Lección 3.2: Ecuaciones de tipo parabólico (continuación). Ecuaciones hiperbólicas: ecuación de onda.

<u>Teorema</u> (Pazy) $\underbrace{(A_1), (A_2)}$ $\Rightarrow$ $-A(t) + k I$, $k \geq 0$ satisface $(P_1) - (P_3)$.

<u>Teorema 1</u> Sea $A(t) : D \subset L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$ con $D = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, una familia de operadores que satisface (A_1), (A_2), indexada por $t \in [0,T]$. Sea $f(\cdot, t) \in L^2(\Omega)$ para cada $t \in [0,T]$ fija, que además satisface

$$(1)\ldots \quad \left(\int_\Omega |f(t,x) - f(s,x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \leq C |t-s|^\theta$$

con $C > 0$, $0 \leq \theta < 1$, constantes. Entonces para cada $u_0 \in L^2(\Omega)$ el problema de Cauchy de evolución

$$(2)\ldots \quad \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = A(t) u + f, & \text{en } \Omega \times [0,T] \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times [0,T] \\ u(0) = u_0, & \text{en } \Omega \end{cases}$$

tiene una única solución generalizada.

<u>Esbozo de demostración</u>

Primero notamos que si f satisface (1) entonces también $e^{-kt} f$ satisface (1) para cualquier $k \in \mathbb{R}$. Por el teorema, existe algún $k \geq 0$ tal que la familia $-A(t) + k I$ es parabólica (satisface $(P_1) - (P_3)$).

Escogiendo $k \geq 0$ adecuadamente, por la teoría "parabólica" (ver Pazy, cáp. 5) el problema

$$(3)\ldots \begin{cases} \dfrac{dv}{dt} = (A(t) - kI)v + e^{-kt}f \\ v(0) = u_0 \in X = L^2(\Omega) \end{cases}$$

tiene una única solución clásica. Entonces claramente $u = e^{kt}v$ es solución de (2).
La unicidad se deduce de la unicidad de v como solución de (3) y del hecho que u es solución de (1) si y sólo si $v = e^{-kt}u$ es solución de (3)

$\square$

Nota sobre regularidad: se puede probar que si $\partial\Omega$ es suficientemente suave, f es suave, y a_{ij}, b_i, c son suaves entonces la solución generalizada es una solución clásica. Por ejemplo, si $\partial\Omega \in C^\infty$, $a_{ij}, b_i, c \in C^\infty$, $f \in C^\infty$ entonces $u \in C^\infty((0,T] \times \bar{\Omega})$.

Problemas con datos de Neumann

Ejemplo concreto: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^2$. consideremos el problema:

OJO

$$(1)\ldots\begin{cases} u_t = \Delta u, & \text{en } \Omega\times[0,T] \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u\cdot\nu = 0, & \text{sobre } \partial\Omega\times[0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\Omega \end{cases}$$

donde $\nu\in\mathbb{R}^n$, $|\nu|=1$, es el vector normal unitario en cada punto de $\partial\Omega$.

Vamos a interpretar (1) como un problema abstracto de Cauchy, de la forma:

$$(2)\cdots\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

para cierto operador $A: D(A)\subset \underline{X} \to X$ (generador infinitesimal).

<u>caso $X = H^1(\Omega)^*$</u> :

Definimos el operador mediante

$$(3)\cdots\begin{cases} D(A) := H^1(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^1(\Omega)^* = X \\ Au := l_u \in H^1(\Omega)^* & \forall u\in H^1(\Omega) \\ l_u(v) := -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v\in H^1(\Omega) \end{cases}$$

Claramente $D(A)$ es denso en X.
Aquí <u>no</u> identificamos a $H^1(\Omega)$ (espacio de Hilbert) con su dual $H^1(\Omega)^*$

(por el teo. de Riesz $\forall\, \ell \in H^1(\Omega)^*$ $\exists!$ $u_\ell \in H^1(\Omega)$ tal que $\ell(v) = \langle u_\ell, v\rangle_{H^1(\Omega)}$ $\forall\, v \in H^1(\Omega)$).

¿Por qué? Suponiendo $u \in H^2(\Omega)$ y $\partial u/\partial \nu = 0$ sobre $\partial\Omega$ entonces $\forall\, v \in H^1(\Omega)$ se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \Delta u, v\rangle_{L^2(\Omega)} &= \int_\Omega v\,\Delta u \, dx \\ &= \int_{\partial\Omega} v \underbrace{\frac{\partial u}{\partial \nu}}_{=0} dS_x - \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx \\ &= -\langle \nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)}\end{aligned}$$

<u>Lema 1</u> El operador $A : D(A) \subset \underline{X} \to \underline{X}$ es el generador de un C_0-semigrupo contractivo en $\underline{X} = H^1(\Omega)^*$.

<u>Demostración</u>: $D(A)$ es denso. A es un operador cerrado (ejercicio). Basta con verificar que $\forall\, \lambda > 0$ se tiene que
$\lambda \in \rho(A)$ y $\|R(\lambda, A)\| \le \frac{1}{\lambda}$.

Aplicando Hille-Yosida tenemos el resultado. Así, sea $\lambda > 0$. Si $u \in D(A) = H^1(\Omega)$ consideramos $v = (\lambda I - A)u \in H^1(\Omega)^*$.

$$\begin{aligned}\langle v, u\rangle &= \langle (\lambda I - A)u, u\rangle \\ &= \langle \underbrace{\lambda u}_{\in H^1(\Omega)^*}, u\rangle - \langle Au, u\rangle\end{aligned}$$

$$= \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall u \in H^1(\Omega).$$

Por lo tanto,

$$\lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

$$= \langle v, u \rangle \underset{\text{dualidad } L^2}{\leq} \|v\|_* \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

De este modo, obtenemos

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} = \|(\lambda I - A)^{-1} v\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\leq \frac{\|v\|_*}{\lambda}$$

$$\therefore \sup_{\substack{\|v\|_* = 1 \\ v \in H^1(\Omega)^*}} \|(\lambda I - A)^{-1} v\|_{L^2} \leq \frac{1}{\lambda}$$

es decir,

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$$

$\square$

Corolario Para cada $u_0 \in H^1(\Omega)^*$ existe una única solución "mild" de (2) dada por $u(t) = S(t)u_0$, $t > 0$.

caso $X = L^2(\Omega)$

Definimos el operador, $B : D(B) \subset X \to X$, mediante

$$(H)\cdots\begin{cases} D(B) := \{u\in H^2(\Omega) : \partial u/\partial\nu = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\} \\ \quad\;\; = \{u\in H^2(\Omega) : \gamma_1(u) = 0\} \\ Bu := \Delta u \qquad \forall\, u\in D(B) \end{cases}$$

Nota : $u\in H^1(\Omega),\ \partial\Omega\in C^2 \Rightarrow \gamma_0 : H^1(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$
$\gamma_0(u) = u_{|\partial\Omega}$
si $u\in C(\bar\Omega)$

$u\in H^2(\Omega),\ \partial\Omega\in C^2 \Rightarrow \gamma_1 : H^2(\Omega)\to L^2(\partial\Omega)$
$\gamma_1(u) = \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{\partial\Omega}$ si $u\in C^1(\bar\Omega)$.

$D(B)$ es denso en $L^2(\Omega)$ (Evans, cap sobolev).

<u>Lema 2</u> El operador $B : D(B)\subset X\to X$, es el generador de un semigrupo contractivo en $X = L^2(\Omega)$.

<u>Demostración</u> : Sea $u\in D(B)$. Entonces para todo $v\in H^1(\Omega)$:

$$\langle Bu, v\rangle_{L^2(\Omega)} = \langle \Delta u, v\rangle_{L^2(\Omega)}$$
$$= \int_\Omega \Delta u\, v\, dx$$
$$= \int_{\partial\Omega} v\, \underbrace{\gamma_1(u)}_{=\frac{\partial u}{\partial\nu}}\, dS_x - \langle\nabla u, \nabla v\rangle_{L^2(\Omega)} .$$

$$= -\langle \nabla u, \nabla v \rangle_{L^2(\Omega)}$$

$$\left(= \langle l_u, v \rangle \quad \text{en } H^1(\Omega)^* \right)$$

Esto muestra que $\tilde{A}u = Bu \quad \forall\, u \in D(B)$.

Se puede probar (ejercicio) que para todo $\lambda > 0$, $\lambda I - B$ es una biyección de $D(B)$ a $L^2(\Omega)$. Por la misma estimación

$$\| R(\lambda, B) \| \leq \frac{1}{\lambda}$$

Por el teorema de Hille-Yosida tenemos el resultado. $\square$

<u>Corolario</u> Para todo $u_0 \in L^2(\Omega)$ existe una única solución clásica del problema de Cauchy (2).

<u>Observación</u>: Δ_D Laplaciano de Dirichlet
Δ_N " de Neumann

0 siempre es valor propio de Δ_N (la función constante es función propia). Esto no ocurre con Δ_D (el espectro es real negativo).

3.2 Ecuaciones de tipo-hiperbólico

Vamos a comenzar con un problema sencillo: ecuación de onda en un dominio acotado con condiciones iniciales y de frontera:

$$(1)\cdots\quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{en } \Omega \times [0,T) \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \times [0,T] \\ u = f(x), & \\ u_t = g(x), & x \in \Omega,\ t=0 \end{cases}$$

$(f,g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$

$\Omega \subset \mathbb{R}^n$, abierto, acotado con $\partial\Omega \in C^1$.

Reescribimos (1) como un sistema de primer orden:

$$(2)\cdots\quad \begin{cases} u_t := v & \text{en } \Omega \times [0,T) \\ v_t = \Delta u & \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega \times [0,T] \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & \text{en } \Omega \times \{t=0\} \end{cases}$$

Escogemos $X = \underset{u}{H_0^1(\Omega)} \times \underset{v}{L^2(\Omega)}$

Por Poincaré $\exists\ \beta > 0$ tal que

$$\beta \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \qquad \forall\, u \in H_0^1(\Omega).$$

Norma en X : $\|(u,v)\|_X := \left(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2\right)^{1/2}$

ya que $\|\cdot\|_0 \approx \|\cdot\|_{H^1}$ en $H_0^1(\Omega)$

$$\frac{1}{C}\|u\|_{H^1} \leq \|\nabla u\|_{L^2} \leq C\|u\|_{H^1}$$

(Poincaré)

Definimos $A : D(A) \subset X \to X$ mediante:

$$(\ast) \ldots \begin{cases} D(A) = \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega) \subset X \\ \qquad \to X \\ \qquad \text{denso en } X = H_0^1(\Omega) \cap L^2(\Omega) \\ A(u,v) := (v, \Delta u) \quad \forall (u,v) \in D(A) \end{cases}$$

<u>Lema 1</u> El operador A es el generador de un C_0-semigrupo contractivo en $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

<u>Demostración</u> Claramente $D(A) = \left[H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right] \times H_0^1(\Omega)$ es denso en X.

A es cerrado: sea $(u_n, v_n) \in D(A)$ tal que

$(u_n, v_n) \to (u,v)$ en X,

$A(u_n, v_n) \to (f,g)$ en X.

Entonces $A(u_n, v_n) = (v_n, \Delta u_n) \to (f,g)$ en X

como $v_n \to v$ en $L^2(\Omega)$ y

$\Delta u_n \to g$ en $L^2(\Omega)$, entonces concluimos que $u_n \to u$ en $H^2(\Omega)$ y $g = \Delta u$, además $f = v$.

$$\Rightarrow \quad (u,v) \in D(A), \quad A(u,v) = (v, \Delta u) = (f,g).$$

$\therefore$ A es cerrado.

Ahora, sea $\lambda > 0$. Tomamos $(f,g) \in X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, y sea la solución $(u,v) \in D(A)$ a

$$(\lambda I - A)(u,v) = \lambda(u,v) - A(u,v) = (f,g)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{ll} \lambda u - v = f, & u \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ \lambda v - \Delta u = g, & v \in H_0^1(\Omega) \end{array}$$

Combinando obtenemos:

$$\lambda^2 u - \Delta u = \lambda f + g \qquad \cdots (4)$$

Como $\lambda^2 > 0$ y tenemos por Poincaré $\beta \|u\|_{H^1}^2 \leq \|\nabla u\|_{L^2}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)$ ($\|\cdot\|_\nabla \approx \|\cdot\|_{H^1}$ en $H_0^1(\Omega)$), por la teoría de existencia y unicidad a ecuaciones elípticas (Evans), existe una solución única $u \in H_0^1(\Omega)$ de (4).

Definimos $v := \lambda u - f \in H_0^1(\Omega)$ y así tenemos que $\exists \ (u,v) \in D(A)$ tal que

$$\lambda(u,v) - A(u,v) = (f,g)$$

Esto implica que $\forall \lambda > 0$, $\lambda \in \rho(A)$.
Es decir, $(0,\infty) \subset \rho(A)$.

Por lo tanto, $(u,v) = R(\lambda,A)(f,g)$.

De la segunda ecuación:

$$\lambda \|v\|_{L^2}^2 + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \langle g, v\rangle_{L^2}$$

Sustituyendo $\lambda u - f = v$ se obtiene

$$\lambda \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \langle g, v\rangle_{L^2(\Omega)} + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla f \, dx$$

$$\leq \left(\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \times \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

Esto implica que

$$\|(u,v)\|_X = \|R(\lambda,A)(f,g)\|_X \leq \frac{1}{\lambda} \|(f,g)\|_X$$

$$\Rightarrow \quad \|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{\lambda} \qquad \forall \lambda > 0.$$

Por el teorema de Hille-Yosida obtenemos la conclusión. $\square$

Corolario $\forall\ (f,g) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$ existe una única solución clásica al problema (1).

Ecuación de onda en todo el espacio:

$$(1) \ldots \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R}^n \\ u_t(x,0) = g(x), & \end{cases}$$

El problema (1) es equivalente al sistema de primer orden:

$$(2) \begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \underset{\downarrow}{A} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & x \in \mathbb{R}^n,\ t > 0 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,0) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & \forall x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Consideremos $\underline{X} = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$

$$f \in H^s(\mathbb{R}^n) \iff (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

$\forall s \in \mathbb{R}$.

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset X \quad (\text{denso})$$

$$|||(u,v)||| := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 + |\nabla u|^2 + |v|^2 \, dx \right)^{1/2}$$

El operador $A : D(A) \subset X \to X$ se define mediante:

$$(2) \cdots \begin{cases} D(A) := H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \\ A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \end{pmatrix} \quad \forall (u,v) \in D(A) \end{cases}$$

<u>Lema 1</u> Sea $\mu > 0$ y sea $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \geq 0$. Entonces existe una única solución $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ a la ecuación

$$u - \mu \Delta u = f$$

<u>Dem.</u> Ejercicio: aplicar transformada de Fourier. $\square$

Lema 2 Para cualquier $F = (f, g) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, la ecuación

$$F = (I - \lambda A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: (I - \lambda A) U$$

tiene una única solución $U := (u, v) \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ $\forall\, s \geq 2$. Más aún,

$$|||U||| \leq (1 - 2|\lambda|)^{-1} \, |||F|||$$

$\forall\ 0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$.

Demostración Sea $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y sean w_j soluciones de

$$w_j - \lambda^2 w_j = f_j, \qquad j = 1, 2$$

$f_1 = f$, $f_2 = g$. Por el lema 1 $(\mu = \lambda^2 > 0)$ existen $w_j \in H^s(\mathbb{R}^n)$ soluciones $\forall s \geq 0$.

Se verifica fácilmente que

$$u = w_1 + \lambda w_2$$

$$v = w_2 + \lambda \Delta w_1$$

es solución de

$$(I - \lambda A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

Además $u-\lambda v = f,\quad v-\lambda\Delta u = g$

y $(u,v) = U \in H^s(\mathbb{R}^n)\times H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ si $s\geq 2$

Así,

$$|||F|||^2 = |||(f,g)|||^2 = \langle f-\Delta f, f\rangle_{L^2} + \langle g,g\rangle_{L^2}$$

$$= \langle u-\lambda v - \Delta u + \lambda v,\ u-\lambda v\rangle_{L^2}$$

$$+ \langle v-\lambda\Delta u,\ v-\lambda\Delta u\rangle_{L^2}$$

$$\geq \langle u-\Delta u, u\rangle_{L^2} - 2|\lambda|\,\mathrm{Re}\langle u,v\rangle_{L^2}$$

$$+ \|v\|_{L^2}^2$$

$$\geq (1-|\lambda|)|||U|||^2$$

Por lo tanto, si $0<|\lambda|<\frac{1}{2}$ tenemos que

$$|||F|||^2 \geq (1-2|\lambda|)^2|||U|||^2.$$

$\square$

Este lema implica que el rango de $I-\lambda A$ contiene a $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $\forall\lambda$ real con $0<|\lambda|<1/2$. Es posible probar: A es cerrado. Esto implica que el rango de $I-\lambda A$ es todo el espacio $H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$. Así tenemos

<u>Corolario</u> $\forall$ $F=(f,g)\in H^1(\mathbb{R}^n)\times L^2(\mathbb{R}^n)$ y todo $\lambda\in\mathbb{R}$ con $0<|\lambda|<\frac{1}{2}$, la ecuación

$$U-\lambda AU = F$$

tiene una única solución $U\in H^2(\mathbb{R}^n)\times H^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|||U||| \leq (1-2|\lambda|)^{-1}|||F|||$$