Lección 2.5: Ejemplos. Teorema de Feller-Miyadera-Phillips.

Teo. Hille-Yosida: $A : D(A) \subset X \to X$ es el generador de un C_0-semigrupo contractivo si y sólo si $\overline{D(A)} = X$, $A \in \mathcal{C}(X)$ y $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y $\|R(\lambda, A)\| \leq (\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$.

caso cuasi-contractivo: $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda > \omega$
$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

Ejemplos:

(I) Laplaciano en $\mathbb{R}^n$.

Motivación: resolver el problema de Cauchy para la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$:

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t = \Delta u, & x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

donde $f = f(x)$ es una función conocida. Usando la transformada de Fourier es posible demostrar: si $f \in C(\mathbb{R}^n)$, acotada, entonces

$$(2) \cdots \ u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y)\, dy$$

es de clase $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$ y es solución del problema de Cauchy (1).

(2) $\Rightarrow$ $u(x,t) = \underbrace{S(t)}_{\text{semigrupo}} f$ "operador solución"

Es solución de $\frac{du}{dt} = Au = \Delta u$

Seleccionamos : $X = L^2(\mathbb{R}^n)$ (las soluciones de Tychonov no están en $L^2(\mathbb{R}^n)$)

$D(A) = H^2(\mathbb{R}^n)$ denso en X.

$A := \Delta$ $\qquad \Delta : D(\Delta) \subset X \to X$

Transformada de Fourier :

$$S(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha \partial^\beta u| < \infty \quad \alpha, \beta \text{ multi-índices} \right\}$$

$\wedge : S(\mathbb{R}^n) \longrightarrow S(\mathbb{R}^n)$ denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$

Plancherel : $\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}$

$\wedge : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ isomorfismo.

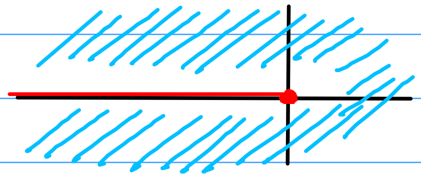
$u \in H^2(\mathbb{R}^n)$ si y sólo si $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $|\xi|^2 \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|_{H^2} \cong \|u\|_{L^2} + \| |\xi|^2 \hat{u} \|_{L^2}$$

Examinamos la ecuación del resolvente :

$$(\lambda - \Delta) u = f \qquad \cdots (3)$$

Sea $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ y $\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$



$u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \Rightarrow \Delta u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Tomando transformada:

$$\hat{f} = (\lambda + |\xi|^2)\hat{u}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{u} = \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$u := R(\lambda, \Delta) f := \left(\frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \right)^{\vee}$$

$\wedge : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ es una biyección

$\therefore \quad u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^2(\mathbb{R}^n)$.

Por lo tanto tenemos:

$$(\lambda - \Delta) u = \left(\frac{\lambda \hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} - \frac{i^2 |\xi|^2 \hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \right)^{\vee} = f$$

(aquí necesitamos $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$).

$$A = \Delta : D(\Delta) = H^2(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$$

Si $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ entonces claramente $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ tenemos:

$$\left| \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \right| \leq C_\lambda |\hat{f}| \quad \cdots (4)$$

donde
$$C_\lambda = \begin{cases} \dfrac{1}{|\lambda|}, & \text{si } \operatorname{Re}\lambda \geq 0 \\ \dfrac{1}{|\operatorname{Im}\lambda|}, & \text{si } \operatorname{Re}\lambda < 0 \end{cases}$$

Por el teorema de Plancherel y por densidad de $S(\mathbb{R}^n)$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$\frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \in S_\xi(\mathbb{R}^n)$$

por lo tanto $R(\lambda, \Delta) f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Podemos definir

$$u := R(\lambda, \Delta) f \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

(Plancherel) $$\|u\|_{L^2} = \|\hat{u}\|_{L^2} = \| \widehat{R(\lambda,\Delta)f} \|_{L^2}$$

$$= \left\| \frac{\hat{f}}{\lambda + |\xi|^2} \right\|_{L^2}$$

$$\leq C_\lambda \|f\|_{L^2}$$

$\Rightarrow$ $R(\lambda, \Delta)$ es un operador acotado.

$$\|R(\lambda,\Delta)\| \leq C_\lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$$

Sea $f_j \in S(\mathbb{R}^n)$ sucesión tal que $f_j \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^n)$, cuando $j \to \infty$.

Entonces, $\quad u_j := R(\lambda,\Delta)f_j \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$\forall j \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \quad |\xi|^2 |\hat{u}_j| = |\xi|^2 \left|(\lambda+|\xi|^2)^{-1}\right| |\hat{f}_j|$$

$$\leq \tilde{C}_\lambda |\hat{f}_j|$$

$$\Rightarrow \quad \|u_j\|_{H^2} \leq \tilde{C}_\lambda \|f_j\|_{L^2}$$

$\therefore \quad \{u_j\}$ es de cauchy en $H^2(\mathbb{R}^n)$

$$\therefore \quad u_j = R(\lambda,\Delta)f_j \longrightarrow w \in H^2(\mathbb{R}^n)$$

Pero,

$$\|u-w\|_{L^2} = \|\hat{u}-\hat{w}\|_{L^2} \leq \overbrace{\left\| \frac{\hat{f}}{\lambda+|\xi|^2} - \frac{\hat{f}_j}{\lambda+|\xi|^2} \right\|_{L^2}}^{\to 0}$$

$$+ \underbrace{\left\| \frac{\hat{f}_j}{\lambda+|\xi|^2} - \hat{w} \right\|_{L^2}}_{\to 0}$$

$j \to \infty$

$$\Rightarrow \quad u_j = R(\lambda,\Delta)f_j \longrightarrow u \quad \text{en } H^2(\mathbb{R}^n)$$

si $j \to \infty$.

Y además $\quad (\lambda-\Delta)u_j = f_j \quad \forall j \in \mathbb{N}$

Tomando el límite y por densidad

$$(\lambda-\Delta)u = f$$

$\therefore$ $(\lambda - \Delta)$ es invertible $\forall \lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ con inversa acotada, $R(\lambda, \Delta) = (\lambda - \Delta)^{-1}$.

$$\lambda \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \Rightarrow \lambda \in \rho(\Delta)$$

Kato, pág. 167 : si $\lambda - A$ es biyectivo $D(A)$ en X, con inversa acotada entonces $R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}$ es cerrado. Definiendo $D((\lambda - A)^{-1}) = \mathcal{R}(\lambda - A)$ (rango) entonces $\lambda - A$ es cerrado.

Concluimos que Δ es cerrado.

Además, $\sigma(\Delta) \subseteq (-\infty, 0]$

Es decir, si $\lambda > 0$ (real) entonces $\lambda \in \rho(\Delta)$ y

$$\| R(\Delta, \lambda) \| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Por el teorema de Hille-Yosida, $\Delta : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ genera un C_0-semigrupo contractivo. en $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$S(t) f = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} f(y) \, dy$$

$$\| S(t) \| \leq 1.$$

(II) Laplaciano en Ω con datos de Dirichlet.

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^\infty$.
Consideremos el problema:

$$(5) \ldots \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } (x,t) \in \Omega \times (0,\infty) \\ u = 0 & \text{sobre } (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty) \\ u(x,0) = f(x) & \text{en } (x,t) \in \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

Consideremos:

$$X = L^2(\Omega)$$

$$A = \Delta$$

$$D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$$
(denso en X)

Sea $u_j \in D(A)$ tal que $\begin{cases} u_j \to u & \text{en } L^2(\Omega) \\ \Delta u_j \to f & \text{en } L^2(\Omega) \end{cases}$

Por regularidad de soluciones al problema elíptico (ver Evans):

$$\|u_j - u_k\|_{H^2(\Omega)} \leq C\Big(\|\Delta u_j - \Delta u_k\|_{L^2(\Omega)} + \\ + \|u_j - u_k\|_{L^2(\Omega)} \Big)$$

$\therefore$ $\{u_j\}$ es de Cauchy en $H^2(\Omega)$.

$$u_j \to u \in H^2(\Omega)$$

$u_j \in H_0^1(\Omega)$ por continuidad de la traza

$\gamma_0(u) = 0 \quad \therefore \quad u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \in D(A)$

Además, $\Delta u_j \longrightarrow \Delta u$ en $L^2(\Omega)$ y por lo tanto $f = \Delta u$.

$$\therefore \quad \Delta \in \mathcal{C}(X) = \mathcal{C}(L^2(\Omega)).$$

Para cada $\lambda \geq 0$, el problema:

$$(6) \cdots \begin{cases} -\Delta u + \lambda u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ $\forall f \in L^2(\Omega)$.

Lax–Milgram regularidad elíptica

$$\Rightarrow \quad (\lambda - \Delta) u = f \quad \forall \lambda \geq 0$$
es soluble.

$\therefore \quad (\lambda - \Delta) : D(\Delta) \longrightarrow X$ es invertible $\forall \lambda \geq 0$.

Es decir, $[0, \infty) \subset \rho(\Delta)$.

Formulación débil:

$$a(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx$$

$$a(u,v) + \lambda \langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

$$\|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq a(u,u) + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \|u\|_{L^2}^2 \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2} = \|(\lambda-\Delta)^{-1} f\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\Rightarrow \quad \|R(\lambda,\Delta)\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall\ \lambda > 0.$$

Por Hille-Yosida, $\Delta : D(\Delta) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ genera un semigrupo contractivo:

$$\|S(t)\| \leq 1$$

$u := S(t)f$ es "solución" de (S).

Teorema de Feller-Miyadera-Phillips

El teorema de Hille-Yosida se puede adaptar fácilmente al caso cuasi-contractivo:

$\forall\ \lambda \in \mathbb{C},\ \operatorname{Re}\lambda > \omega \Rightarrow \rho(A) \ni \lambda$

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$$

$(M,\omega) = (1,\omega)$
cuasi-contractivo.

En el caso general todas las potencias del resolvente son requeridas.

Teorema (Feller - Miyadera - Phillips)
Sea $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ un operador lineal en X, Banach. A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, de tipo (M, ω) con $M \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$ si y sólo si

(a) A es un operador cerrado densamente definido, y

(b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda > \omega$ se tiene que $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\mathrm{Re}\,\lambda - \omega)^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

__Demostración__: Sabemos que (a), (b) son condiciones necesarias.

Para demostrar la suficiencia definimos

(aproximación de Hille)
$$S_n(t) := \left(Id - \frac{t}{n} A \right)^{-n}$$
$$\forall\, t > 0, \quad n \in \mathbb{N}$$

De (b), claramente $S_n(t) \in \mathcal{B}(X)$ para todo $\frac{n}{t} > \omega$ (en particular, $\forall\, t > 0$ fijo y $n \gg 1$).

Mas aún, son uniformemente acotados si $t>0$ fijo y si $n\to\infty$:

$$\|S_n(t)\| = \left\|\left(\frac{t}{n}\right)^{-n}\left(\frac{n}{t}-A\right)^{-n}\right\|$$

$$= \left(\frac{n}{t}\right)^{n}\left\|R\left(\frac{n}{t},A\right)^{n}\right\|$$

(b) $$\leq \left(\frac{n}{t}\right)^{n}\frac{M}{\left(\frac{n}{t}-\omega\right)^{n}} = \frac{M}{\left(1-\frac{t}{n}\omega\right)^{n}}$$

Vamos a probar que:

$S_n(t) \to Id$ fuertemente (en la topología de $\mathcal{B}(X)$) cuando $t\to 0^+$, para cada $n\in\mathbb{N}$ fijo.

Lema auxiliar: Sea $A_j \in \mathcal{B}(X,Y)$, $B_j \in \mathcal{B}(Y,Z)$, suponiendo $A_j \to A$, $B_j \to B$, fuertemente entonces $B_jA_j \to BA$ fuertemente si $j\to\infty$.

Dem. Ejercicio: usar

$$B_jA_ju - BAu = B_j(A_j-A)u + (B_j-B)Au$$

$\square$

Por el lema auxiliar, basta demostrar que

$$\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} \longrightarrow I \quad \text{fuertemente}$$

si $t \to 0$.

para $u \in D(A)$ se tiene:

$$\left\| \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} u - u \right\| = \frac{t}{n} \left\| \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} Au \right\|$$

$$\leq \frac{t}{n} C_n \|Au\| \longrightarrow 0$$

si $t \to 0$
$\forall n$ fijo

$$\therefore \quad \left\| \left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-1} - I_d \right\| \to 0$$

si $t \to 0$
$\forall n$ fijo.

$S_n(t)$ también tiene un límite fuerte cuando $n \to \infty$ $\forall$ $t \geq 0$ fijo.

$D(A^2)$ es denso en $\underline{X}$ (lema anterior).

$$D(A^2) = (A - \lambda I)^{-1} D(A) \qquad \forall \ \mathrm{Re}\,\lambda > \omega.$$

Tarea I-2 Demostrar

$$\dot{S}_n(t) = \frac{d}{dt} S_n(t) = A\left(I_d - \frac{t}{n}A\right)^{-n-1} \quad \cdots (*)$$

en sentido de la norma de operadores

$$\lim_{h \to 0} h^{-1}\left(S_n(t+h) - S_n(t)\right) \qquad \forall t \geq 0.$$

Aplicando $(*)$:

$$S_n(t)u - S_m(t)u = \lim_{\epsilon \to 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \frac{d}{d\xi}\Big(S_m(t-\xi)S_n(\xi)u\Big)\, d\xi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \underbrace{\Big[-\dot{S}_m(t-\xi)S_n(\xi) + S_m(t-\xi)\dot{S}_n(\xi)\Big]}_{(*)} u\, d\xi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \Big[-A\Big(I - \frac{t-\xi}{m}A\Big)^{-m-1}\Big(I - \frac{\xi}{n}A\Big)^{-n} + \Big(I - \frac{t-\xi}{m}A\Big)^{-m} A\Big(I - \frac{\xi}{n}A\Big)^{-n-1}\Big] u\, d\xi$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\epsilon}^{t-\epsilon} \Big(\frac{\xi}{n} - \frac{t-\xi}{m}\Big)\Big(I - \frac{(t-\xi)}{m}A\Big)^{-m-1}\Big(I - \frac{\xi}{n}A\Big)^{-n-1} A^2 u\, d\xi$$

Por lo tanto,

$$\|(S_n(t) - S_m(t))u\| \le C\, \|A^2 u\| \int_0^t \Big(\frac{\xi}{n} + \frac{t-\xi}{m}\Big) d\xi$$

$$\le C\, \|A^2 u\|\, \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\Big) \longrightarrow 0$$

si $n, m \to \infty$

$\therefore$ el límite existe cuando $n \to \infty$, $t > 0$ fijo:

$$S(t) := \lim_{n\to\infty} S_n(t)$$

$$\|S_n(t)\| \le M\Big(1 - \frac{t}{n}\omega\Big)^{-n}$$

$$\Rightarrow \quad \|S(t)\| \le M e^{\omega t} \quad \forall\, t \ge 0.$$

Hay que verificar que:

(i) $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo

(ii) su generador es A.

Claramente, $S_n(0) = I \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \quad S(0) = \lim_{n\to\infty} S_n(0) = I \quad \Rightarrow (S_1).$

En intervalos compactos de t, la convergencia, $S_n(t)u \longrightarrow S(t)u$, $\forall u\in X$, es uniforme.

$S_n(t)u$ es continua en $t\in[0,\delta]$, $\forall u\in D(A^2)$
$D(A^2)$ es denso en X

$\Rightarrow \quad S(t)u$ es continuo en $t\in[0,\delta]$
$\forall u\in X$.

$\therefore \quad (S_3)$

Además, $\forall s\leq t$ por $(*)$:

$$\frac{d}{ds}\left(S_n(t-s)S_n(s)u\right) = \frac{2s-t}{n}\left(I-\frac{t-s}{n}A\right)^{-n-1}\left(I-\frac{s}{n}A\right)^{-n-1} \times A^2u$$

$\forall u\in D(A^2)$.

Tomando $n\to\infty$ obtenemos

$$\frac{d}{dt}\left(S(t-s)S(s)\right) = 0 \quad \forall\ 0\leq s\leq t$$
$\forall u\in D(A^2)$

$$\Rightarrow \quad S(t_1)S(t_2) = S(t_1+t_2) \quad \forall\, t_1,t_2 \geq 0$$

por densidad de $D(A^2)$.

$\therefore$ (S_2)

concluimos que $\{S(t)\}$ es un C_0-semigrupo.

Finalmente,

$$\underbrace{\frac{d}{dt} S_n(t)}_{\frac{d}{dt}S(t)} = \underbrace{A\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n-1}}_{A}$$

si $n \to \infty$

Ejercicio.

Por lo tanto,

$$\frac{d}{dt}\Big(S(t)u\Big)_{t=0} = Au$$

$\forall\, u \in D(A)$

El generador de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$, $\tilde{A}$, es una extensión de A: $A \subset \tilde{A}$.

Por un argumento similar a la prueba de Hille-Yosida, se puede verificar que $(A, D(A)) = (\tilde{A}, D(\tilde{A}))$.

$\therefore$ A es el generador de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$.

Tarea I-3 Probar que todas las potencias del resolvente son requeridas. Tomar

$X = C_0(\mathbb{R}) \times C_0(\mathbb{R})$

$\|(u,v)\| = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}$

$m(s) = is, \quad s \in \mathbb{R}$

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ 0 & m \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$D(A) = \{ (mu, mv) \in X \}$

Demostrar que $\|R(\lambda, A)\| \le \dfrac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega}$ $\quad n=1$

Sin embargo, A no genera un C_0-semigrupo.