Lección 2.7: Semigrupo dual.

Teo. de Lumer-Phillips: $A : D(A) \subset X \to X$, densamente definido. A es el generador de un C_0-semigrupo contractivo si y sólo si (i) A es disipativo, y (ii) existe $\lambda_0 > 0$ tal que $\lambda_0 I - A$ es suprayectivo.

Observación: si aplicamos el lema de reescalamiento ($S(t) \to \tilde{S}(t) = e^{-\lambda t} S(t)$) es posible establecer la versión cuasi-contractiva de Lumer-Phillips:

Teorema (Lumer-Phillips, caso cuasi-contractivo)
Sea $A : D(A) \subset X \to X$ densamente definido, X de Banach. A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo cuasi-contractivo si y sólo si

(i) $\forall\, u \in D(A)$ existe $\ell \in F(u)$ tal que

$$(1) \ldots \qquad \operatorname{Re} \langle \ell, Au \rangle \leq \omega \|u\|^2$$

para cierto valor $\omega \in \mathbb{R}$.

(ii) existe $\lambda_0 > \omega$ tal que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$

En ese caso, $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X \quad \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, con $\operatorname{Re} \lambda > \omega$.

Dem. Ejercicio. $\square$

<u>Definición</u> Un operador $A: D(A) \subset X \to X$ se denomina <u>cuasi-disipativo</u> si satisface (i) para cierto $\omega \in \mathbb{R}$ (si $\omega = 0$: disipativo)
Si un operador satisface (i) y (ii) se denomina <u>cuasi-m-disipativo.</u>

<u>Ejemplo</u> Consideremos la ecuación de onda:

$$(2) \cdots \quad u_{tt} - \Delta u = 0, \qquad x \in \Omega, \; t > 0$$

donde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, conexo con $\partial\Omega \in C^1$. $\Delta u = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_j}^2 u$. Sujeta a condiciones de frontera:

$$(3) \cdots \quad u(x,t) = 0, \qquad x \in \partial\Omega, \; t > 0.$$

y condiciones iniciales de la forma

$$(4) \cdots \quad \begin{aligned} u(x,0) &= u_0(x), \\ \partial_t u(x,0) &= u_1(x), \end{aligned} \qquad x \in \Omega.$$

$u_j = u_j(x)$, $j = 0, 1$, son funciones conocidas.

Transformamos (2) en un sistema de primer orden:

$$v := \partial_t u$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} u_t = v \\ v_t = \Delta u \end{cases}$$

es de la forma

$$\partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}}_{=:\mathcal{A}} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$A = \Delta$. El operador $\mathcal{A}$ se define como

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \underbrace{\left(H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)\right)}_{u \in (\text{''})} \times \underbrace{H_0^1(\Omega)}_{v \in (\text{''})}$$

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

claramente $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ es denso en X.

Proposición $\mathcal{A}$ genera un C_0-semigrupo contractivo en X.

Dem. El siguiente producto

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle := \int_\Omega \left[\sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} u \, \partial_{x_j} f + vg \right] dx$$

es equivalente al producto escalar usual en X:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \right\rangle_X = \langle u, f \rangle_{H^1(\Omega)} + \langle v, g \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_{\nabla} \hat{=} \langle \cdot , \cdot \rangle_{H^1} \quad \text{en } H_0^1(\Omega)$$

Ejercicio: verificar esto, usar la desigualdad de Poincaré en $H_0^1(\Omega)$.

Calculamos:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$= \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \partial_{x_i} u \, \partial_{x_j} v \, dx + \int_\Omega v \Delta u \, dx$$

$$= \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} - \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)} = 0.$$

$u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$

$\therefore$ $\mathcal{A}$ es disipativo.

Vamos a verificar: $\forall\, \lambda > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, se tiene que $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ y $R(\lambda I - \mathcal{A}) = \mathbb{X}$.

En efecto, sea

$$(\mathcal{A} - \lambda I)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in \mathbb{X}$$

Es equivalente a:

$$\begin{cases} v - \lambda u = f \in H_0^1(\Omega) \\ \Delta u - \lambda v = g \in L^2(\Omega) \end{cases}$$

Sustituyendo obtenemos el problema:

$$(*) \begin{cases} \text{para } (f,g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \text{ dado} \\ \text{hallar } u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \text{ tal que} \\ \qquad \Delta u - \lambda^2 u = g + \lambda f \end{cases}$$

Si $(*)$ tiene solución entonces $v := f + \lambda u \in H_0^1(\Omega)$ y $R(Q - \lambda I) = X$.

Por teoría elíptica: el espectro de $-\Delta$ tiene la sig. estructura, $\sigma(-\Delta) = \{\mu_j\}_{j=1}^{\infty}$ tales que $0 < \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_j \to \infty$ si $j \to \infty$. Entonces para todo $\lambda^2 > 0$ la ecuación $\Delta u = \lambda^2 u + \psi$ con $\psi \in L^2(\Omega)$ tiene una solución (débil), $u \in H_0^1(\Omega)$. Por teoría de regularidad elíptica, $u \in H^2(\Omega)$. (Evans, cap. 6).

$\therefore$ $(*)$ tiene solución.

Por Lumer-Phillips, Q es el generador de un C_0-semigrupo contractivo.

El semigrupo dual

Sea X de Banach; X^* dual.
Notación: $\forall\, l \in X^*$, $l(u) = \langle l, u \rangle$ $\forall\, u \in X$.

Sea S operador lineal, $S \in \mathcal{L}(X)$.
$D(S) = X$, densamente definido entonces:

$$S^* : D(S^*) \subset X^* \longrightarrow X^* \quad \text{(adjunto de } S)$$

$D(S^*)$ es el conjunto de elementos $\ell \in \mathfrak{X}^*$ para los cuales existe $q \in \mathfrak{X}^*$ tal que

$$(6) \quad \ldots \quad \langle \ell, Su \rangle = \langle q, u \rangle, \quad \forall u \in D(S)$$

y si $\ell \in D(S^*)$ entonces $S^*\ell := q$.

como $D(S)$ es denso existe al menos un elemento $q \in \mathfrak{X}^*$ tal que (6) se cumple.

<u>Lema 1</u> Sea $S \in \mathcal{B}(\mathfrak{X})$, operador acotado con $D(S) = \mathfrak{X}$. Entonces $S^* \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}^*)$ (acotado) y $\|S^*\| = \|S\|$.

<u>Dem.</u> Para todo $\ell \in \mathfrak{X}^*$, el mapeo $u \mapsto \langle \ell, Su \rangle$ es un funcional lineal continuo en $\mathfrak{X}$ (S es acotado). Es decir, $q \in \mathfrak{X}^*$ es tal que $\langle q, u \rangle = \langle \ell, Su \rangle \ \forall u \in \mathfrak{X}$.

Por lo tanto, $D(S^*) = \mathfrak{X}^*$, $S^*\ell = q$.

Además,

$$\|S^*\| = \sup_{\|\ell\| \leq 1} \|S^*\ell\| = \sup_{\|\ell\| \leq 1} \sup_{\|u\| \leq 1} \underbrace{|\langle S^*\ell, u \rangle|}_{= |\langle q, u \rangle| = |\langle \ell, Su \rangle|}$$

$$= \sup_{\|u\| \leq 1} \sup_{\|\ell\| \leq 1} |\langle \ell, Su \rangle|$$

$$= \sup_{\|u\| \leq 1} \|Su\| = \|S\| \qquad \square$$

Lema 2. Sea $A : D(A) \subset X \to X$ densamente definido. Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $\lambda \in \rho(A^*)$ y

$$\left.\begin{aligned} R(\lambda, A^*) = (\lambda I^* - A^*)^{-1} &= ((\lambda I - A)^{-1})^* \\ &= R(\lambda, A)^* \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Demostración: De la definición de adjunto tenemos

$$(\lambda I - A)^* = \lambda I^* - A^*$$

donde I^* es el operador identidad en X^*.

Si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $R(\lambda, A)$ es acotado. Así, $R(\lambda, A)^*$ es acotado en X^*.
Por probar:
- $R(\lambda, A^*)$ existe
- coincide con $R(\lambda, A)^*$.

(I) $\lambda I^* - A^*$ es inyectivo: sea $\ell \in X^*$ tal que $(\lambda I^* - A^*)\ell = 0$. Entonces para cada $u \in D(A)$ se tiene que

$$0 = \langle (\lambda I^* - A^*)\ell, u \rangle = \langle \ell, (\lambda I - A)u \rangle$$

Pero dado que $\lambda \in \rho(A)$ sabemos que $R(\lambda I - A) = X$. Por lo tanto $0 = \langle \ell, v \rangle$ $\forall v \in X$. Es decir, $\ell = 0$.

$\therefore$ $\lambda I^* - A^*$ es inyectivo.

(II) Sean $u \in X$ y $l \in D(A^*)$. Entonces

$$\langle l, u \rangle = \langle l, (\lambda I - A) R(\lambda, A) u \rangle$$

$$= \langle (\lambda I^* - A^*) l, R(\lambda, A) u \rangle$$

$$= \langle \underbrace{R(\lambda, A)^* (\lambda I^* - A^*)} l, u \rangle$$

Es decir,

$$(8) \cdots \qquad l = R(\lambda, A)^* (\lambda I^* - A^*) l, \quad \forall l \in D(A^*)$$

Por otro lado, sean $l \in X^*$ y $u \in D(A)$. Entonces,

$$\langle l, u \rangle = \langle l, R(\lambda, A)(\lambda I - A) u \rangle$$

$$= \langle R(\lambda, A)^* l, (\lambda I - A) u \rangle$$

$$= \langle (\lambda I^* - A^*) R(\lambda, A)^* l, u \rangle$$

es decir,

$$(9) \cdots \qquad l = (\lambda I^* - A^*) R(\lambda, A)^*, \quad \forall l \in X^*$$

por densidad de $D(A)$.

De (8) y (9) deducimos que $\lambda \in \rho(A^*)$ y además $R(\lambda, A^*) = R(\lambda, A)^*$

$\square$

Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo. Sabemos que $S(t) \in \mathcal{B}(X)$, $\forall\ t \geq 0$. Denotamos $S(t)^* \in \mathcal{B}(X^*)$. Familia de operadores

$$\{S(t)^*\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X^*) \quad \text{--} \quad (10)$$

<u>Lema 3</u> La familia definida en (10) satisface las propiedades (S_1) y (S_2) de un C_0-semigrupo.

<u>Dem.</u> Claramente $S(0)^* = I^*$ es la identidad en X^*. Además, $\forall\ \ell \in X^*$ y $\forall\ u \in X$:

$$\langle S(t+s)^*\ell, u\rangle = \langle \ell, S(t+s)u\rangle$$

$$= \langle \ell, S(t)S(s)u\rangle$$

$$= \langle S(s)^* S(t)^* \ell, u\rangle$$

$\square$

Sin embargo puede ocurrir que $\{S(t)^*\}_{t\geq 0}$ no sea un C_0-semigrupo : el mapeo puede no ser fuertemente continuo, (S_3).

Contraejemplo: Sea $X = L^1(\mathbb{R})$ y definimos el semigrupo de traslaciones :

$$(S(t)u)(x) := u(x-t), \quad \forall\ t \geq 0$$
$$\forall\ x \in \mathbb{R}$$

Recordamos que $L^1(\mathbb{R})^* = L^\infty(\mathbb{R})$; se puede verificar fácilmente que $\forall t \in \mathbb{R}$ el grupo dual es

$$\begin{cases} S(t)^* : L^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R}) \\ (S(t)^* \varphi)(x) := \varphi(x+t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

En efecto, si $\varphi \in L^\infty$, $u \in L^1$ entonces

$$\langle \varphi, S(t)u \rangle = \int_{\mathbb{R}} u(x-t)\, \varphi(x)\, dx$$

$\varphi \in L^1(\mathbb{R})^* = L^\infty(\mathbb{R})$

$$= \int_{\mathbb{R}} u(x)\, \varphi(x+t)\, dx$$

$$= \langle S(t)^* \varphi, u \rangle$$

Por otro lado, es fácil verificar que la familia $\{S(t)^*\}_{t \geq 0}$ <u>no</u> satisface

$$\lim_{t \to 0} S(t)^* \varphi = \varphi$$

excepto cuando φ es uniformemente continua con respecto a la norma de L^∞:

$$\| (S(t)^* \varphi)(\cdot) - \varphi(\cdot) \|_{L^\infty} = \underbrace{\| \varphi(\cdot + t) - \varphi(\cdot) \|_{L^\infty}}_{\to\, 0 \text{ si } t \to 0}$$

<u>sólo si</u> φ es unif. continua en L^∞. Pero es posible construir funciones $\varphi \in L^\infty$ que no lo son (ejercicio).

Observación Se hizo el comentario que (J_3) se puede sustituir por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{los mapeos } t \mapsto \langle l, S(t)u \rangle \text{ son} \\ \text{continuos de } [0,\infty) \text{ en } \mathbb{C} \text{ para} \\ \text{todo } u \in X, \text{ y para todo } l \in X^* \end{array} \right.$$

[Engel, Nagel, p. 10].

Si bien $\{S(t)^*\}_{t\geq 0}$ no es en general un C_0-semigrupo se puede probar que satisface continuidad debilmente-$*$ en 0, es decir,

$$\lim_{t\to 0} \langle S(t)^* l - l, u \rangle = 0$$

$\forall\, u \in X$.

Definición Sea $S \in \mathcal{L}(X)$. Sea $V \subset X$ un subespacio de X. El operador $\tilde{S}$, definido por: $D(\tilde{S}) = \{u \in D(S) \cap V : Su \in V\}$ y $\tilde{S}u := Su \quad \forall\, u \in D(\tilde{S})$, es la restricción de S en V.

Teorema 4 Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo con generador $A = D(A) \subset X \to X$. Sea la familia $\{S(t)^*\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X^*)$. Si A^* es el adjunto de A y V^* es la cerradura de $D(A^*)$, $V^* = \overline{D(A^*)} \subset X^*$, entonces la restricción, $\tilde{S}(t)^*$, de

$S(t)^*$ en V^* es un C_0-semigrupo en V^*. El generador de $\{\tilde{S}(t)^*\}_{t\geq 0}$, que denotamos como $(\tilde{A}^*, D(\tilde{A}^*))$ es la restricción de A^* en V^*.

Dem. Por el teorema de Feller-Miyadera-Phillips $\exists\ \omega \in \mathbb{R}$, $M \geq 1$, tales que $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}$, con $\lambda > \omega$ tenemos $\lambda \in \rho(A)$ y

$$\| R(\lambda, A)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Por Lemas 1 y 2: tenemos que si $\lambda \in \rho(A)$ entonces $\lambda \in \rho(A^*)$ y además

$$\| R(\lambda, A^*)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Sea $J(\lambda) := \overline{R(\lambda, A^*)}$ la restricción de $R(\lambda, A^*)$ en $V^* = \overline{D(A^*)}$. Entonces

$$(11) \cdots \qquad \| J(\lambda)^n \| \leq \frac{M}{(\lambda-\omega)^n}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

y además,

$$(12) \cdots \qquad J(\lambda) - J(\mu) = (\mu - \lambda) J(\lambda) J(\mu) \qquad \forall\ \lambda, \mu > \omega$$

Durante la prueba de Hille-Yosida se probó que

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda R(\lambda, A)u = u, \quad \forall u \in X$$

$$\left(\| n R(n,A)u - u \| \leq \| R(n,A) \| \, \| Au \| \leq \frac{1}{n} \| Au \| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \right)$$

Por un argumento similar se puede demostrar que

$$(13) \ldots \quad \lim_{\lambda\to\infty} \lambda J(\lambda) \ell = \ell, \quad \forall \ell \in V^*$$

Lema auxiliar: de (13) y (12) se puede deducir que $J(\lambda)$ es el resolvente de un operador cerrado densamente definido en V^*, que denotamos por $\tilde{A}^*$ (Pazy, corolario 9.5 y teo. 9.4).

Aplicando Feller-Miyadera-Phillips: por (11) tenemos que $\tilde{A}^*$ es el generador de un C_0-semigrupo que denotamos como

$$\{ \hat{S}(t)^* \}_{t\geq 0}.$$

Ahora, para $u \in X$, $\ell \in V^*$ tenemos, por definición:

$$\langle \ell, (I - \tfrac{t}{n}A)^{-n} u \rangle = \langle (I^* - \tfrac{t}{n}\tilde{A}^*)^{-n} \ell, u \rangle$$

Tomando el lím cuando $n \to \infty$ (por las aproximaciones de Yosida)

$$\langle \ell, S(t)u \rangle = \langle \tilde{S}(t)^* \ell, u \rangle$$

Esto es, para $\ell \in V^*$ tenemos que

$$\tilde{S}(t)^* \ell = S(t)^* \ell$$

$\Rightarrow$ $\tilde{S}(t)^*$ es la restricción de $S(t)^*$ al subespacio V^*.

Finalmente, por probar: $\tilde{A}^*$ es la restricción de A^* en V^*. Sea $\ell \in D(A^*)$ tal que $\ell \in V^*$ y $A^* \ell \in V^*$. Entonces,

$$(\lambda I^* - A^*) \ell \in V^*$$

y además,

$$(\lambda I^* - \tilde{A}^*)^{-1} (\lambda I^* - A^*) \ell = \ell$$

Por ende, concluimos que $\ell \in D(\tilde{A}^*)$. Aplicando $(\lambda I^* - \tilde{A}^*)$ obtenemos:

$$(\lambda I^* - A^*) \ell = (\lambda I^* - \tilde{A}^*) \ell$$

es decir,

$$\tilde{A}^* \ell = A^* \ell \qquad \forall \ell \in V^*.$$

Así, $\tilde{A}^*$ es la restricción de A^* en V^*.

$\square$

Lema 5 Sea $S : D(S) \subset X \to X$, cerrado y densamente definido. Si X es reflexivo entonces $D(S^*)$ es denso en X^* y S^* es cerrado.

Demostr. $D(S^*)$ es denso en X^*:
Por contradicción: si $D(S^*)$ no es denso en X^*, entonces existe un elemento $u_0 \in X$, $u_0 \neq 0$, tal que $\langle l, u_0 \rangle = 0$ $\forall\, l \in D(S^*)$. Como S es cerrado, su gráfica $\{(u, Su) \in X \times X : u \in D(S)\}$ es cerrada y no contiene a $(u_0, 0)$.
Por Hahn-Banach, existen $l_1, l_2 \in X^*$ tales que $\langle l_1, u \rangle = \langle l_2, Su \rangle$ $\forall\, u \in D(S)$ y $\langle l_1, 0 \rangle \neq \langle l_2, u_0 \rangle$. Por lo tanto, $l_2 \neq 0$ y $\langle l_2, u_0 \rangle \neq 0$. Pero, $\langle l_1, u \rangle = \langle l_2, Su \rangle$ implica que $l_2 \in D(S^*)$. Esto a su vez implica que $\langle l_2, u_0 \rangle = 0$ contradicción.
Concluimos que $\overline{D(S^*)} = X^*$

Sea $l_n \in D(A^*)$ una sucesión tal que $l_n \to l$ en X^*, y $A^* l_n \to q$ en X^*, si $n \to \infty$. Por def. de adjunto:

$$\langle l, Au \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle l_n, Au \rangle = \lim_{n \to \infty} \langle A^* l_n, u \rangle$$
$$= \langle q, u \rangle \quad \forall\, u \in D(A).$$

Como $D(A)$ es denso en X concluimos que $\ell \in D(A^*)$ y $A^*\ell = g$. Es decir, A^* es cerrado

$\square$

Como corolario, combinamos Lema 5 y el Teorema 4 para obtener:

<u>Teorema 6</u> (del semigrupo dual)

Sea X de Banach reflexivo. Sea $\{S(t)\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X)$ un C_0-semigrupo con generador $A: D(A) \subset X \to X$. Entonces la familia

$$\{S(t)^*\}_{t\geq 0} \subset \mathcal{B}(X^*)$$

es un C_0-semigrupo en X^* cuyo generador infinitesimal es A^*.