in \mathcal{B}(X)$ (acotado) $\forall\, 0 \leq t \leq T$ fijo con $t \mapsto A(t)$ continuo en $(\mathcal{B}(X), \|\cdot\|_{X \to X})$. Entonces $\forall\, 0 \leq s \leq t \leq T$ el operador solución satisface:

(i) $U(t,s) \in \mathcal{B}(X)$

(ii) $\| U(t,s) \| \leq \exp\left(\int_s^t \| A(\xi) \| \, d\xi \right)$

(iii) $(t,s) \mapsto U(t,s)$ es continuo en la topología uniforme

(iv) $\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial t} = A(t) U(t,s)$

(v) $\dfrac{\partial U(t,s)}{\partial s} = - U(t,s) A(s)$

(vi) $U(t,t) = I$, $U(t,s) = U(t,\xi) U(\xi,s)$ $\forall\, 0 \leq s \leq \xi \leq t \leq T$.

Dem. Ejercicio (ver Pazy, pág. 128) $\square$

Definición Una familia biparamétrica de operadores lineales, $U(t,s) \in \mathcal{L}(X)$, $0 \leq s \leq t \leq T$ es llamada un sistema de evolución si se cumplen:

(a) $U(s,s) = I$, $U(t,\xi)\,U(\xi,s) = U(t,s)$ $\forall\; 0 \leq s \leq \xi \leq t \leq T$.

(b) $(t,s) \mapsto U(t,s)$ es fuertemente continuo $\forall\; 0 \leq s \leq t \leq T$.

Objetivo: encontrar condiciones suficientes para que una familia de operadores lineales, $A(t) : D(A(t)) \subset X \to X$, no necesariamente acotados tenga una solución clásica única al problema (1) para u_0 en un conjunto denso X. Esto genera un sistema de evolución: la unicidad de la solución $\Rightarrow$ (a); la continuidad de la solución $\Rightarrow$ (b).

La relación entre $A(t)$ y $U(t,s)$ estará determinada por generalizaciones de (iv) y (v) en el Teorema 2.

Observación: Consideremos el sistema de evolución no homogéneo con $f \in L^1([0,T];X)$:

$$(3) \cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u + f(t) & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

Supongamos que existe un sistema de evolución para el problema homogéneo, es decir, $\forall\, v \in D(A(s))$ se tiene que

- $U(t,s)v \in D(A(t))$ $\qquad 0 \leq s \leq t \leq T$

- $U(t,s)v$ es diferenciable en t y en s:

$$\frac{\partial U(t,s)v}{\partial t} = A(t)\, U(t,s)v$$

$$\frac{\partial U(t,s)v}{\partial s} = -\, U(t,s)\, A(s)v$$

Entonces, toda solución clásica de (3) con $u_0 \in D(A(s))$ está determinada por la fórmula

$$(4) \ldots \quad u(t) = U(t,s)u_0 + \int_s^t U(t,\xi) f(\xi)\, d\xi$$

En efecto, suponiendo que $u : [s,T] \to X$ es solución clásica de (3) tenemos que $\xi \mapsto U(t,\xi)\, u(\xi)$ es diferenciable en $\xi \in [s,T]$; además

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U(t,\xi)u(\xi)}{\partial \xi} &= -\, U(t,\xi)A(\xi)u(\xi) + U(t,\xi)\frac{du}{d\xi} \\
&= -\, U(t,\xi)A(\xi)\, u(\xi) + U(t,\xi)\left[A(\xi)u(\xi) + f(\xi) \right] \\
&= U(t,\xi) f(\xi)
\end{aligned}$$

Integrando en $\xi \in [s,t]$ obtenemos

$$u(t) - U(t,s)u_0 = U(t,t)u(t) - U(t,s)u(s)$$
$$= \int_s^t U(t,\xi) f(\xi)\, d\xi \qquad \Rightarrow (4).$$

En este caso el problema no homogéneo tiene, a lo más, una solución clásica la cual, si existe, está dada por (4).

Nótese que para todo sistema de evolución dado, $U(t,s)$, el lado derecho de (4) existe si $f \in L^1([0,T];X)$, es una función continua en $0 \leq s \leq t \leq T$ y satisface $u(s) = u_0$. Es decir, es el candidato único a solución "mild" del problema de evolución (3) no homogéneo.

Familias estables de generadores

Definición Sea una familia $A(t): D(A(t)) \subset X \to X$ tal que $\forall\, 0 \leq t \leq T$ fijo $A(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo, $\{S_t(s)\}_{s \geq 0}$. Se dice que la familia es una familia estable de generadores si existen constantes de estabilidad, $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$, tales que:

(i) $(\omega, \infty) \subset \rho(A(t))$, $\forall\, t \in [0,T]$.

y (ii) $\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda, A(t_j)) \right\| \leq \dfrac{M}{(\lambda-\omega)^k}$

para cualquier $\lambda > \omega$ y cualquier secuencia finita $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq T$, $k \in \mathbb{N}$.

Nota: En general los operadores $R(\lambda, A(t_j))$ no conmutan; por lo tanto hay que preservar el orden en el producto y lo mismo en la secuencia finita t_j.

Observación: Si para cada $t \in [0,T]$, el operador $A(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ que satisface $\|S_t(s)\| \leq \exp(\omega s)$ $\forall s \geq 0$ (caso cuasi-contractivo $\|S_t(s)\| \leq \exp(\omega_t s)$, con la misma abcisa $\omega_t \equiv \omega$ $\forall t \in [0,T]$, estabilidad), entonces la familia es claramente estable con constantes de estabilidad $M \equiv 1$, y $\omega \in \mathbb{R}$. En particular, toda familia de generadores de C_0-semigrupos contractivos es estable ($\omega \equiv 0$, $M \equiv 1$).

Teorema 3 Para $t \in [0,T]$, sea $A(t)$ el generador de un C_0-semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$. La familia de generadores es estable si y sólo si $\exists$ $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ tales que

$(\omega, \infty) \subset \rho(A(t)) \quad \forall\, t \in [0, T]$ (i), y al menos una de las siguientes condiciones se cumple:

(A) $$\left\| \prod_{j=1}^{k} S_{t_j}(s_j) \right\| \leq M \exp\left(\omega \sum_{j=1}^{k} s_j \right)$$

para cualquier $s_j \geq 0$, y cualquier secuencia finita $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_j \leq \dots \leq t_k \leq T$ con $k \in \mathbb{N}$;

ó bien,

(B) $$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda_j, A(t_j)) \right\| \leq M \prod_{j=1}^{k} (\lambda_j - \omega)^{-k}$$

para cuales-quiera $\lambda_j > \omega$ y cualquier secuencia finita. $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_j \leq \dots \leq t_k \leq T$, $k \in \mathbb{N}$.

<u>Dem.</u> Ejercicio (ver Pazy, pág 131)
Hay que demostrar

$$\text{(ii)} \iff \text{(A)} \iff \text{(B)}$$

$\square$

En general, no es fácil determinar si una familia de generadores es estable. El siguiente resultado es útil: cuando una perturbación de una familia estable preserva la estabilidad.

Teorema 4 Sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]} \subset \mathcal{L}(X)$ una familia estable de generadores con constantes $M \geq 1$ y $\omega \in \mathbb{R}$. Sea $\{B(t)\}_{t\in[0,T]} \subset \mathcal{B}(X)$ una familia de operadores acotados tal que $\|B(t)\| \leq K \ \forall\, t \in [0,T]$. Entonces $\{A(t)+B(t)\}_{t\in[0,T]}$ es una familia estable de generadores con constantes de estabilidad $M \geq 1$ y $\omega + KM \in \mathbb{R}$.

Demostración: Por el teorema básico de perturbaciones acotadas de generadores sabemos que $\forall\, t \in [0,T]$ fijo el operador $A(t)+B(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo $\{\tilde{S}_t(s)\}_{s\geq 0}$. Entonces si $\lambda > \omega + KM$ tenemos que $\lambda \in \rho(A(t)+B(t))$ y

$$(5) \ldots \quad R(\lambda, A(t)+B(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda, A(t))\left[B(t)R(\lambda, A(t))\right]^n$$

En efecto, sabemos que $A(t)$ genera un semigrupo $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$ tal que

$$\|S_t(s)\| \leq Me^{\omega s}$$

y $B(t)$ es acotado $\forall\, t$ fijo; por el teorema de perturbaciones acotadas $D(A(t)+B(t)) = D(A(t))$ y $A(t)+B(t)$ genera un semigrupo $\{\tilde{S}_t(s)\}_{s\geq 0}$ que satisface

$$\begin{aligned}\|\tilde{S}_t(s)\| &\leq M\exp\left[(\omega + M\|B(t)\|)s\right] \\ &\leq M\exp((\omega+MK)s) \quad \forall s\geq 0\end{aligned}$$

Esto implica que si $\lambda > \omega + MK$ entonces $\lambda \in \rho(A(t) + B(t))$ $\forall\ t \in [0,T]$ fijo.
Por lo tanto, $R(\lambda, A(t)+B(t))$ tiene una representación en serie. La expresión (5) se deduce de la propiedad

$$\lambda I - C = (I - B R(\lambda, A))(\lambda I - A) \quad \text{con}$$

$C = A+B$. Por lo tanto,

$$R(\lambda, C) = R(\lambda, A) \sum_{n=0}^{\infty} (B R(\lambda, A))^n$$

$\Rightarrow$ (5).

Por lo tanto, para cualquier secuencia finita $0 \le t_1 \le t_2 \le \dots \le t_j \le \dots \le t_k \le T$, $k \in \mathbb{N}$, $1 \le j \le k$, tenemos que:

$$\prod_{j=1}^{k} R(\lambda, A(t_j) + B(t_j)) = \prod_{j=1}^{k} \left[\sum_{n=0}^{\infty} R(\lambda, A(t_j)) \times \left[B(t_j) R(\lambda, A(t_j)) \right]^n \right]$$

Expandiendo el lado derecho obtenemos una serie cuyo término general es de la forma

$$R(\lambda, A(t_k)) \left[B(t_k) R(\lambda, A(t_k)) \right]^{n_k} [\dots] R(\lambda, A(t_1)) \times \left[B(t_1) R(\lambda, A(t_1)) \right]^{n_1}$$

donde $n_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$.

cada uno de estos términos está acotado por

$$M^{n+1} K^{n} (\lambda-\omega)^{-(n+k)}$$

por la estabilidad de la familia $A(t)$ y el Teorema 3 (B_k). El número de términos en los que $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$ en la serie es $\binom{n}{k}$ por lo cual

$$\left\| \prod_{j=1}^{k} R(\lambda, A(t_j) + B(t_j)) \right\| \leq$$

$$\leq M (\lambda-\omega)^{-k} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{k} \left(MK (\lambda-\omega)^{-1} \right)^{n}$$

$$= M(\lambda - \omega - MK)^{-1}$$

$\square$

Sean X, Y espacios de Banach tales que

- $Y \hookrightarrow X$ (inclusión secuencialmente continua: $\forall u \in Y$, $\|u\|_X \leq C \|u\|_Y$)
- Y es denso en X ($\overline{Y} = X$)

Si $\{A(t)\}_{t \in [0,T]}$ es una familia estable de generadores nos interesa saber cuándo

la familia de restricciones en $\mathbb{Y}$, $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$
$\tilde{A}(t) := A(t)|_{\mathbb{Y}}$, es una familia estable.

El siguiente teorema nos ofrece un criterio:

<u>Teorema 5</u> Bajo las hipótesis, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ Banach, $\mathbb{Y} \hookrightarrow \mathbb{X}$, $\overline{\mathbb{Y}} = \mathbb{X}$. Sea $Q(t)$, $t\in[0,T]$, una familia de isomorfismos de $\mathbb{Y}$ sobre $\mathbb{X}$, con las siguientes propiedades:

(i) $\|Q(t)\|_{\mathbb{Y}\to\mathbb{X}}$, $\|Q(t)^{-1}\|_{\mathbb{X}\to\mathbb{Y}}$ están

uniformemente acotadas en $t\in[0,T]$.

→ (ii) El mapeo $t\mapsto Q(t)$ es de variación acotada en la norma de $\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$, es decir,

$$T.V.\left(Q(t),[0,T]\right) := \sup_{\{t_j\}_{j=1}^k \in \mathcal{P}} \sum_{j=1}^{k} \|Q(t_j)-Q(t_{j-1})\|_{\mathbb{Y}\to\mathbb{X}}$$

$$< \infty$$

Aquí $\mathcal{P}$ es el conjunto de particiones finitas $\{t_j\}_{j=1}^k \subset [0,T]$.

Sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia estable de generadores. Definimos:

$$\tilde{\tilde{A}}(t) := Q(t)A(t)Q(t)^{-1}$$

$$\tilde{\tilde{A}}(t) : \mathbb{X}\to\mathbb{X}$$

Si $\{\tilde{\tilde{A}}(t)\}_{t\in[0,T]}$ es una familia estable de generadores en X entonces Y es <u>$A(t)$-admisible</u> $\forall\, t\in[0,T]$, es decir, Y es un subespacio lineal de X que es invariante bajo la acción del semigrupo generado por $A(t)$, $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$,

$$S_t(s)\, Y \subset Y \qquad \forall s\geq 0$$

y la restricción de $S_t(s)$ en Y, $\tilde{S}_t(s) := S_t(s)_{|Y}$, $\forall s\geq 0$, es un C_0-semigrupo en Y. Además,

$$\tilde{A}(t) := A(t)_{|Y}$$

es una familia estable de generadores y el semigrupo que genera $\tilde{A}(t)$ para cada $t\in[0,T]$ fijo, es precisamente $\{\tilde{S}_t(s)\}_{s\geq 0}$

<u>Dem.</u> Ver Pazy, pág. 133 $\square$

Sistemas de evolución: caso "hiperbólico"

Problema de Cauchy de evolución en el caso homogéneo:

$$(1)\ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u, & 0 \leq s \leq t \leq T \\ u(s) = u_0 \end{cases}$$

condiciones sobre la familia para catalogarla como "hiperbólica".

caso "parabólico": $A(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo analítico.

Nuevamente sean X, Y de Banach tales que:

- Y denso en X.
- $Y \hookrightarrow X$

Si $A: D(A) \subset X \to X$ genera un C_0-semigrupo en X, $\{S(s)\}_{s \geq 0}$, entonces un subespacio $Y \subset X$ es A-admisible si Y es invariante bajo el semigrupo

$$S(s)Y \subset Y \quad \forall s \geq 0$$

y la restricción de $S(s)$ en Y, $\tilde{S}(s) := S(s)|_Y$ es un C_0-semigrupo en Y. Mas aún, $\tilde{A} = A|_Y$ genera al C_0-semigrupo $\{\tilde{S}(s)\}_{s \geq 0}$.

Sea $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ una familia tal que $\forall\, t\in[0,T]$ fijo $A(t)$ es el generador de un C_0-semigrupo en X, $\{S_t(s)\}_{s\geq 0}$.

Hipótesis de "hiperbolicidad":

(H_1): $\{A(t)\}_{t\in[0,T]}$ es una familia estable de generadores con constantes de estabilidad $M\geq 1$, $\omega\in\mathbb{R}$.

(H_2): El espacio Y es $A(t)$-admisible $\forall\, t\in[0,T]$ fijo y además la familia de restricciones, $\{\tilde{A}(t)\}_{t\in[0,T]}$, $\tilde{A}(t) := A(t)|_Y$, es una familia estable de generadores en Y con constantes de estabilidad $\tilde{M}\geq 1$, $\tilde{\omega}\in\mathbb{R}$.

(H_3): Para cada $t\in[0,T]$ fijo, $Y\subset D(A(t))$, $A(t)$ es un operador acotado de Y en X, y $t\mapsto A(t)$ es un mapeo continuo en la topología uniforme de operadores $(\mathcal{B}(Y,X);\ \|\cdot\|_{Y\to X})$

Si una familia satisface hiperbolicidad $(H_1)-(H_3)$ entonces le podemos asociar un sistema de evolución, $U(t,s)$ $0\leq s\leq t\leq T$.