Lección 2.2: El generador infinitesimal.

Hacemos una observación no trivial: si sustituimos la condición (S_3) por continuidad débil no cambia la noción de C_0-semigrupo.

Teorema Una familia de operadores acotados $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ es un C_0-semigrupo si y sólo si satisface (S_1), (S_2) y además los mapeos

$$\begin{cases} t \mapsto \langle \ell, S(t)u \rangle \\ [0,\infty) \to \mathbb{R} \text{ ó } \mathbb{C} \end{cases}$$

son continuos para toda $u \in X$ y toda $\ell \in X^*$.

Dem. Ejercicio: ver Engel, Nagel (2000), pág. 40 $\square$

$\exists$ gran variedad de C_0-semigrupos:

- semigrupos en espacios de dim $< \infty$, e^{tA}, $A \in M_{n\times n}$
- semigrupos multiplicativos
- traslaciones (en $\mathbb{R}$, intervalos finitos, toro $\mathbb{T}$)
- similaridad: $V: X \to Y$ isomorfismo, $\tilde{S}(t) = V^{-1}S(t)V$
- reescalamiento: $S(t) = e^{\alpha t}\tilde{S}(\beta t)$
- producto: $S(t)U(t)$ etc.

Capítulo 1 de Engel, Nagel (2000, 2006).

El generador infinitesimal

Motivación original: generalizar e^{At} cuando $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ a espacios de dimensión ∞.
Para un C_0-semigrupo dado: ¿existe un operador lineal, $A \in \mathcal{L}(X)$, para el cual "$e^{At} = S(t)$"? La respuesta es afirmativa.

Preliminares: sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semigrupo para cada $u \in X$, fijo, consideramos el mapeo u órbita:

$$\left.\begin{array}{l} \bar{u} : [0, \infty) \longrightarrow X \\ \bar{u} : t \mapsto S(t)u \end{array}\right\} \quad (1)$$

Decimos que $\bar{u}$ es diferenciable en $t_0 > 0$ si el límite

$$(2) \cdots \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ t_0 + h \in (0, \infty)}} \dfrac{1}{h} \left(S(t_0 + h)u - S(t_0)u \right) \\ \text{existe en } X \end{array} \right.$$

(Misma def. para diferenciabilidad por la derecha en $t_0 = 0$, $h \to 0^+$.)

Diferenciabilidad en $t=0$ por la derecha es equivalente a diferenciabilidad:

Lema 1 Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Sea $u \in X$, fijo. Para la órbita $\bar{u} : [0,\infty) \to X$, $t \mapsto \bar{u}(t) = S(t)u$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $\bar{u}(\cdot)$ es diferenciable en $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$

(b) $\bar{u}(\cdot)$ es diferenciable por la derecha en $t=0$, es decir,

$$(3) \text{ -- } \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(S(h)u - u) \ \exists \text{ en } X.$$

Demostración: Basta con probar (b) $\Rightarrow$ (a). Para $h>0$ tenemos

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left(S(t_0+h)u - S(t_0)u\right) =$$

$$= S(t_0) \lim_{h\to 0^+} \frac{S(h)u - u}{h}$$

$$= S(t_0)\left(\frac{d}{dt} S(t)u\right)\Big|_{t=0} =: S(t_0)\dot{\bar{u}}(0)$$

derivada por la der.

$\forall\, t_0>0$. $\therefore$ $\bar{u}(\cdot)$ es diferenciable por la derecha en $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$.

Por otro lado, para $-t_0 \leq h < 0$ escribimos

$$\frac{1}{h}\left(S(t_0+h)u - S(t_0)u\right) - S(t_0)\dot{\bar{u}}(0) =$$

$$= S(t_0+h)\left[\frac{1}{h}\left(u - S(-h)u\right) - \dot{\bar{u}}(0)\right] + S(t_0+h)\dot{\bar{u}}(0) - S(t_0)\dot{\bar{u}}(0)$$

cuando $h \to 0^-$, $\|S(t_0+h)\|$ es acotada, por lo tanto $h^{-1}(u - S(-h)u) - \bar{u}(0) \to 0$ por definición de derivada por la derecha, $\bar{u}(0)$. Por continuidad del semigrupo, $(S(t_0+h) - S(t_0))\bar{u}(0) \to 0$ si $h \to 0^-$, $\forall\, t_0 > 0$.

Es decir, $\bar{u}(\cdot)$ es diferenciable por la izquierda en $(0,\infty)$. Concluimos que $t \mapsto S(t)u = \bar{u}(t)$ es diferenciable en $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ y su derivada es

$$(4)\ldots \left(\frac{d}{dt} S(t)u\right)\Big|_{t=t_0} =: \dot{\bar{u}}(t_0) = S(t_0)\dot{\bar{u}}(0)$$

$\square$

<u>Definición</u> (generador infinitesimal)

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ un C_0-semigrupo en X, de Banach. El generador infinitesimal del semigrupo se define mediante

$$(5)\cdots \quad Au := \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(S(t)u - u\right) = \dot{\bar{u}}(0)$$

definido para cualquier elemento $u \in D(A) \subset X$ donde el dominio de A, $D(A)$, se define como

$$(6)\cdots \quad D(A) := \left\{ u \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}(S(t)u - u) \text{ existe en } X \right\} \subset X.$$

Observación: Por el lema 1 el dominio $D(A)$ se puede escribir

$$D(A) = \{ u \in X : \text{el mapeo u órbita } t \mapsto S(t)u \text{ es diferenciable en } \mathbb{R}_+ = [0, \infty) \}$$

claramente, $D(A)$ es un subespacio lineal de X: $u_1, u_2 \in D(A)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ ($\in \mathbb{R}$) entonces $u_1 + \alpha u_2 \in D(A)$.

$D(A)$ es parte fundamental de la definición de generador infinitesimal. El generador es $(A, D(A))$. Por brevedad A es el generador y suponemos implícitamente que $D(A)$ está dado en (6).

Por la definición, sabemos que $0 \in D(A)$. Nos interesa $D(A)$ sea grande. De hecho,

$$D(A) \text{ es denso en } X.$$

Propiedades del generador: comenzamos con una observación sobre el semigrupo

Lema 2 Sea $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un C_0-semigrupo en X, Banach. Entonces para todo $u \in X$ fijo, el mapeo órbita $t \mapsto S(t)u =: \bar{u}(t)$, $\bar{u} : [0, \infty) \to X$ es Bochner integrable en cualquier intervalo compacto de $[0, \infty)$.

Demostración: Por (S_3), $\bar{u}(\cdot)$ es continua en $t \in [0, \infty)$ en la norma de X. Sean $T > 0$, $l \in X^*$, arbitrarios. Entonces el mapeo

$$\begin{cases} t \mapsto \langle l, \bar{u}(t) \rangle = \langle l, S(t)u \rangle \\ t \in [0, T] \end{cases}$$

es Lebesgue medible. Es continuo,
$|\langle l, \bar{u}(t_1) \rangle - \langle l, \bar{u}(t_2) \rangle| \leq \|l\| \|\bar{u}(t_1) - \bar{u}(t_2)\| < \varepsilon$
si $|t_1 - t_2| < \delta$, y el conjunto $\{t : |\langle l, \bar{u}(t) \rangle| < \alpha\}$ se puede representar como una unión de intervalos (medibles) de medida positiva. Es decir, $\bar{u} : [0, T] \to X$ es débilmente medible.

Sea $\mathbb{Q}_+ := \{t_j > 0 : t_j \in \mathbb{Q}, t_j > 0\}$ el conjunto (numerable) de racionales positivos. Consideremos el conjunto de combinaciones lineales finitas

$$\sum_{j=1}^{N} \beta_j \bar{u}(t_j) \qquad \beta_j \in \mathbb{Q}$$
$$\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$$

Estos elementos forman un conjunto numerable $M = \{u_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces

$$R(\bar{u}) = \{\bar{u}(t) \in X : t \in [0, T]\} \subset \overline{M},$$

ya que en caso contrario existe $\hat{t} > 0$ tal que $S(\hat{t})u \notin \overline{M}$, lo cual contradice la continuidad del semigrupo y la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ ($\mathbb{Q}+i\mathbb{Q}$ en $\mathbb{C}$). Así, $\bar{u}:[0,T]\to X$ es casi separadamente valuada. Por el teorema de Pettis, $\bar{u}:[0,T]\to X$ es fuertemente medible.

Además, el mapeo $t\mapsto \|\bar{u}(t)\| = \|S(t)u\|$
$$\leq Me^{\omega t}\|u\|$$
es lebesgue integrable en $[0,T]$. Por el teorema de Bochner concluimos que $t\mapsto S(t)u=\bar{u}(t)$ es Bochner integrable en compactos de $[0,\infty)$. Además,

$$\left\| \int_{t_0}^{t} S(\tau)u\, d\tau \right\| \leq \int_{t_0}^{t} \|S(\tau)u\|\, d\tau$$

y $$\left\langle \ell, \int_{t_0}^{t} S(\tau)u\, d\tau \right\rangle = \int_{t_0}^{t} \langle \ell, S(\tau)u\rangle\, d\tau$$

$\forall\ t, t_0 \geq 0,\quad u\in X$ $\square$

<u>Lema 3</u> (propiedades del generador infinitesimal)

Sea $A: D(A)\subseteq X\to X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Entonces:

(a) $A: D(A)\subseteq X\to X$ es un operador lineal.

(b) Para todo $u \in D(A)$ y $t \geq 0$ se tiene que $S(t)u \in D(A)$ y además

$$(7) \cdots \; AS(t)u = S(t)Au = \frac{d}{dt}\left(S(t)u\right)$$

(c) Para todo $u \in X$, el mapeo

$$t \mapsto \int_0^t S(\tau)u \, d\tau$$

es diferenciable en $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ y

$$(8) \cdots \; \frac{d}{dt}\left(\int_0^t S(\tau)u \, d\tau\right) = S(t)u$$

(d) Para todo $u \in X$, $t \geq 0$,

$$(9) \cdots \; \int_0^t S(\tau)u \, d\tau \in D(A)$$

con
$$A\int_0^t S(\tau)u \, d\tau = S(t)u - u \quad \cdots (10)$$

Si adicionalmente $u \in D(A)$ entonces

$$\left.\begin{aligned} A\int_0^t S(\tau)u \, d\tau &= \int_0^t S(\tau)Au \, d\tau \\ &= S(t)u - u \end{aligned}\right\} \cdots (11)$$

(e) Para todo $u \in D(A)$ y $0 \leq s \leq t < \infty$ se tiene que

$$S(t)u - S(s)u = \int_s^t S(\tau)Au \, d\tau = \int_s^t AS(\tau)u \, d\tau$$

$$\cdots (12)$$

Demostración :

(a) Como ya observamos $D(A)$ es un subespacio lineal de X. Si $u_1, u_2 \in D(A)$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ entonces $u_1 + \alpha u_2 \in D(A)$ y además

$$\frac{1}{t}\Big(S(t)(u_1+\alpha u_2) - (u_1+\alpha u_2)\Big) \longrightarrow A(u_1+\alpha u_2) \quad \text{si } t\to 0^+$$

$$\| $$

$$\frac{1}{t}\big(S(t)u_1 - u_1\big) + \frac{\alpha}{t}\big(S(t)u_2 - u_2\big) \longrightarrow Au_1 + \alpha A u_2$$

$$\therefore \quad A : D(A) \subset X \to X \quad \text{es lineal.}$$

(b) Sea $u \in D(A)$, $t \geq 0$ y $h > 0$. Entonces

$$0 \leq \left\| \frac{1}{h}\big(S(t+h)u - S(t)u\big) - S(t)Au \right\|$$

$$\leq \|S(t)\| \underbrace{\left\| \frac{1}{h}\big(S(h)u - u\big) - Au \right\|}_{\substack{\to 0 \text{ si } h\to 0^+ \\ u\in D(A)}}$$

Esto implica que:

- $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{h}\big(S(h)S(t)u - S(t)u\big)$ existe, es decir, $S(t)u \in D(A)$

- $AS(t)u = S(t)Au$

Como $S(t)u \in D(A)$, por la observación y el lema 1, $S(t)u$ es diferenciable

y además $\frac{d}{dt}\left(S(t)u\right) = AS(t)u$
$= S(t)Au$

$\Rightarrow (7)$

(c) Basta con calcular $\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau$

Notamos que

$$\left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\, d\tau - S(t)u \right\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{h}\int_t^{t+h} \left(S(\tau)-S(t)\right)u\, d\tau \right\|$$

$$= \left\| \frac{1}{h}\int_0^{h} \left(S(\xi+t)-S(t)\right)u\, d\xi \right\|$$

$$\leq \frac{1}{h}\int_0^{h} \left\| \left(S(\xi+t)-S(t)\right)u \right\| d\xi$$

$$\leq \sup_{0\leq \xi\leq h} \left\| \left(S(\xi+t)-S(t)\right)u \right\| \longrightarrow 0 \quad \text{si } h\to 0^+$$

por la continuidad fuerte del semigrupo.
Así, el mapeo

$$t \longmapsto \int_0^t S(\tau)u\, d\tau$$

es diferenciable en $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$ y

$$\frac{d}{dt}\left(\int_0^t S(\tau)u\, d\tau\right) = S(t)u \qquad \forall u\in X \quad \forall t\geq 0.$$

(d) Por (c), $\forall u \in X$ $\int_0^t S(\tau)u \, d\tau \in D(A)$ ya que es diferenciable.

Para calcular $A\int_0^t S(\tau)u\,d\tau$ notamos que

$$\frac{1}{h}(S(h)-Id)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{h}\int_0^t (S(\tau+h)-S(\tau))u\,d\tau$$

$$= \frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)u\,d\tau - \frac{1}{h}\int_0^h S(\tau)u\,d\tau$$

$$\xrightarrow[h\to 0^+]{} S(t)u - S(0)u = S(t)u - u$$

$\Rightarrow$ (10).

Si además suponemos que $u \in D(A)$ entonces las funciones

$$\tau \mapsto S(\tau)\left(\frac{S(h)u-u}{h}\right)$$

convergen uniformemente en $\tau \in [0,t]$ a $\tau \mapsto S(\tau)Au$ cuando $h \to 0^+$. Por lo tanto,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}(S(h)-Id)\int_0^t S(\tau)u\,d\tau$$

$$= \lim_{h\to 0} \int_0^t S(\tau)\frac{1}{h}(S(h)-Id)u\,d\tau$$

$$= \int_0^t S(\tau)Au\,d\tau \qquad \Rightarrow (11).$$

(e) Es directo integrando (7)

$$\frac{d}{d\tau}\left(S(\tau)u\right) = S(\tau)Au = AS(\tau)u$$

en $\tau \in [s,t]$ obtenemos (12) $\square$

<u>Definición</u> un operador lineal $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, $A : D(A) \subseteq X \longrightarrow Y$, X, Y de Banach, es <u>cerrado</u> si para cada sucesión $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \longrightarrow u \in X$ y Au_n es de Cauchy en Y entonces:

(i) $u \in D(A)$, y

(ii) $Au = \lim_{n\to\infty} Au_n \in Y$.

El conjunto de los operadores cerrados de X en Y se denota $\mathcal{C}(X, Y)$ ($\mathcal{C}(X)$ si $X = Y$).

<u>Teorema</u> El generador infinitesimal de un C_0-semigrupo es un operador cerrado, densamente definido, que determina el semigrupo de manera única.

<u>Demostración</u>: Sea $A : D(A) \subseteq X \to X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ en X de Banach.

Por demostrar:
- $A \in \mathcal{C}(X)$
- $D(A)$ es denso en X

y:

- si A es el generador de otro C_0-semigrupo, $\{\tilde{S}(t)\}_{t\geq 0}$, entonces

$$\tilde{S}(t)u = S(t)u, \quad \forall u \in D(A).$$

$\underline{A \in \mathcal{C}(X)}$: Sea $u_n \in D(A)$ de Cauchy y denotamos $u = \lim_{n\to\infty} u_n \in X$, tal que Au_n de Cauchy.

Denotamos $v := \lim_{n\to\infty} Au_n$ en X.

Por el lema 3 (d), ec. (H), sabemos que

$$S(t)u_n - u_n = \int_0^t S(\tau)Au_n \, d\tau, \quad \forall t > 0$$

Por la convergencia uniforme de $S(\cdot)Au_n$ en $[0,t]$ cuando $n\to\infty$ obtenemos

$$S(t)u - u = \int_0^t S(\tau)v \, d\tau, \quad \forall t > 0$$

Mult. por $\frac{1}{t}$ y tomando el límite cuando $t\to 0^+$

$$\frac{1}{t}\left(S(t)u - u\right) = \frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)v \, d\tau$$

$$\downarrow$$

v cuando $t \to 0^+$

ya que $\frac{1}{h}\int_t^{t+h} S(\tau)v \, d\tau \to S(t)v$ $\forall t\geq 0, \forall v \in X$

cuando $h\to 0^+$ (lema (3)(c))

Esto demuestra que $u \in D(A)$ y $Au = v$.

$\therefore A \in \mathcal{C}(X)$.

$\underline{D(A) \text{ es denso}}$: notamos que por el lema 3(d):

$$\frac{1}{t}\int_0^t S(\tau)u\, d\tau \in D(A) \qquad \forall u \in X \quad \forall t > 0.$$

Entonces la sucesión

$$D(A) \ni u_n := n\int_0^{1/n} S(\tau)u\, d\tau \longrightarrow u \in X \quad \text{cuando } n \to \infty$$

(Lema 3 (c))

Concluimos que $\overline{D(A)} = X$.

Finalmente, sea $u \in D(A)$, $t > 0$ y consideremos el mapeo

$$\begin{cases} f : [0,t] \longrightarrow X \\ f(\tau) := S(t-\tau)\tilde{S}(\tau)u, \qquad \tau \in [0,t] \end{cases}$$

Por el Lema 1 y $\tilde{S}(\tau)u \in D(A)$ (Lema 3(b)) es fácil verificar que el mapeo $\tau \mapsto f(\tau)$ es diferenciable en $[0,t]$. Aplicando el Lema 3(b), obtenemos

$$\begin{aligned} f'(\tau) &= -AS(t-\tau)\tilde{S}(\tau)u + S(t-\tau)A\tilde{S}(\tau)u \\ &= -AS(t-\tau)\tilde{S}(\tau)u + AS(t-\tau)\tilde{S}(\tau)u \\ &= 0 \end{aligned}$$

Es decir, f es constante y $f(0) = f(t)$ implica que $S(t)u = \tilde{S}(t)u \quad \forall u \in D(A)$
Como $D(A)$ es denso en X, concluimos que

$$S(t) = \hat{S}(t) \in \mathcal{B}(X) \quad \forall t$$

$\square$

Vamos a dar una relación con los semigrupos uniformemente continuos.

Teorema: Sea $A: D(A) \subseteq X \to X$ el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $A \in \mathcal{B}(X)$ (el generador es un operador acotado, es decir, $\exists M > 0$ tal que $\|Au\| \leq M\|u\|, \quad \forall u \in D(A)$)

(ii) El dominio de A es todo X, $D(A) = X$.

(iii) El dominio de A es cerrado, $D(A) = \overline{D(A)}$

(iv) El semigrupo es uniformemente continuo.

En todos estos casos el semigrupo tiene la representación

$$S(t) = e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}, \quad \forall t \geq 0$$

Dem. Ver Engel, Nagel (2000), teorema I.3.7, corolario II.1.5

$\square$

Nota: observamos que $D(A)$ es crucial para definir el semigrupo. En ocasiones es fácil calcular Au para ciertos elementos de $D(A)$. ¿Cómo identificar la totalidad de $D(A)$?