Lección 2.6: Teorema de Lumer-Phillips.

En los teoremas de Hille-Yosida se requiere información precisa del operador resolvente. En aplicaciones, esto puede ser difícil. Nos interesa dar una caracterización del generador que no requiera esta información. Esto es posible en el caso cuasi-contractivo (teo. de Lumer-Phillips).

Sea X un espacio de Banach y X^* su dual. Para cada $\ell \in X^*$, $\ell(u) = \langle \ell, u \rangle$, $\forall u \in X$.

Definición Para cada $u \in X$ se define su conjunto dual, $F(u) \subseteq X^*$, mediante

$$F(u) := \left\{ \ell \in X^* : \langle \ell, u \rangle = \|u\|^2 = \|\ell\|^2 \right\} \quad \dots (1)$$

Nota: por Hahn-Banach, $F(u) \neq \emptyset$ $\forall u \in X$.

Definición Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ se denomina disipativo si $\forall u \in D(A)$ existe $\ell \in F(u)$ tal que

$$\mathrm{Re} \langle \ell, Au \rangle \leq 0 \quad \dots (2)$$

Observación: Si $(X, \langle , \rangle)$ es de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz $F(u) = \{u\}$ y (2) se lee $\mathrm{Re} \langle u, Au \rangle \leq 0$ $\forall u \in D(A)$.

Lema 1   Un operador lineal $A : D(A) \subset X \to X$ es disipativo si y sólo si

$$(3) \ldots \quad \|(\lambda I - A)u\| \geq \lambda \|u\| \qquad \forall\, u \in D(A),\ \forall \lambda > 0$$

Dem. Sean A disipativo, $u \in D(A)$, $\lambda > 0$. Si $l \in F(u)$ entonces $\mathrm{Re}\langle l, Au\rangle \leq 0$, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|(\lambda I - A)u\|\,\|u\| &\geq |\langle l, (\lambda I - A)u\rangle| \\
&\geq \mathrm{Re}\,\langle l, (\lambda I - A)u\rangle \\
&= \lambda\, \mathrm{Re}\langle l, u\rangle - \mathrm{Re}\langle l, Au\rangle \\
&\geq \lambda\, \mathrm{Re}\langle l, u\rangle = \lambda \|u\|^2
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ (3).

Supongamos (3) para el operador A. Sean $u \in D(A)$ y $n \in \mathbb{N}$. Sea $l_n \in F(nu - Au)$, es decir, $\langle l_n, nu - Au\rangle = \|nu - Au\|^2 = \|l_n\|^2$. Por (3) observamos que si $nu - Au = 0$ entonces $u = 0$. En ese caso claramente $\mathrm{Re}\langle \tilde{l}, Au\rangle = 0 \quad \forall\, \tilde{l} \in F(u)$. Por lo tanto suponemos que $nu - Au \neq 0$. Esto implica que $\|l_n\| \neq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$. Podemos definir,

$$\hat{l}_n := \frac{l_n}{\|l_n\|} \in X^*, \qquad \|\hat{l}_n\| = 1 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$n\|u\| \leq \|nu - Au\| = \left\langle \frac{\ell_n, nu - Au}{\|\ell_n\|} \right\rangle \in \mathbb{R}$$

$$= \langle \hat{\ell}_n, nu - Au \rangle$$

$$= n \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, u \rangle - \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, Au \rangle$$

$$\leq n\|u\| - \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, Au \rangle$$

Es decir, $\operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, Au \rangle \leq 0$. Además,

$$\operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, u \rangle \geq \|u\| + \frac{1}{n} \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}_n, Au \rangle$$

$$\geq \|u\| - \frac{1}{n}\|Au\|$$

Sabemos que la bola unitaria en X^* es compacta en la topología débil-$*$ (teorema de Banach-Alaoglu). Por lo tanto existe una subsucesión $\{\hat{\ell}_n\} \subset X^*$, $\|\hat{\ell}_n\| = 1$ que converge en la topología débil-$*$:

$$\begin{cases} \hat{\ell}_n \xrightarrow{*} \hat{\ell} & \text{si } n \to \infty \\ \langle \hat{\ell}_n, u \rangle \to \langle \hat{\ell}, u \rangle \quad \forall u \in X & \text{si } n \to \infty \end{cases}$$

y además $\|\hat{\ell}\| \leq 1$. Por lo tanto, tomando límite

$$\begin{cases} \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}, Au \rangle \leq 0 \\ \operatorname{Re}\langle \hat{\ell}, u \rangle \geq \|u\| \end{cases} \quad \forall u \in D(A).$$

Dado que $\text{Re}\langle \hat{\ell}, u\rangle \leq |\langle \hat{\ell}, u\rangle| \leq \|u\|$ entonces claramente $|\langle \hat{\ell}, u\rangle| = \text{Re}\langle \hat{\ell}, u\rangle > 0$ y

$$\langle \hat{\ell}, u\rangle = \|u\|$$

Es decir, $\ell := \|u\|\,\hat{\ell}$ satisface
$\langle \ell, u\rangle = \|u\|^2 = \|\ell\|^2 \quad \therefore \quad \ell \in F(u)$.
Además, $\text{Re}\langle \ell, Au\rangle \leq 0$.

$$\therefore A \text{ es disipativo}$$

$\square$

<u>Teorema</u> (Lumer - Phillips)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal densamente definido. A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo contractivo si y sólo si:

(i) A es disipativo
(ii) existe un $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ es suprayectivo $(R(\lambda_0 I - A) = X)$.

Mas aún, si A es el generador de un C_0-semigrupo contractivo entonces A es disipativo y $R(\lambda I - A) = X$ <u>para todo</u> $\lambda > 0$.

<u>Demostración</u>:

Necesidad: sea A el generador de un C_0-semigrupo contractivo. Por el teorema de Hille-Yosida, Sabemos que $(0,\infty) \subset \rho(A)$ y por lo tanto $R(\lambda I - A) = X \quad \forall\ \lambda > 0$.

Si $u \in D(A)$ y $\ell \in F(u)$ entonces

$$|\langle \ell, S(t)u \rangle| \leq \|\ell\| \, \|S(t)u\|$$

$$\leq \|u\|^2$$

$\|S(t)\| \leq 1$
$\|\ell\| = \|u\|$

Por ende,

$$\operatorname{Re}\langle \ell, S(t)u - u \rangle \leq \|u\|^2 - \operatorname{Re}\langle \ell, u \rangle = 0$$

$\ell \in F(u)$

Div. entre $t > 0$ y tomando lim cuando $t \to 0^+$:

$$\operatorname{Re}\langle \ell, Au \rangle \leq 0 \qquad \forall\ u \in D(A), \ \forall\ \ell \in F(u).$$

$\therefore$ A es disipativo.

Suficiencia: supongamos (i), (ii). Por ser A disipativo, aplicamos el lema 1

$$(3) \ldots \quad \|(\lambda I - A)u\| \geq \lambda \|u\| \qquad \forall\ \lambda > 0, \ \forall\ u \in D(A)$$

Seleccionando $\lambda = \lambda_0 > 0$ y dado que $\underset{\text{rango}}{R}(\lambda_0 I - A) = X$ obtenemos que

$(\lambda_0 I - A)^{-1} = R(\lambda_0, A)$ es un operador acotado
$\therefore$ $\lambda_0 I - A$ es cerrado (y consecuentemente A es cerrado).

Demostraremos ahora que $\mathcal{R}(\lambda I - A) = \underline{X}$ $\forall\ \lambda > 0$. Consideremos el conjunto

$$\Lambda := \{ \lambda \in \mathbb{R} : 0 < \lambda < \infty, \ \lambda I - A \text{ es suprayectivo} \}$$

Claramente $\Lambda \subset (0, \infty)$. Basta con probar que $(0,\infty) \subset \Lambda$.

Por (3), sabemos que $\Lambda \subset \rho(A)$. Además, $\rho(A)$ es un conjunto abierto en $\mathbb{C}$ [Kato]. Por lo tanto, $\forall\ \lambda \in \Lambda$ existe una vecindad $N(\lambda) \subset \mathbb{C}$ tal que $N(\lambda) \subset \rho(A)$. La intersección de $N(\lambda)$ con $\mathbb{R}$ es abierto y está contenido en Λ. $\therefore$ Λ es abierto en $(0, \infty)$.

Sea $\lambda_n \in \Lambda$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda > 0$. Como $\lambda_n I - A$ es suprayectivo $\forall\ n \in \mathbb{N}$, entonces para cada $v \in \underline{X}$ fijo existe un elemento $u_n \in D(A)$ tal que

$$\lambda_n u_n - A u_n = v \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Aplicando (3) obtenemos que existe una constante uniforme $C > 0$ tal que

$$\|u_n\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|v\| \leq C.$$

También por (3):

$$\lambda_m\|u_n-u_m\| \leq \|\lambda_m(u_n-u_m)-A(u_n-u_m)\|$$

$$= \|\lambda_n u_n - \lambda_n u_n - Au_n + Au_m + \lambda_m u_n - \lambda_m u_m\|$$

$$= \|\underbrace{v - (\lambda_m u_m - Au_m)}_{=0} + (\lambda_m-\lambda_n)u_n\|$$

$$\leq |\lambda_m - \lambda_n| \|u_n\| \leq C|\lambda_m-\lambda_n| \to 0 \text{ si } m,n\to\infty$$

$\therefore \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset D(A) \subset X$ es de Cauchy.

Sea $u = \lim_{n\to\infty} u_n \in X$. Como $\lambda_n \to \lambda > 0$ tenemos que

$$\lim_{n\to\infty} Au_n = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n u_n - v) = \lambda u - v$$

Como A es cerrado esto implica que $u\in D(A)$ y $\lambda u - Au = v$.

Por ende, $\lambda \in \Lambda$ y concluimos que Λ es cerrado. Además Λ es no vacío ($\lambda_0 \in \Lambda$) concluimos que

$$\Lambda = (0,\infty)$$

$\square$

<u>Corolario</u> Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador lineal cerrado y densamente definido. Si tanto A como A^* son disipativos entonces A es el generador de un C_0-semigrupo contractivo.

Recordatorio: Si X, Y son de Banach en el mismo campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, sea $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ operador lineal densamente definido, $\overline{D(A)} = X$. Entonces existe un operador $A^* \in \mathcal{L}(Y^*, X^*)$, $A^* : D(A^*) \subseteq Y^* \longrightarrow X^*$ tal que

$$\langle \ell, Au \rangle = \langle A^*\ell, u \rangle \quad \forall u \in D(A)$$
$$\forall \ell \in D(A^*)$$

Y cualquier otro operador $B : D(B) \subseteq Y^* \to X^*$ tal que $\langle \ell, Au \rangle = \langle B\ell, u \rangle$, $\forall u \in D(A)$, $\ell \in D(B)$, es una restricción de A^* ! $D(B) \subseteq D(A^*)$ y $B\ell = A^*\ell \quad \forall \ell \in D(B)$.

Ver Kato, cap. III.

<u>Demostración del corolario:</u>

Por el teorema de Lumer-Phillips basta demostrar que $R(I - A) = X$. (condición (ii) con $\lambda_0 = 1$).

Como A es disipativo y cerrado entonces $R(I-A)$ es cerrado ($1 \in \rho(A)$).

Por contradicción: supongamos que $\mathcal{R}(I-A) \neq X$. Entonces existe $v_0 \in X$ tal que $v_0 \notin \mathcal{R}(I-A)$. Claramente $v_0 \neq 0$ ya que $0 \in D(A)$. Por el teorema de Hahn-Banach y como $\mathcal{R}(I-A)$ es cerrado existe $l_0 \in X^*$ tal que $\langle l_0, v_0 \rangle = 1$, $\langle l_0, u - Au \rangle = 0 \;\; \forall\, u \in D(A)$ y

$$\|l_0\| \leq \frac{1}{\operatorname{dist}(v_0, \mathcal{R}(I-A))}$$

(Teo. III - 1.22 en Kato.)

Por lo tanto,

$$\langle (I-A^*) l_0, u \rangle = 0 \quad \forall\, u \in D(A)$$

$D(A)$ es denso en X $\therefore$ $(I-A^*) l_0 = 0$.

Pero A^* es disipativo: por lo cual

$$\|(I-A^*) l_0\| \geq \|l_0\|$$

$\therefore$ $l_0 \equiv 0$. contradicción con $\langle l_0, v_0 \rangle = 1$

$\square$

Lema 2 (propiedades de operadores disipativos)

Sea $A: D(A) \subset X \to X$ un operador lineal disipativo. Entonces:

(a) Si para algún $\lambda_0 > 0$ se tiene que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$ entonces $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$ para todo $\lambda > 0$.

(b) Si A es un operador cerrable entonces $\bar{A}$ (la cerradura de A) es disipativo.

(c) Si $\overline{D(A)} = X$ entonces A es cerrable.

Nota: (i) un operador es cerrable si tiene una extensión cerrada. En este caso es posible definir $\bar{A}$ (la cerradura de A) como el mínimo operador extensión que es cerrado.

(ii) Este lema nos indica que si A es disipativo y densamente definido entonces podemos trabajar con $\bar{A}$ cerrado.

Demostración del lema 2

(a) Se demostró en el teorema de Lumer-Phillips.

(b) Sea $\bar{A}$, cerradura de A. Sean $u \in D(\bar{A})$ y $v = \bar{A}u$, es fácil verificar que $\exists$ $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \to u$ y Au_n es convergente (ejercicio).

$\bar{A}$ es cerrado $\Rightarrow$ $u = \lim_{n\to\infty} u_n$ es tal que

(ver Kab, pg. 166)

$\bar{A}u = \lim_{n\to\infty} Au_n = v$ con $u_n \in D(A)$

como A es disipativo, entonces

$$\| \lambda u_n - A u_n \| \geq \lambda \| u_n \| \qquad \forall \lambda > 0$$

Tomando lím cuando $n \to \infty$

$$\| \lambda u - \bar{A} u \| \geq \lambda \| u \| \qquad \forall \lambda > 0.$$

Es decir $\bar{A}$ también es disipativo.

(c) Supongamos que A <u>no</u> es cerrable. Entonces, existe una sucesión $u_n \in D(A)$ tal que $u_n \to 0$ y $Au_n \to v$ con $\|v\| = 1$. Por disipatividad de A tenemos que $\forall w \in D(A)$ y $\forall t > 0$:

$$\| \underbrace{\left(w + \tfrac{1}{t} u_n\right)}_{\in D(A)} - t A \left(w + \tfrac{1}{t} u_n\right) \|$$

$$= \frac{1}{t} \| t \left(w + \tfrac{1}{t} u_n\right) - A \left(w + \tfrac{1}{t} u_n\right) \|$$

$$\geq \| w + \tfrac{1}{t} u_n \|$$

Tomando $n \to \infty$ con $t > 0$ fijo:

$$\| w - t A w - v \| \geq \| w \| \qquad \forall t > 0.$$

Tomando $t \to 0^+$ obtenemos

$$\| w - v \| \geq \| w \| \qquad \forall w \in D(A).$$

Esto es una contradicción con $\overline{D(A)} = X$

$\square$

Teorema Sea $A : D(A) \subset X \to X$ un operador disipativo tal que $R(I-A) = X$. Si X es reflexivo entonces $\overline{D(A)} = X$.

Demostración: Vamos a demostrar que:

(H) --- Si $l \in X^*$ es tal que $\langle l, u \rangle = 0$ $\forall u \in D(A)$ entonces $l \equiv 0$.

Por hipótesis $R(I-A) = X$. Por lo tanto probar que $\langle l, u \rangle = 0$ $\forall u \in X$ es equivalente a demostrar que $\langle l, u - Au \rangle = 0$ $\forall u \in D(A)$. Por hipótesis $\langle l, u \rangle = 0$ $\forall u \in D(A)$. Por lo tanto basta con probar que

$$\langle l, Au \rangle = 0 \qquad \forall u \in D(A)$$

Sea $u \in D(A)$. Por el lema 2 (a), $R(\lambda I - A) = X$ $\forall \lambda > 0$. Esto implica que

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, \quad nu \in D(A) \subset X = R(nI - A) \\ \exists\, u_n \in D(A) \text{ tal que} \\ nu = nu_n - Au_n \end{cases}$$

Además, como $Au_n = n(u_n - u) \in D(A)$ entonces tenemos que $u_n \in D(A^2)$. Así,

$$Au = Au_n - \frac{1}{n} A^2 u_n \iff Au_n = \left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1} Au$$

Por disipatividad del operador:

$$\|(nI - A)u\| \geq n\|u\|, \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall u \in D(A)$$

esto es equivalente (tomando $w := (nI-A)u \in X$) a

$$\|w\| \geq n \,\|(nI - A)^{-1} w\|$$

$$= \left\|\left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1} w\right\| \quad \forall w \in X$$

Es decir,

$$\left\|\left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1}\right\| \leq 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por lo tanto,

$$\|Au_n\| \leq \left\|\left(I - \frac{1}{n}A\right)^{-1}\right\| \|Au\| \leq \|Au\|$$

Además,

$$\|u_n - u\| = \frac{1}{n}\|nu_n - nu\| = \frac{1}{n}\|Au_n\|$$

$$\leq \frac{1}{n}\|Au\| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

Por lo tanto $u_n \to u$ si $n \to \infty$.

Ahora, como $\|Au_n\| \leq C$ (acotada uniformemente $\forall n \in \mathbb{N}$) y el espacio es reflexivo entonces existe una subsucesión que converge débilmente:

$$\langle \ell, Au_n \rangle \to \langle \ell, v \rangle \qquad \forall \ell \in X^*$$

para un cierto $v \in X$, cuando $n \to \infty$.

Por lo tanto, $\forall \ell \in X^*$:

$$0 \leq |\langle \ell, Au_n - Au \rangle|$$

$$= |\langle \ell, (I - \tfrac{1}{n}A)^{-1} Au - Au \rangle|$$

$$= |\langle \ell, (I - \tfrac{1}{n}A)^{-1} (I - (I - \tfrac{1}{n}A)) Au \rangle|$$

$$= |\langle \ell, (I - \tfrac{1}{n}A)^{-1} \tfrac{1}{n} A^2 u \rangle|$$

$$\leq \|\ell\| \underbrace{\|(I - \tfrac{1}{n}A)^{-1}\|}_{\leq 1} \frac{1}{n} \|A^2 u\|$$

$$\leq \frac{\|\ell\|}{n} \|A^2 u\| \to 0 \quad \text{si } n \to \infty.$$

$\therefore$ $v = Au$ y $\langle \ell, Au_n \rangle \to \langle \ell, Au \rangle$ si $n \to \infty$ $\forall \ell \in X^*$.

Dado que $\langle l, u\rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$ tenemos que

$$\langle l, Au_n\rangle = \langle l, n(u_n - u)\rangle$$
$$= n\langle l, u_n\rangle - \langle l, u\rangle = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}$

ya que $u \in D(A)$
$u_n \in D(A)$

Tomando $n \to \infty$ concluimos que

$$\langle l, Au\rangle = 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Esto prueba (*), es decir, $l \equiv 0$.

Supongamos que $\overline{D(A)} \neq X$. Entonces existe $w_0 \in X$ tal que $w_0 \notin \overline{D(A)}$. Claramente $w_0 \neq 0$. Por Hahn-Banach existe $l_0 \in X^*$ tal que $\langle l_0, w_0\rangle = 1$ y $\langle l_0, u\rangle = 0 \quad \forall u \in D(A)$. Por (*), esto implica que $l_0 \equiv 0$. Contradicción con $\langle l_0, w_0\rangle = 1$.

Concluimos que $\overline{D(A)} = X$

$\square$

Ejemplos:

(A) X reflexivo es importante.

contraejemplo: $X = C([0,1])$

con $\|u\| = \sup_{x\in[0,1]} |u(x)|$.

Sean:

$$\begin{cases} D(A) := \{ u \in C^1([0,1]) : u(0)=0 \} \\ Au := -u' , \quad \forall u \in D(A) \end{cases}$$

Para cada $f \in X$, la ecuación

$$u - Au = f$$

tiene una solución dada por

$$u(x) = \int_0^x e^{\xi - x} f(\xi)\, d\xi$$

Por lo tanto, $R(I-A) = X$. Asimismo,

$$|u(x)| \leq \underbrace{(1-e^{-x})}_{\leq 1} \|f\| \leq \|u - Au\|$$

Tomando sup en $[0,1]$:

$$\|u\| \leq \|u - Au\|$$

$\therefore$ A es disipativo. [Por lema 1).

Sin embargo $\overline{D(A)} = \{ u \in C([0,1]) : u(0) = 0 \}$

$\neq X$.