Lección 3.1: Aplicaciones. Ecuaciones de tipo parabólico.

Sección 3: Aplicaciones

3.1 Ecuaciones de tipo parabólico

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Consideremos el siguiente problema con valores iniciales y de frontera:

$$(1) \cdots \quad \begin{cases} u_t + Lu = 0 & \text{en } \Omega \times [0,T] \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times [0,T] \\ u = u_0 & \text{sobre } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

donde u_0 es una función conocida en un espacio apropiado y L es el operador diferencial de segundo orden:

$$(2) \cdots \quad Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x) u$$

Vamos a suponer que L es uniformemente elíptico, es decir, $\exists$ constante uniforme $\theta > 0$ tal que

$$(3) \cdots \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \theta |\xi|^2$$

$\forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$

Vamos a suponer que

(4) ... $\qquad a_{ij} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad b_i, c \in C(\overline{\Omega}).$

Ejemplo: $L = -\Delta$, es decir, $a_{ij}(x) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$, $b_i \equiv c \equiv 0$. Así,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j = |\xi|^2.$$

En este caso, la ecuación $u_t + Lu = u_t - \Delta u = 0$, es la ecuación del calor.

El operador $\partial_t + L$ es parabólico estrictamente si L es uniformemente elíptico.

Vamos a suponer que

(5) ... $\qquad a_{ij}(x) = a_{ji}(x) \qquad \forall x \in \Omega, \ 1 \leq i,j \leq n.$

Vamos a plantear el problema (1) como un problema abstracto de Cauchy de la forma

(6) ... $\qquad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, & t \in [0,T] \\ u(0) = u_0 \end{cases}$

con $A : D(A) \subset X \to X$, X de Banach, con $D(A)$ denso en X.

Para este problema, en $X = L^2(\Omega)$ (de Hilbert), consideramos el operador:

$$(7) \ldots \begin{cases} A = -L \\ A : D(A) = \underline{H_0^1(\Omega)} \cap \underline{H^2(\Omega)} \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \end{cases}$$

A es un operador no acotado, cerrado, densamente definido en $L^2(\Omega)$.

Definición La forma bilineal (o forma de Dirichlet) asociada a A se define como

$$(8) \ldots \quad a(u,v) = \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} \, dx + \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} v \, dx + \int_\Omega c(x) u v \, dx$$

$\forall \ u, v \in H_0^1(\Omega)$.

Se dice que $u \in H_0^1(\Omega)$ es solución débil del problema elíptico con condiciones de Dirichlet,

$$(9) \ldots \begin{cases} Lu = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

para cierto $f \in L^2(\Omega)$ si

$$(10) \ldots \quad a(u,v) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} \quad \forall\, v \in H_0^1(\Omega)$$

Una propiedad importante es la siguiente desigualdad de Garding:

<u>Teorema 1</u> (desigualdad de Garding)

Sea $A = -L$, con L uniformemente elíptico (operador de segundo orden) de la forma (2) que satisface (3)-(5). Entonces existen constantes $\alpha, \beta > 0$ y $\omega \geq 0$ tales que:

(i) $|a(u,v)| \leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} \quad \forall\, u,v \in H_0^1(\Omega)$

y (ii) $\beta \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u,u) + \omega \|u\|_{L^2}^2 \quad \forall\, u \in H_0^1(\Omega)$

<u>Demostración</u> Estimamos:

$$|a(u,v)| \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}(x)||u_{x_i}||v_{x_j}| \, dx + $$
$$+ \int_\Omega \sum_{i=1}^n |b_i(x)||u_{x_i}||v| \, dx + $$
$$+ \int_\Omega |c(x)||u||v| \, dx$$
$$\leq \sum_{i,j=1}^n \|a_{ij}\|_\infty \int_\Omega |Du||Dv| \, dx + $$

$a_{ij}, b_j, c \in C(\bar{\Omega})$

$$+ \sum_{i=1}^n \|b_i\|_\infty \int_\Omega |Du||v| \, dx + $$
$$+ \|c\|_\infty \int_\Omega |u||v| \, dx$$

$$\leq \alpha \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1}$$

para cierta constante $\alpha = \alpha(\|a_{ij}\|_\infty, \|b_i\|_\infty, \|c\|_\infty) > 0.$

Esto prueba (i).

Por la condición de elipticidad (3) tenemos para $u \in H_0^1(\Omega)$:

$$\theta \int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq \int_\Omega \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i} u_{x_j} \, dx$$

$$= a(u,u) - \int_\Omega \sum_{i=1}^n b_i(x) u_{x_i} u \, dx - \int_\Omega c(x)|u|^2 \, dx$$

$$\leq a(u,u) + \sum_{i=1}^n \|b_i\|_\infty \int_\Omega |Du||u| \, dx + \|c\|_\infty \int_\Omega |u|^2 \, dx$$

Pero,

$$\int_\Omega |Du||u| \, dx \leq \varepsilon \int_\Omega |Du|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega |u|^2 dx \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Escogiendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño tal que

$$\varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_\infty < \frac{\theta}{2}$$

obtenemos,

$$\underbrace{\left(\theta - \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \|b_i\|_\infty\right)}_{> \frac{\theta}{2} > 0} \int_\Omega |Du|^2 \, dx \leq a(u,u) + C_\varepsilon \int_\Omega |u|^2 dx$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\theta}{2} \|Du\|_{L^2}^2 \leq a(u,u) + C_\varepsilon \|u\|_{L^2}^2$$

Recordamos la desigualdad de Poincaré:

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|Du\|_{L^2(\Omega)}, \qquad \forall u \in H_0^1(\Omega)$$

con $C>0$ indep. de u. Por lo tanto,

$$\frac{\theta}{4C^2} \|u\|_{L^2}^2 + \frac{\theta}{4} \|Du\|_{L^2}^2$$

$$\leq \frac{\theta}{2} \|Du\|_{L^2}^2 \leq a(u,u) + C_\varepsilon \|u\|_{L^2}^2$$

es decir,

$$\beta \|u\|_{H^1}^2 \leq a(u,u) + \omega \|u\|_{L^2}^2$$

con constantes apropiadas $\beta = \beta(\|b_i\|_\infty, \|a_{ij}\|_\infty) > 0$ y $\omega = \omega(\|c\|_\infty, \|b_i\|_\infty) \geq 0$.

(ω puede ser 0: ej. $b_i = 0$, $c = 0$)

$\square$

Teorema 2 (de $\exists!$ y regularidad)
Sea L fuertemente elíptico. Entonces existe $\omega \geq 0$ tal que $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda \geq \omega$ y para cualquier $f \in L^2(\Omega)$ existe una única solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ al problema elíptico

$$(10) \ldots \begin{cases} Lu + \lambda u = f & \text{en } \Omega \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Además, $u \in H^2(\Omega)$.

Esbozo de demostración: Para demostrar existencia y unicidad de la solución débil $u \in H_0^1(\Omega)$ se aplica el teorema de Lax-Milgram:

$$a_\lambda(u,v) := a(u,v) + \lambda \langle u,v \rangle_{L^2} \qquad u,v \in H_0^1(\Omega)$$

satisface las hipótesis y $\exists!$ $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a_\lambda(u,v) = \langle f,v \rangle_{L^2} \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Para demostrar que $u \in H^2(\Omega)$ hay que aplicar la teoría de regularidad de operadores elípticos (véase Evans, cap. 6) $\square$

con esta información podemos preguntarnos si $A = -L$ genera un semigrupo.

Teorema 3 Sea $X = L^2(\Omega)$ y $A = -L$ el operador definido en (7) (con $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$). Entonces para cada $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\, \lambda \geq \omega$ el operador $A_\lambda := A - \lambda I$, $D(A_\lambda) = D(A)$, es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo contractivo en $L^2(\Omega)$.

Demostración: Claramente $C_0^\infty(\Omega) \subset H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = D(A) \subset L^2(\Omega) \Rightarrow D(A)$ es denso en $L^2(\Omega)$. Nótese que

$$\langle Lu, v \rangle_{L^2(\Omega)} = a(u,v) = \langle -Au, v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$\forall\, u, v \in H_0^1(\Omega)$. Por Garding tenemos que

$$\begin{aligned} Re \langle A_\lambda u, u \rangle_{L^2} &= \langle Au, u \rangle_{L^2} - (Re\,\lambda) \|u\|_{L^2}^2 \\ &= -a(u,u) - (Re\,\lambda) \|u\|_{L^2}^2 \\ \text{Garding } &\leq -\beta \|u\|_{H^1}^2 - (\underbrace{Re\,\lambda - \omega}_{\geq 0}) \|u\|_{L^2}^2 \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

Si $Re\,\lambda \geq \omega$ entonces el operador A_λ es disipativo.

Además, $\forall$ $Re\lambda \geq \omega$ el rango de $\mu I - A_\lambda$ es $L^2(\Omega)$ (por el teorema 2 de existencia y unicidad). Aplicando Lumer-Phillips para concluir que A_λ es el generador de un C_0-semigrupo contractivo en $L^2(\Omega)$ $\square$

<u>Corolario 1</u> Sea $A = -L$, con L unif. elíptico. $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, $\partial\Omega \in C^1$. Entonces para cualquier $u_0 \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ el problema de Cauchy homogéneo,

$$(1) \cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au = -Lu \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una única solución $u \in C([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))$ $\forall$ $T > 0$. Esta solución también es solución en sentido fuerte del problema (1).

<u>Demostración</u> Por el teorema 3, $\forall$ $\lambda \in \mathbb{C}$ con $Re\lambda \geq \omega$, $A_\lambda = A - \lambda I$ es el generador de un C_0-semigrupo contractivo.
Por el lema de reescalamiento, A es el generador de un C_0-semigrupo cuasi-contractivo. Por lo tanto, el problema de Cauchy

homogéneo con $u_0 \in D(A)$ tiene una única solución clásica $u \in C([0,T]; D(A)) \cap C^1((0,T]; D(A))$.
Esta solución resuelve (1) en el sentido que $u : [0,T] \to D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
$\Rightarrow u_t = -Lu, \quad u(\cdot,t) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$
$\forall\, t$ fijo, $u(x,t) = 0$ c.d.s. en $x \in \partial\Omega$, $\forall t$.
(es decir, $\gamma_0(u(\cdot,t)) = 0 \quad \forall\, t$ fijo) y
$u(0,\cdot) = u_0(\cdot) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$

$\square$

Sin embargo, como L es uniformemente elíptico podemos decir más.

Teorema 4 Sea $A = -L$, L unif. elíptico, $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Entonces el operador $A : D(A) \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ es el generador infinitesimal de un semigrupo analítico en $L^2(\Omega)$.

Demostración Sea $A_\omega := A - \omega I$, con $D(A_\omega) = D(A)$, $\omega \geq 0$. Aplicando la desigualdad de Garding:

$$
\begin{aligned}
-\operatorname{Re} \langle A_\omega u, u \rangle_{L^2} &= -\langle Au, u \rangle_{L^2} + \omega \|u\|_{L^2}^2 \\
&= a(u,u) + \omega \|u\|_{L^2}^2 \\
&\geq \beta \|u\|_{H^1}^2 \qquad \forall\, u \in D(A) \\
&\qquad\qquad\qquad\quad = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)
\end{aligned}
$$

Además, integrando por partes se puede verificar que

$$\left| \operatorname{Im} \langle A_\omega u, u \rangle_{L^2} \right| \leq \left| \langle A_\omega u, u \rangle_{L^2} \right| \leq b \|u\|_{H^2}^2 \quad \forall u \in D(A)$$

para cierta constante $b > 0$. Entonces que el rango numérico de $-A_\omega$ en $L^2(\Omega)$, definido como

$$nr(-A_\omega) := \left\{ \langle -A_\omega u, u \rangle_{L^2} : \begin{array}{l} u \in D(A), \\ \|u\|_{L^2} = 1 \end{array} \right\}$$

satisface

$$nr(-A_\omega) \subset S_{\theta_1} := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : -\theta_1 < \arg \lambda < \theta_1 \right\}$$

donde $\theta_1 = \operatorname{Arctan}(b/\beta) < \pi/2$. Escogiendo θ tal que $\theta_1 < \theta < \pi/2$ y definiendo el sector

$$\Sigma_\theta := \{ \lambda \in \mathbb{C} : |\arg \lambda| > \theta \}$$

entonces existe una constante $C_\theta > 0$ tal que

$$d(\lambda, nr(-A_\omega)) \geq C_\theta |\lambda| \quad \forall \lambda \in \Sigma_\theta .$$

$d(\lambda, M)$ - distancia de λ a $M \subset \mathbb{C}$.

Por el teorema 3 sabemos que $\forall \mu \in \mathbb{R}$ con $\mu < 0$, $\mu \in \rho(-A_\omega)$. Por lo tanto, Σ_θ está contenido en alguna componente de $nr(-A_\omega)$, que tiene una intersección no vacía con $\rho(-A_\omega)$. Invocando el Teorema 1.3.9 de Pazy (pág. 12) esto implica que

$$\Sigma_\theta \subset \rho(-A_\omega)$$

Por lo tanto, $\forall \lambda \in \Sigma_\theta$ tenemos que

$$\| R(\lambda, -A_\omega) \| \leq d(\lambda, \overline{nr(-A_\omega)})^{-1}$$

$$\leq \frac{1}{C_\theta |\lambda|}$$

Esto implica que $+A_\omega$ es sectorial y es el generador de un semigrupo analítico. Dado que perturbaciones acotadas de generadores de semigrupos analíticos son generadores de semigrupos analíticos concluimos que

$$A = A_\omega + \omega I$$

es el generador de un semigrupo analítico en $L^2(\Omega)$

$\square$

Corolario 2 Sea $A=-L$, L unif. elíptico en $D(A) = H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$. Sea $f(x,t)$ tal que $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$, $\forall t\in (0,T]$ fijo. Además supongamos que

$$\int_\Omega |f(x,t)-f(x,\xi)|^2 dx \leq K|t-\xi|^\theta$$

con $0<\theta<1$ y $K>0$ constante. Entonces para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ el problema de Cauchy no homogéneo

$$(12)\cdots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au + f, & t>0 \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

tiene una única solución clásica $u\in C^1([0,T]; H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega))$.

Demostración Como A genera un semigrupo analítico, $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ en $X = L^2(\Omega)$, y $u_0 \in L^2(\Omega)$ sabemos que la solución "mild"

$$u(t) = S(t)u_0 + \int_0^t S(t-\xi)f(\xi)\,d\xi$$

satisface $Au(t) \in C^\theta([\delta,T]; X)$, $du/dt \in C^\theta([\delta,T]; X)$ para cualquier $\delta>0$. Esto implica que

$$u\in C^{\theta+1}([0,T]; D(A))$$

ya que la solución "mild" es clásica en ese caso y $u(t) \in D(A)$ $\forall t \in [0,T]$ fijo.

$\square$

Leer en Pazy, soluciones a problemas parabólicos en $L^p(\Omega)$.

Problema de evolución parabólico

Nuevamente, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abierto, acotado, con $\partial\Omega \in C^1$. Vamos a considerar un operador uniformemente elíptico de la forma:

$$(1) \cdots \quad L(t)u := -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x,t)\, u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)\, u_{x_i} + c(x,t)\, u$$

Vamos a hacer las siguientes hipótesis sobre $L(t)$:

(A_1) La familia de operadores $\{L(t)\}_{t\in[0,T]}$ es uniformemente elíptica, es decir, existe $\theta > 0$ independiente de (x,t) tal que

$$(2) \cdots \quad \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)\,\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2$$

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \forall\, (x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,T].$$

(A_2) Los coeficientes son funciones suaves de (x,t), es decir,

$$a_{ij},\, b_i,\, c \in C^\infty(\overline{\Omega}\times[0,T])$$

Además, existen constantes $C_1>0$, $0 \leq b_0 < 1$ tales que

$$(3) \cdots \quad \left.\begin{array}{l} |a_{ij}(x,t) - a_{ij}(x,\xi)| \\ |b_i(x,t) - b_i(x,\xi)| \\ |c(x,t) - c(x,\xi)| \end{array}\right\} \leq C_1 |t-\xi|^{b_0}$$

$$\forall\, x \in \overline{\Omega}, \quad \forall\ 0 \leq \xi, t \leq T.$$

Así, definimos la familia de operadores

$$(4) \cdots \begin{cases} A(t) : D(A(t)) \equiv D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega) \\ A(t)u := -L(t)u \end{cases}$$

Así, interpretamos el problema de valores iniciales y de frontera para $L(t)$

$$(5)\ldots \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + L(t)u = f(x,t) & \text{en } \Omega\times[0,T] \\ u(x,t) = 0 & \text{en } \partial\Omega\times[0,T] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega\times\{t=0\} \end{cases}$$

como un problema de Cauchy para el sistema de evolución

$$(6)\ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t)u + f, \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

donde $u_0 \in L^2(\Omega)$ y $f(\cdot,t) \in L^2(\Omega)$ $\forall$ $t\in[0,T]$ fijo.

La solución "mild" de (6) se identifica con la solución "débil" de (5).

Teorema Bajo las condiciones $(A_1)-(A_2)$ existe una constante $k\geq 0$ tal que la familia de operadores $\{-A(t)+kI\}_{t\in[0,T]}$ es una familia "parabólica", es decir, satisface:

(P_1): El dominio $D(A(t))$ es independiente de t: $D(A(t)) = D \ \forall t \in [0,T]$. Además, D es denso en X.

(P_2): Para cada $t \in [0,T]$ el resolvente $R(\lambda, -A(t) + kI)$ existe para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, y existe una constante $M > 0$ tal que

$$\| R(\lambda, -A(t) + kI) \| \leq \frac{M}{1+|\lambda|}$$

$\forall \, \mathrm{Re}\,\lambda \leq 0, \ \forall t \in [0,T]$.

(P_3): existen constantes L y $0 < \alpha \leq 1$ tales que

$$\| (A(\xi) - A(t))(-A(\tau) + kI)^{-1} \| \leq$$
$$\leq L |t - \xi|^{\alpha}$$

para cualesquiera $\xi, t, \tau \in [0,T]$.

Dem. Ver Pazy, lema 6.1, p. 227 $\square$