Lección 2.4: El teorema de Hille-Yosida.

$A : D(A) \subseteq X \to X$ generador de un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$. Sabemos que: $A \in \mathcal{C}(X)$ (operador cerrado), $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $\forall t \geq 0$ si $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ y además

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda\tau} S(\tau)\, d\tau \quad \cdots (1)$$

$R(\lambda, A) \in \mathcal{B}(X)$, $R(\lambda, A) : X \to D(A)$ es la "transformada de Laplace del semigrupo".

Lema 1 (ecuación del resolvente)
Sea $A \in \mathcal{C}(X, X)$, densamente definido $\overline{D(A)} = X$. Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$ entonces:

$$(2) \cdots \quad R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

$$(3) \cdots \quad R(\lambda, A) R(\mu, A) = R(\mu, A) R(\lambda, A)$$

La ecuación (2) se conoce como la ecuación del resolvente.

Demostración: Si $\lambda, \mu \in \rho(A)$ entonces $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$, $R(\mu, A) = (\mu - A)^{-1}$ y claramente:

$$\begin{aligned} R(\lambda, A) - R(\mu, A) &= R(\lambda, A)(\mu - A) R(\mu, A) + \\ &\quad - R(\lambda, A)(\lambda - A) R(\mu, A) \\ &= (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A) \quad \Rightarrow (2) \end{aligned}$$

Si $\mu=\lambda$ entonces (3) es trivial.
Si $\mu\neq\lambda$ entonces aplicamos (2)

$$\begin{aligned} R(\lambda,A)R(\mu,A) &= (\mu-\lambda)^{-1}(R(\lambda,A)-R(\mu,A)) \\ &= (\lambda-\mu)^{-1}(R(\mu,A)-R(\lambda,A)) \\ &= R(\mu,A)R(\lambda,A) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (3) $\square$

<u>Definición</u> Sean $A,B\in\mathcal{L}(X,Y)$ operadores lineales. Se dice que A es una extensión de B (B es una restricción de A) si $D(B)\subset D(A)$ y $Au=Bu$ $\forall\, u\in D(B)$. Se denota $A\supset B$ ($B\subset A$).

<u>Corolario 2</u> Si $A\in\mathcal{L}(X)$ y $\lambda\in\rho(A)$ entonces

$$R(\lambda,A)A \subset A\,R(\lambda,A) = Id + \lambda R(\lambda,A) \in \mathcal{B}(X)$$

Es decir, $R(\lambda,A)$ y A conmutan.

<u>Dem.</u> Se deduce directamente del Lema 1 $\square$

<u>2.2 Generación de semigrupos</u>

Problema: caracterizar a todos los operadores lineales $A\in\mathcal{L}(X)$ que son generadores infinitesimales de algún C_0-semigrupo, así como determinar al semigrupo a partir de A.

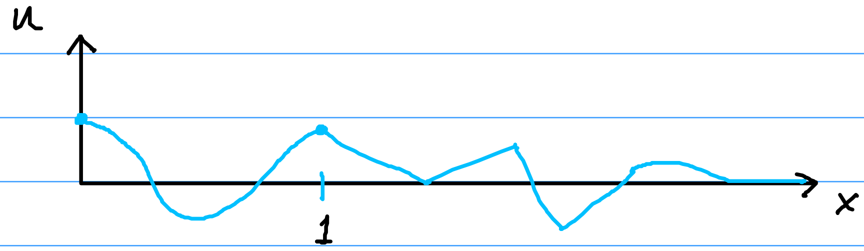
Sabemos que si $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo entonces <u>necesariamente</u> el generador $A : D(A) \subseteq \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ satisface :

(i) $A \in \mathcal{C}(\mathbb{X})$ (cerrado).
(ii) $D(A)$ es denso en $\mathbb{X}$.
(iii) $\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda \leq \omega \}$ para cierto $\omega \in \mathbb{R}$.

Estas condiciones, sin embargo, no son suficientes.

<u>Ejemplo</u>: Sea

$$(4) \cdot\cdot \quad \mathbb{X} := \left\{ u \in C([0,\infty)) : \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \; C^1([0,1]) \right\}$$



Sea la norma $\|u\| := \sup_{x\in[0,\infty)} |u(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |u'(x)|$

Es posible demostrar que $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es de Banach.

Se define el operador

$$(S) \cdots \begin{cases} Au := u' \\ D(A) := \left\{ u \in C^1([0,\infty)) : \lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \; u' \in X \right\} \end{cases}$$

Es posible demostrar que:

- $A \in \mathcal{C}(X)$
- $D(A)$ es denso en X
- si $\operatorname{Re}\lambda > 0$ entonces $\lambda \in \rho(A)$ (ejercicio).

Supongamos que A genera un C_0-semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset B(X)$. Sean $u \in D(A)$, $\theta \geq 0$ fijo, $t \geq 0$ arbitrario; definimos

$$w(\tau) := (S(t-\tau)u)(\theta+\tau), \qquad 0 \leq \tau \leq t$$

w es diferenciable ($u \in D(A)$ y $t \mapsto S(t)u$ es diferenciable). Calculamos:

$$\begin{aligned} \dot{w}(\tau) = \frac{dw}{d\tau} &= -S(t-\tau)Au(\theta+\tau) + S(t-\tau)u'(\theta+\tau) \\ &= -S(t-\tau)u'(\theta+\tau) + S(t-\tau)u'(\theta+\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\forall\, \tau \in [0,t]$$

$w(\tau)$ es constante en $\tau \in [0,t]$. $w(0) = w(t)$ implica que

$$(S(t)u)(\theta) = u(t+\theta), \qquad \forall t \geq 0$$

$\Rightarrow$ $S(t)$ es el operador traslación izquierda.

Pero $S(t)$ no mapea X en X.

Se requieren más condiciones sobre A para generar un C_0-semigrupo. En particular
$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega} \qquad \forall \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

Nos interesa encontrar condiciones necesarias y suficientes para que un operador dado genere un C_0-semigrupo.

Teoremas de tipo Hille-Yosida

En 1948, independientemente, Hille y Yosida encontraron las condiciones necesarias y suficientes para que un operador genere un C_0-semigrupo contractivo.

- Hille aproximó el semigrupo usando el resolvente $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$,
$$e^{tA} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{t} R\left(\frac{n}{t}, A\right)\right)^n$$
(potencias de operadores acotados)

- Yosida aproximó el semigrupo usando una sucesión (los aproximantes de Yosida) que también involucra al resolvente
$$\begin{cases} A_n := nAR(n,A) \\ e^{tA} = \lim_{n\to\infty} e^{tA_n} \end{cases}$$

operadores acotados que conmutan mutuamente.

Nota: condición necesaria para el generador

$\forall \operatorname{Re}\lambda > \omega$, $\lambda \in \rho(A)$

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^n} \quad \forall\, n \geq 1.$$

Teorema (Hille-Yosida ; caso contractivo)

Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to X$ en un espacio de Banach X es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo contractivo sí y sólo sí :

(a) A es un operador cerrado densamente definido, y

(b) Para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > 0$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda} \quad \cdots \quad (4)$$

Demostración : La necesidad de estas condiciones ya se ha demostrado : si el semigrupo es contractivo entonces $M=1$, $\omega=0$ y (4) se obtiene tomando $n=1$ en las estimaciones del resolvente.

Suficiencia: supongamos (a) y (b). Se definen los aproximantes de Yosida:

$$(5)\cdots \begin{cases} A_n := nAR(n,A) = n^2R(n,A) - n\,Id \\ A_n : X \to D(A), \qquad n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Por (b), $\forall n\in\mathbb{N}$, $n\in\rho(A)$ y $R(n,A)$ está definido, es acotado, $R(n,A) : X \to D(A)$. De la última igualdad se deduce que $A_n \in \mathcal{B}(X)$, $\forall n\in\mathbb{N}$. Claramente:

$$n^2R(n,A) - n\,Id = n^2R(n,A) - n(n-A)R(n,A) = A_n$$

Además, $A_nA_m = A_mA_n$ $\forall n,m\in\mathbb{N}$ ya que los resolventes conmutan.

Primero probaremos que:

$$(6)\cdots \quad A_nu \longrightarrow Au \quad \forall u\in D(A) \quad \text{si } n\to\infty$$

Sabemos que $nR(n,A)u - u =$
$= nR(n,A)u - (n-A)R(n,A)u = AR(n,A)u$
$= R(n,A)Au$ si $u\in D(A)$ ya que A y $R(n,A)$ conmutan en $D(A)$.

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
\| n R(n,A)u - u \| &= \| R(n,A) A u \| \\
&\leq \| R(n,A) \| \, \| Au \| \\
&\underset{(4)}{\leq} \frac{1}{n} \| Au \| \longrightarrow 0 \quad \text{si } n \to \infty
\end{aligned}
$$

Es decir, $n R(n,A) u \to u$ si $n \to \infty$ siempre que $u \in D(A)$. Pero como $\| n R(n,A) \| \leq 1$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y $D(A)$ es denso en X, obtenemos

$$n R(n,A) u \longrightarrow u \quad \text{si } n \to \infty \quad \forall u \in X.$$

En particular, si $u \in D(A)$ entonces

$$A_n u = n A R(n,A) u = \underbrace{n R(n,A) A u}_{\substack{\downarrow \\ Au \ \text{si } n \to \infty \\ \text{si } u \in D(A)}}$$

Esto prueba (6).

Definimos la sucesión de operadores:

$$
\begin{aligned}
S_n(t) := e^{tA_n} &= e^{-nt} e^{n^2 t R(n,A)} \\
&= e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(n^2 t)^k}{k!} R(n,A)^k
\end{aligned}
$$

Como $\| R(n,A) \| \leq \frac{1}{n}$ obtenemos

$$\|S_n(t)\| \leq e^{-nt} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^{2k}\, t^k}{k!} \|R(n,A)\|^k$$

$$\leq e^{-nt} \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k t^k}{k!}}_{e^{nt}} = 1 \qquad \forall\ t \geq 0$$

Así, para cada $n \in \mathbb{N}$, $\{S_n(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo contractivo (de hecho, es uniformemente continuo ya que su generador A_n es acotado $\forall\ n \in \mathbb{N}$). Aquí $D(A_n) = X$.

Si $n, m \in \mathbb{N}$, como $A_n A_m = A_m A_n$ y los resolventes conmutan, entonces

$$A_m S_n(t) = S_n(t) A_m \qquad \forall t \geq 0$$

Calculamos entonces:

$$S_n(t)u - S_m(t)u = \int_0^t \frac{d}{d\xi}\big(S_m(t-\xi) S_n(\xi) u\big)\, d\xi$$

$$= \int_0^t S_m(t-\xi) S_n(\xi) \big(A_n u - A_m u\big)\, d\xi$$

ya que $\frac{d}{dt}\big(S_n(t)u\big) = A_n S_n(t) u = S_n(t) A_n u$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Por la convergencia (6), $A_n u \to A u$ $\forall u \in D(A)$ si $n \to \infty$; entonces concluimos que $\forall\ t \geq 0$ fijo, y $u \in D(A)$:

$$\| S_n(t)u - S_m(t)u \| \leq t \, \| A_n u - A_m u \| \to 0$$
si $n, m \to \infty$

Es decir :

$$(7) \ldots \quad S(t)u := \lim_{n\to\infty} S_n(t)u \quad \text{existe} \quad \forall t \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Como $\|S_n(t)\| \leq 1 \quad \forall t, \forall n$ entonces

$$\|S(t)u\| \leq \|u\| \qquad \forall u \in D(A).$$

Dado que $D(A)$ es denso en X podemos extender $S(t)$ a todo X por continuidad

$$\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$$

es un C_0-semigrupo contractivo.

En efecto, $\|S(t)\| \leq 1 \quad \forall t \geq 0$ por densidad de $D(A)$ en X. Además, $\forall t > 0$ y $u, v \in X$ se tiene que

$$\|S(t)u - u\| \leq \|S(t)u - S(t)v\| + \|S(t)v - S_n(t)v\| + \|S_n(t)v - v\| + \|v - u\|$$

$$\leq \|S(t)v - S_n(t)v\| + \|S_n(t)v - v\| + 2\|u - v\|$$

$\|S(t)\| \leq 1$

Para $T>0$, $\varepsilon>0$ tomamos $v = u_\varepsilon \in D(A)$ con $\|u-u_\varepsilon\| < \varepsilon$ y $n>>1$ suficientemente grande tal que $\|S(t)u_\varepsilon - S_n(t)u_\varepsilon\| < \varepsilon$ $\forall\, t\in[0,T]$. Así,

$$\|S(t)u-u\| < 3\varepsilon + \|S_n(t)u_\varepsilon - u_\varepsilon\|$$

Como $\{S_n(t)\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo uniformemente continuo, para la misma $\varepsilon>0$ existe $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ tal que $\|S_n(t) - I_a\| < \varepsilon$ $\forall\, t\in(0,\delta)$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\|S_n(t)u_\varepsilon - u_\varepsilon\| &\leq \|S_n(t) - I_a\|\,\|u_\varepsilon\| \\ &< \varepsilon\|u_\varepsilon\|\end{aligned}$$

Pero $\{u_\varepsilon\}$ es acotada, $u_\varepsilon \in D(A)$ obtenemos:

$$\|S(t)u - u\| < C\varepsilon \quad \text{si} \quad t\in[0,\delta)$$

$\therefore$ obtenemos continuidad fuerte del semigrupo. (S_3).

(S_1) y (S_2) se satisfacen claramente:
$S(0)u = \lim S_n(0)u = u$, y además
$S(t+s)u = \lim (S_n(t)S_n(s)u) = S(t)S(s)u$.

Concluimos que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo contractivo.

Sea $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \subseteq X \to X$ su generador infinitesimal.

Sean $u \in D(A)$ y $h > 0$. Sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} S_n(t) A_n u = S(t) A u$$

uniformemente en compactos de $[0,\infty)$.
En efecto,

$$\| S_n(t) A_n u - S(t) A u \| \leq \| S_n(t) A_n u - S_n(t) A u \| + \| S_n(t) A u - S(t) A u \|$$

$$\leq \underbrace{\| S_n(t) \|}_{\leq 1} \, \| A_n u - A u \| + \| (S_n(t) - S(t)) A u \|$$

$$\leq \underbrace{\| A_n u - A u \|}_{\substack{\to 0 \text{ si } n\to\infty \\ \forall u \in D(A)}} + \underbrace{\| (S_n(t) - S(t)) A u \|}_{\substack{\to 0 \text{ si } n\to\infty \\ \forall A u \in X}}$$

Por lo tanto, $\forall u \in D(A)$

$$S(h)u - u = \lim_{n\to\infty} \left(S_n(h) u - u \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_0^h S_n(\tau) A_n u \, d\tau$$

$$= \int_0^h S(\tau) A u \, d\tau$$

Dividiendo entre h y tomando el lím cuando $h \to 0^+$ obtenemos

$$\tilde{A}u = \lim_{h\to 0^+} h^{-1}(S(h) - Id)u$$
$$= \lim_{h\to 0} \int_0^h S(\tau)Au \, d\tau = Au$$

Esto implica que $u \in D(\tilde{A})$ y además $Au = \tilde{A}u$ cuando $u \in D(A)$.

$D(A) \subset D(\tilde{A})$ y $\tilde{A}u = Au$ en $D(A)$

Como $\tilde{A}$ es el generador de un C_0-semigrupo contractivo entonces $\omega = 0$ y $1 \in \rho(\tilde{A})$. Por lo tanto $(I - \tilde{A})$ es invertible, $R(1, \tilde{A}) = (I - \tilde{A})^{-1} : X \to D(\tilde{A})$ es acotado. Además, $1 \in \rho(A)$ por hipótesis, por lo que

$$(I - \tilde{A})D(A) = (I - A)D(A) = X$$

$$R(1, A) = (I-A)^{-1} : X \to D(A)$$

$$\Rightarrow \quad (I - \tilde{A})D(A) = X \quad \text{es decir}$$

$$(I - \tilde{A})^{-1}X = D(A)$$

Esto implica que $D(\tilde{A}) = D(A)$.

concluimos que $(A, D(A)) = (\tilde{\hat{A}}, D(\tilde{\hat{A}}))$ y A es el generador de un C_0-semigrupo contractivo.

$\square$

<u>Observación</u>: Por el lema de reescalamiento si tenemos un C_0-semigrupo cuasi contractivo es decir, de tipo $(1, \omega)$ para cierto $\omega \in \mathbb{R}$ que satisface

$$\|S(t)\| \leq e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0$$

entonces $\tilde{S}(t) := e^{-\omega t} S(t)$ es un C_0-semigrupo contractivo con generador $(A - \omega I, D(A))$. Por lo tanto es fácil adaptar el teorema de Hille-Yosida al caso cuasi-contractivo:

<u>Corolario</u> (caso cuasi-contractivo)

Un operador lineal $A : D(A) \subseteq X \to X$, X de Banach, es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo cuasi-contractivo, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ con $\|S(t)\| \leq e^{\omega t}$ $\forall t \geq 0$ y cierto $\omega \in \mathbb{R}$ si y sólo si:

(a) A es un operador cerrado densamente definido, y

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} \lambda > \omega$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y $\|R(\lambda, A)\| \leq \dfrac{1}{\operatorname{Re} \lambda - \omega}$.

Observación: En el caso de un C_0-grupo ((S_j) se cumplen $\forall t \in \mathbb{R}$) con generador A, se pueden definir $S_+(t) := S(t)$, $S_-(t) := S(-t)$, $\forall t \geq 0$. Ambas familias son C_0-semigrupos con generadores $A_+ := A$, $A_- = -A$, respectivamente. Se pueden combinar las condiciones del teorema de Hille-Yosida para caracterizar a los generadores de C_0-grupos contractivos, es decir, grupos de isometrías.

Corolario un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador de un grupo de isometrías $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, $\|S(t)\| = 1$ $\forall t \in \mathbb{R}$, si y sólo si:

(a) A es un operador cerrado densamente definido, y

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\mathrm{Re}\,\lambda|}.$$