Lección 2.9: Semigrupos analíticos (continuación).

Teorema (equivalencia)

$A : D(A) \subset X \to X$ operador lineal. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) A genera un semigrupo analítico, $\{S(z)\}_{z \in \Sigma_\delta \cup \{0\}} \subset \mathcal{B}(X)$, uniformemente acotado en $\Sigma_\delta \cup \{0\}$.

(b) Existe $\theta \in (0, \pi/2)$ tal que los operadores $e^{\pm i\theta} A$ generan C_0-semigrupos en X.

(c) A es el generador de un C_0-semigrupo en X, $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ tal que: $\mathcal{R}(S(t)) \subseteq D(A)$ $\forall\, t > 0$ y además

$$M := \sup_{t > 0} \| t\, A S(t) \| < \infty \qquad \cdots \quad (1)$$

(d) A genera un C_0-semigrupo en X y, además, $\exists\ C > 0$ uniforme tal que

$$\| R(r + is, A) \| \leq \frac{C}{|s|} \qquad \cdots \quad (2)$$

$\forall\, r > 0$, $\forall\, s \neq 0$, $s \in \mathbb{R}$.

(e) A es densamente definido y sectorial.

<u>Demostración</u> (continuación)

Ya se probó (a) ⇒ (b) ⇒ (d).

<u>(d) ⇒ (e)</u> : A generador de un C_0-semigrupo ⇒ $D(A)$ denso en X.

Se puede probar (ver Kato, cap. 3):

$$\forall \lambda_0 \in \rho(A) \Rightarrow \operatorname{dist}(\lambda_0, \sigma(A)) \geq \frac{1}{\|R(\lambda_0, A)\|}$$

Por lo tanto, la estimación (2) implica que $i\mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \rho(A)$ y por continuidad del resolvente:

$$(3) \ldots \qquad \|R(\mu, A)\| \leq \frac{C}{|\mu|}, \qquad \forall \mu \neq 0, \mu \in i\mathbb{R}$$

(la estimación (2) es uniforme en $r>0$, tomamos $r \to 0^+$).

La expansión en serie de Taylor del resolvente para $\mu \in i\mathbb{R}$, $\mu \neq 0$, es

$$R(\lambda, A) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu-\lambda)^n R(\mu, A)^{n+1}$$

La serie converge uniformemente (en la norma $\|\cdot\|_{X\to X}$) siempre que

$$|\mu-\lambda| \, \|R(\mu,A)\| \leq q < 1$$

para cierto $0<q<1$ fijo pero arbitrario. En particular si $\mu = i\,\mathrm{Im}\lambda$ de la estimación (3) vemos que esta condición se cumple si

$$|\mathrm{Re}\lambda| \leq \frac{q}{C} |\mathrm{Im}\,\lambda|$$

Dado que $q\in(0,1)$ es arbitrario, deducimos que

$$\left\{ \lambda\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}\,\lambda\leq 0, \frac{|\mathrm{Re}\lambda|}{|\mathrm{Im}\,\lambda|} < \frac{1}{C} \right\} \subset \rho(A)$$

Por lo tanto, si $\delta := \mathrm{Arc}\tan(1/C)$ obtenemos

$$\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta} \subset \rho(A)$$

Esto es por Feller-Miyadera-Phillips (A es generador $\Rightarrow$ $\Sigma_{\pi/2} = \{|\arg\lambda|<\frac{\pi}{2}\} \setminus\{0\} \subset \rho(A)$. FMP-(i) $\Rightarrow$ si $\lambda = r+is$ tal que $R(\lambda)u := \int_0^\infty e^{-\lambda t} S(t)u \, dt$ $\exists$ $\forall u\in X$ entonces $\lambda\in\rho(A)$.)

Resta estimar $\|R(\lambda,A)\|$ para $\lambda\in\Sigma_{\frac{\pi}{2}+\delta-\varepsilon}$ para cierto $\varepsilon\in(0,\delta)$.

Supongamos que $\operatorname{Re}\lambda > 0$. Por FMP (con $\omega = 0$) sabemos que $\exists\ \tilde{M} \geq 1$ tal que

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{\tilde{M}}{\operatorname{Re}\lambda}$$

Mas aūn, por (2) tenemos tambien

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

Es decir, $\exists\ M \geq 1$ tal que

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \frac{M}{|\lambda|} \quad \text{si } \operatorname{Re}\lambda > 0.$$

En el caso $\operatorname{Re}\lambda \leq 0$ escogemos $q \in (0,1)$ tal que $\delta - \varepsilon = \operatorname{Arc\,tan}(q/C)$. De este modo
$$\left| \frac{\operatorname{Re}\lambda}{\operatorname{Im}\lambda} \right| \leq \frac{q}{C}$$
y por la estimación (3) combinado con la serie de Taylor para $\mu = i \operatorname{Im}\lambda$ obtenemos

$$\| R(\lambda, A) \| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |\operatorname{Re}\lambda|^n \frac{C^{n+1}}{|\operatorname{Im}\lambda|^{n+1}}$$

$$\leq \frac{1}{(1-q)} \frac{C}{|\operatorname{Im}\lambda|}$$

$|\operatorname{Re}\lambda| \leq \frac{q}{c} |\operatorname{Im}\lambda|$
$0 < q < 1$

$$\leq \frac{\sqrt{1+C^2}}{(1-q)} \frac{1}{|\lambda|}$$

Esto prueba la estimación $\|R(\lambda,A)\| \leq \frac{M_\varepsilon}{|\lambda|}$
$\forall \lambda \neq 0$, $\lambda \in \Sigma_{\delta+\pi/2-\varepsilon}$.

concluimos que A sectorial y densamente definido. Es decir, (e).

(e) $\Rightarrow$ (c) : Por los teoremas 1 y 2 (clase pasada : A sectorial $\Rightarrow \{S(z)\}$ con propiedades ; y si $z = t \in [0,\infty)$ entonces el generador es A) :

el generador de $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es operador sectorial A. Además, el mapeo $z \mapsto S(z)$ es analítico en Σ_δ.

Por lo tanto, el mapeo

$$(0,\infty) \ni t \mapsto S(t)u$$

es diferenciable para todo $u \in X$. En particular el límite

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{S(t+h)-S(t)}{h}\right]u = \lim_{h\to 0}\left(\frac{S(h)-I}{h}\right)S(t)u$$

existe $\forall u \in X$, $\forall t>0$. Por lo tanto $R(S(t)) \subset D(A)$, $\forall t>0$.

Para todo $t>0$, el operador $AS(t)$ es cerrado y con dominio $D(AS(t)) = X$.

B cerrado, $D(B) = X \Rightarrow B \in \mathcal{B}(X)$ acotado

(Ejercicio. Ver Kato, p. 164–167. Se aplica el teorema de la gráfica cerrada)

Así, $AS(t)$ es acotado.

Vamos a estimar $\| AS(t) \| \quad \forall\, t>0$.

Aplicaremos:

- representación integral de $S(t)$ (transf. de Laplace de R)
- cerradura de A
- ec. del resolvente: $AR(\mu, A) = \mu R(\mu, A) - I$
- teo. integral de Cauchy.

El resultado es:

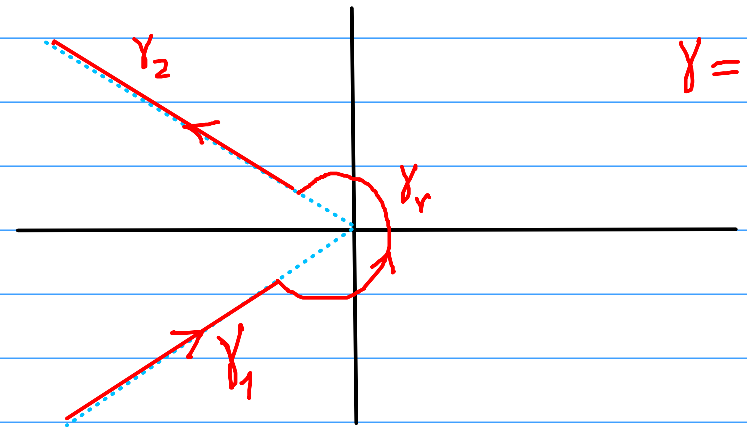
$$AS(t) \underset{\text{rep. integral}}{=} A \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu t} R(\mu, A)\, d\mu$$

$$\underset{\text{ec. resolv.}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu t} (\mu R(\mu, A) - I)\, d\mu$$

$$\underset{\text{teo. int. de Cauchy}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \mu e^{\mu t} R(\mu, A)\, d\mu$$

$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma e^{\mu t} d\mu = 0 \quad \forall\, t>0$

donde γ es un contorno como en la figura pasada.



$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_r$

Sobre γ_r, escogemos $r = 1/t$, $t>0$.
Así,

$$\left\| \int_\gamma \mu e^{\mu t} R(\mu, A)\, d\mu \right\| \leq 2M_\varepsilon \int_{1/t}^{\infty} e^{-\rho t \sin\varepsilon}\, d\rho$$

$$+ \frac{2\pi e M_\varepsilon}{t}$$

$$\leq 2M_\varepsilon \left(\frac{1}{\sin\varepsilon} + \pi e \right) \cdot \frac{1}{t}$$

con $\varepsilon = \frac{1}{2}(\delta - \delta')$, $\delta' \in (0, \delta)$.

Esto prueba $\sup_{t>0} \| t\, AS(t) \| < \infty$

Es decir, (c).

(c) $\Rightarrow$ (a) : Vamos a probar que el mapeo $t \mapsto S(t)u$ es infinitamente diferenciable $\forall\, t>0$, $\forall\, u \in X$.

Sabemos que: $AS(t)u = S(t)Au$
$\forall\, u \in D(A)$, $\forall\, t \geq 0$

Se puede verificar por inducción que

$$\mathcal{R}(S(t)) \subset D(A^\infty) = \bigcap_{n=0}^{\infty} D(A^n)$$

y además

$$(4) \cdots \quad A^n S(t) = \left(A S(t/n) \right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t > 0$$

(Ejercicio: por inducción sobre $n \in \mathbb{N}$, usar propiedades básicas, $\mathcal{R}(S(t)) \subset D(A)$.)

Entonces, por propiedades básicas del generador tenemos que:

$$(5) \cdots \quad A^n S(t) u = \frac{d^n}{dt^n} S(t) u \qquad \forall u \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En efecto, sabemos que:

- $\dfrac{d}{dt}\left(S(t)u\right) = S(t)Au = A S(t) u \qquad \forall u \in D(A), \ \forall t > 0$

- $S(t) u \in D(A^\infty) \qquad \forall t > 0$

Entonces sea $\varepsilon \in (0,t)$ fijo, $u \in X$.
Como $S(\varepsilon) u \in D(A^\infty) \subset D(A)$ y

$$S(t)u = S(t-\varepsilon)S(\varepsilon)u \quad \text{entonces}$$

$$\frac{d}{dt}\left(S(t)u\right) = \frac{d}{dt}\left(S(t-\varepsilon)\underbrace{S(\varepsilon)u}_{\in D(A)}\right)$$

$$= AS(t-\varepsilon)S(\varepsilon)u$$

$$= AS(t)u$$

Análogamente, por inducción

$$A^n S(t)u = AS(t-\varepsilon)A^{n-1}S(\varepsilon)u$$

$$= \frac{d}{dt}\left(S(t-\varepsilon)\right)A^{n-1}S(\varepsilon)u$$

$$= \cdots = \frac{d^n}{dt^n}S(t)u \quad \forall u \in X, \; n \in \mathbb{N}$$

Esto demuestra que $t \mapsto S(t)u$ es infinitamente diferenciable $\forall t > 0$, $\forall u \in X$.

Usamos la desigualdad $n! e^n \geq n^n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y la estimación (1) para obtener:

$$\left\| \frac{d^n}{dt^n} S(t) \right\| \overset{(5)}{=} \| A^n S(t) \| \overset{(4)}{=} \left\| \left(AS\left(\frac{t}{n}\right)\right)^n \right\|$$

$$\leq \| AS(t/n) \|^n$$

$$(1) \Rightarrow \sup_{t>0} \left\| \frac{t}{n} AS\left(\frac{t}{n}\right) \right\| \leq M < \infty$$

Así,

$$\left\| \frac{d^n}{dt^n} S(t) \right\| \leq \left\| A S\left(\frac{t}{n}\right) \right\|^n$$
$$\leq \frac{n^n}{t^n} M^n$$
$$\leq n! \left(\frac{eM}{t}\right)^n$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{n!} \left\| \frac{d^n}{dt^n} S(t) \right\| \leq \left(\frac{eM}{t}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall t > 0 \qquad (6)\ldots$$

Desarrollamos $S(t)$ en serie de Taylor. Para todo $t>0$, $u \in X$:

$$S(t+h)u = \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} S(t) u \ +$$
$$(7)\ldots \qquad + \frac{1}{n!} \int_t^{t+h} (t+h-\xi)^n \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} S(\xi) u \, d\xi$$

para cualquier $|h| < t$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

La integral,

$$Q_{n+1}(t+h)u := \frac{1}{n!} \int_t^{t+h} (t+h-\xi)^n \frac{d^{n+1}}{d\xi^{n+1}} S(\xi) u \, d\xi$$

satisface

$$\lim_{n \to \infty} \| Q_{n+1}(t+h) \| = 0$$ uniformemente en $|h| \leq q\left(\frac{t}{eM}\right)$ $\forall q \in (0,1)$.

por (6).

Además, la serie

$$S(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z-t)^k}{k!} \frac{d^k S(t)}{dt^k}$$

converge uniformemente $\forall\, z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-t| < q\left(\frac{t}{eM}\right)$.

Por lo tanto, el semigrupo $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ se extiende analíticamente al sector $z \in \Sigma_\delta$, con $\delta := \operatorname{Arc\,tan}(1/eM)$.

Obtenemos $\{S(z)\}_{z\in\Sigma_\delta}$ familia de operadores acotados.

Sea $t>0$. Entonces el mapeo

$$\Sigma_\delta \ni z \mapsto S(t)S(z)$$

es analítico y satisface $S(t)S(z) = S(t+z)$, para $z \geq 0$. Por continuación analítica concluimos que $S(t)S(z) = S(t+z)$ $\forall\, z \in \Sigma_\delta$.

Sea $z_1 \in \Sigma_\delta$ fijo. Sea el mapeo

$$\Sigma_\delta \ni z \longmapsto S(z_1)S(z)$$

Este mapeo también es analítico y satisface $S(z_1+z) = S(z_1)S(z)$ si $z \geq 0$.

Aplicando continuación analítica

$$S(z_1)S(z_2) = S(z_1+z_2)$$

$\forall z_1, z_2 \in \Sigma_\delta$.

$S(0) = Id$, es automática. ($S(0) = Id$ con $t=0$).

- $z \mapsto S(z)$ es uniformemente acotado en $z \in \Sigma_{\delta'}$ para cualquier $0<\delta'<\delta$.

Escogemos $q \in (0,1)$ tal que $\delta' = \operatorname{Arc\,tan}(q/eM)$. Entonces por (7) y (6):

$$\|S(z)\| \underset{(7)}{=} \left\| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i \operatorname{Im} z)^k}{k!} \frac{d^k}{dz^k} S(\operatorname{Re} z) \right\|$$

con $t+h=z$

$$\underset{(6)}{\leq} \sum_{k=0}^{\infty} |\operatorname{Im} z|^k \left(\frac{eM}{\operatorname{Re} z}\right)^k$$

$$\leq \frac{1}{1-q} \qquad \cdots (8)$$

$\Rightarrow \quad \|S(z)\| \leq C$ uniforme $\forall z \in \Sigma_{\delta'}$.

- continuidad fuerte en $z=0$.

Sean $u \in X$, $\varepsilon>0$. Como $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo, por (S_3).

existe $h_0 > 0$ tal que

$$\| S(h)u - u \| < \varepsilon(1-q) \quad \forall\ 0 < h < h_0.$$

$h \in \mathbb{R}$

usando (8):

$$\| S(z)u - u \| \leq \| S(z)(u - S(h)u) \| +$$

$$+ \| S(z+h)u - S(h)u \| +$$

$$+ \| S(h)u - u \|$$

$$< \underbrace{\| S(z) \|}_{\leq \frac{1}{1-q}} \underbrace{\| S(h)u - u \|}_{\leq \varepsilon(1-q)} +$$

$$+ \underbrace{\| S(h)u - u \|}_{\leq \varepsilon(1-q) < \varepsilon}$$

$$+ \| S(z+h) - S(h) \| \| u \|$$

$$< 2\varepsilon + \| S(z+h) - S(h) \| \| u \|$$

$$\forall\ h \in (0, h_0)$$

Pero el mapeo $z \mapsto S(z+h)$ es analítico en una vecindad de $z = 0$. Por lo tanto

$$\lim_{z \to 0} \| S(z+h) - S(h) \| = 0.$$

$\forall\ h \in (0, h_0)$ fijo. Por lo tanto,

$$\| S(\xi)u - u \| \to 0 \quad \text{si } \begin{array}{l} \xi \to 0 \\ \xi \in I_\delta \end{array}$$

$\Rightarrow$ continuidad fuerte. Esto prueba (a).

$\square$

Observaciones:

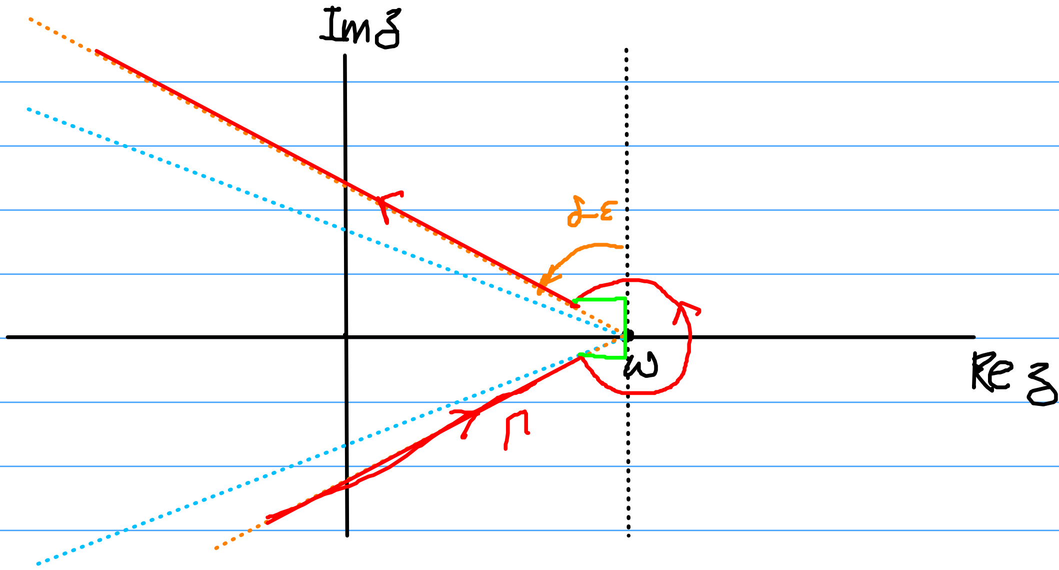
1. De la prueba de (c) $\Rightarrow$ (a) tenemos: para semigrupos analíticos con generador sectorial A siempre se tiene

$$\mathcal{R}(S(t)) \subset D(A^\infty) \subset D(A)$$

y además $\sup_{t>0} t^n \| A^n S(t) \| < \infty$.

2. En aplicaciones concretas lo que verifica uno es la condición (d), para demostrar que un operador dado genera un semigrupo analítico.
Si uno tiene la expresión del semigrupo uno puede probar (c) para probar que es analítico.

3. Es posible aplicar el lema de reescalamiento para mover el origen a cualquier abcisa $w \in \mathbb{R}$:



Podemos enunciar el teorema:

Teorema

Un operador cerrado, densamente definido $A : D(A) \subset X \to X$, es el generador de un semigrupo analítico si y sólo si existe $\omega \in \mathbb{R}$ tal que

$$\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\lambda > \omega\} \subset \rho(A)$$

y existe $C > 0$ uniforme tal que

(9) ... $$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{C}{|\lambda - \omega|} \quad \forall \operatorname{Re}\lambda > \omega.$$

En este caso el resolvente $\rho(A)$ contiene al sector

$$\Sigma_{\omega, \delta + \pi/2} = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\arg(\lambda - \omega)| < \delta + \tfrac{\pi}{2}\} \setminus \{\omega\}$$

para cierto $\delta > 0$ y el semigrupo se puede representar mediante

$$S(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{\lambda t} R(\lambda, A)\, d\lambda$$

donde Γ es cualquier curva suave por pedazos en $\Sigma_{\omega, \delta + \pi/2}$ que conecta $\infty \cdot e^{-i(\pi/2 + \delta')}$ con $\infty \cdot e^{i(\pi/2 + \delta')}$ para $\delta' \in (\arg(\lambda - \omega), \delta)$. Mas aún, para todo $t > 0$ tenemos:

$$(10) \cdots \qquad \| A S(t) \| \leq \frac{C}{t} e^{\omega t}.$$

Demostración: Ejercicio: adaptar la caracterización de un semigrupo analítico con el lema de reescalamiento $S(t) \mapsto e^{\omega t} S(t)$. Ver Renardy - Rogers, Thm. 12.31 - 12.32.

$\square$

Observación: En EDOs la solución $u = 0$ de

$$\frac{du}{dt} = Au, \qquad A \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

es estable si $\operatorname{Re} \sigma(A) < 0$.
Si A es el generador de un C_0-semigrupo y $\sigma(A) \subset \{ \operatorname{Re} \lambda \leq -\delta < 0 \}$ ¿Es cierto que $\| S(t) \| < \infty$ cuando $t \to \infty$? La respuesta en general es no.

Pero, para semigrupos analíticos esto sí se cumple.

Lema Sea A el generador de un semigrupo analítico y supongamos que $\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}$ para cierto $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces existe $M > 0$ tal que $\|S(t)\| \leq M e^{\omega t}$.

Dem. Ejercicio. Basta con adaptar el contorno $\Gamma \subset \{\operatorname{Re} \lambda \leq \omega\}$.

$\square$

Observación: Para un semigrupo analítico se tiene que:

$$S(t)u \text{ es } \infty \text{ diferenciable } \forall u \in X$$

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(S(t)u\right) = A^n S(t) u \qquad \forall u \in X, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

En términos de EDPs esto se traduce en una propiedad de regularización: incluso si los datos iniciales no son derivables, la solución es de clase C^∞.

Ejemplo: la ecuación del calor en $\mathbb{R}^n$

$$(1) \ldots \quad u_t = \Delta u, \qquad x \in \mathbb{R}^n, \ t > 0$$

$$(2) \ldots \quad u(x,0) = g(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Teoría básica de EDPs : $g \in C(\mathbb{R}^n)$, $|g(x)| \leq C$ entonces

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x-y|^2/4t} g(y)\, dy$$

$\in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$, es solución.

$g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, discontinua $\Rightarrow$ $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0,\infty))$