Lección 3.3 : Ecuaciones hiperbólicas II

ANUNCIOS :

- última clase : viernes 26 de nov. 16:00 – 18:00
- Presentaciones : * Lunes 6 dic.
  Luis Antonio Cedeño 16:00 hrs.
  Uriel Martínez 16:50 hrs.
  * Miércoles 8 dic.
  Cristian Morales 16:00 hrs.
  Jonathan Waffrichoux 16:50 hrs.

Ecuación de onda en $\mathbb{R}^n$

$$(1)\cdots\quad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ u(x,0) = f(x) & \\ u_t(x,0) = g(x) & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Equivalente al sistema

$$(2)\cdots\quad \begin{cases} \partial_t \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} & x \in \mathbb{R}^n,\ t>0 \\ \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(x,0) = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}(x) & \end{cases}$$

Consideremos $\underline{X} = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ con norma

$$|||(u,v)||| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 + |\nabla u|^2 + |v|^2 \right)^{1/2}$$

$$\left.\begin{aligned} D(A) &= H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) \\ A &= \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \cdots (4)$$

Probamos:

Lema 1 Sea $\mu > 0$ y $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, con $s \geq 0$. Entonces existe una única solución $u \in H^{s+2}(\mathbb{R}^n)$ a la ecuación $u - \mu \Delta u = f$.

Lema 2 Para cualquier $F = (f, g) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \times C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ y cualquier $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, la ecuación

$$F = (I - \lambda A)\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} =: (I - \lambda A) U$$

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

tiene una única solución $U \in H^s(\mathbb{R}^n) \times H^{s-2}(\mathbb{R}^n)$ $\forall s \geq 2$. Mas aún

$$|||U||| \leq (1 - 2|\lambda|)^{-1} |||F||| \quad \forall \; 0 < |\lambda| < \frac{1}{2}$$

Nota: por densidad, tenemos la misma conclusión $\forall$ $F \in H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$ con $U \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1 El operador A definido en (4) es el generador infinitesimal de un C_0-grupo, $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ en $H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n) = X$, que satisface

$$\|S(t)\| \leq e^{2|t|} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad \ldots (5)$$

<u>Demostración</u> Claramente $D(A) = H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n)$ es denso en $X = H^1(\mathbb{R}^n) \times L^2(\mathbb{R}^n)$. Por el lema 2 y la nota, deducimos que para todo $\mu \in \mathbb{C}$ con $|\mu| > 2$, $\mu \in \rho(A)$ y

$$\| R(\mu, A) \| = \| (\mu I - A)^{-1} \| \leq \frac{1}{|\mu| - 2} \quad \forall\, |\mu| > 2$$

Por el comentario de la lección 2.6 en el caso de un C_0-grupo y en el contexto de Hille-Yosida (caso cuasi-contractivo), esta estimación implica que A es el generador de un C_0-grupo, $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, que satisface (5) $\square$

<u>Corolario.</u> Para cualesquiera $F = (f, g) \in H^2(\mathbb{R}^n) \times H^1(\mathbb{R}^n) = D(A)$ existe una única solución $u \in C^1([0,T]; H^2(\mathbb{R}^n))$ que satisface (1).

<u>Demostración</u> Si $\{S(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ es el C_0-grupo generado por A, como $F \in D(A)$ entonces

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} := S(t) \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$$

es solución clásica de (2); es decir, $u \in C^1([0,T]; H^2(\mathbb{R}^n))$ es la única solución de (1).

Si $F=(f,g)$ es suave entonces la solución también es suave como función del espacio. Para ello invocamos:

<u>Lema</u> (Sobolev) Para todo $0 \leq m < s - \frac{n}{2}$, $s \in \mathbb{R}$, $s > \frac{n}{2}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se tiene que

$$H^s(\mathbb{R}^n) \subset C^m(\mathbb{R}^n).$$

Suponiendo que $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces claramente $(f,g) \in D(A^k)$ $\forall k \geq 1$. Por lo tanto, $(u,v) = S(t)(f,g) \in D(A^k)$ $\forall k \geq 1$. En particular, $\Delta^k u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\forall k \geq 0$. Por el lema de Sobolev, $u(\cdot,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ para cualquier $t \in \mathbb{R}$ fijo.

$$\therefore \quad u \in C^1(\mathbb{R}; C^\infty(\mathbb{R}^n))$$

<u>Operador de transporte</u>

Consideremos la siguiente ecuación escalar con condición inicial:

$$(1) \cdots \begin{cases} u_t + \bar{a} \cdot \nabla u = 0, & (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Aquí $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ vector constante, $a \neq 0$.
Ecuación de transporte <u>lineal</u>.

Interpretamos (1) como un problema abstracto de Cauchy de la forma:

$$(2)\ldots \begin{cases} \dfrac{du}{dt} = Au, & t\in\mathbb{R} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

$A: D(A)\subset X \to X$, generador de un C_0-grupo, X de Banach.

Consideremos:

$$(3)\ldots \begin{cases} X = L^p(\mathbb{R}^n), & 1\leq p<\infty \\ D(A) = \{u\in L^p(\mathbb{R}^n) : \bar{a}\cdot\nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)\} \\ Au := -\bar{a}\cdot\nabla u \end{cases}$$

Nota: aquí $\bar{a}\cdot\nabla u$ para $u\in L^p(\mathbb{R}^n)$ denota la derivada direccional en sentido de distribuciones:

$$\langle \bar{a}\cdot\nabla u, \varphi\rangle = -\sum_{j=1}^{n} \langle u, a_j \partial_{x_j}\varphi\rangle$$

$\forall\ \varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Teorema 1 El operador A definido en (3) es el generador de un C_0-grupo de isometrías, $\{S(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $\|S(t)\| = 1$. Mas aún, este grupo está dado explícitamente por

$$S(t)u(x) = u(x - t\bar{a})$$

$\forall u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

Necesitamos:

<u>Lema 1</u> Sean $\lambda > 0$, $1 \leq p < \infty$. Si $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$ es solución (en sentido distribucional, i.e. en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) de

$$u + \lambda \bar{a} \cdot \nabla u = 0 \quad \cdots \quad (4)$$

entonces $u \equiv 0$ c.d.s. en $\mathbb{R}^n$.

<u>Demostración</u> Sea η_ϵ el alisador de Friedrichs para cada $\epsilon > 0$. Si $\{\epsilon_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión tal que $\epsilon_k \geq 0$, y $\epsilon_k \to 0^+$ cuando $k \to \infty$, entonces definimos

$$u_k := \eta_{\epsilon_k} * u \quad \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Además, $u_k(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \eta_{\epsilon_k}(x-y)\, u(y)\, dy$

Como u es solución de (4) en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ y la integración se hace supp η_{ϵ_k}

es fácil verificar que

$$u_k + \bar{a}\cdot\nabla u_k = 0 \qquad \forall k\in\mathbb{N}$$

Para cada $x\in\mathbb{R}^n$ definimos $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$
$h(\xi) := e^{\xi} u_k(x+\lambda\xi\bar{a})$, $\xi\in\mathbb{R}$. h es diferenciable en $\xi\in\mathbb{R}$:

$$h'(\xi) = e^{\xi}u_k(x+\lambda\xi\bar{a}) + \lambda e^{\xi}\bar{a}\cdot\nabla u_k(x+\lambda\xi\bar{a})$$

$$= e^{\xi}\Big[\big(\underbrace{u_k + \lambda\bar{a}\cdot\nabla u_k}_{=0}\big)(x+\lambda\xi\bar{a})\Big]$$

$$= 0$$

Es decir, h es constante en $\xi\in\mathbb{R}$.
Tomando el límite cuando $\xi\to-\infty$ y dado que u_k es acotada, concluimos que $h(\xi)\equiv 0$ $\forall\xi\in\mathbb{R}$. Esto implica que

$$u_k(x)\equiv 0 \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Como $x\in\mathbb{R}^n$ es arbitrario y $\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x)$ en $L^r(\mathbb{R}^n)$, obtenemos la conclusión

$\square$

Observación: un argumento análogo permite verificar que el lema 1 se cumple también si $\lambda<0$.

Lema 2 Sean $\lambda \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $1 \leq p < \infty$; $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Entonces la función

$$Lu(x) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda} u(x - \xi \bar{a})\, d\xi$$

satisface la ecuación

$$Lu + \lambda \bar{a} \cdot \nabla(Lu) = u \quad \cdots (5)$$

en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Además,

$$\|Lu\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \cdots (6)$$

Demostración Supongamos w.l.o.g. que $\lambda > 0$. Sea $u \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$. Definimos el operador

$$Mu(x) := \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda} u(x + \xi \bar{a})\, d\xi .$$

Entonces, para toda función de prueba $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$\langle Lu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} Lu(x)\, \varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda} u(x - \xi \bar{a})\, d\xi\, \varphi(x)\, dx$$

Fubini y $y = x - \xi \bar{a}$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-\xi/\lambda}}{\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, \varphi(y + \xi \bar{a})\, dy\, d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(y)\, M\varphi(y)\, dy$$

Por otra parte,

$$M(\lambda \bar{a}\cdot\nabla\varphi)(x) = \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda}\, \bar{a}\cdot\nabla\varphi(x+\xi\bar{a})\, d\xi$$

$$= \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda} \frac{d}{d\xi}\Big(\varphi(x+\xi\bar{a})\Big)\, d\xi$$

$$= -\varphi(x) + M\varphi(x)$$

Por ende,

$$\langle Lu, \varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, M\varphi(x)\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\Big[\varphi(x) + M(\lambda\bar{a}\cdot\nabla\varphi)(x)\Big] dx$$

$$= \langle Lu, \lambda\bar{a}\cdot\nabla\varphi\rangle + \langle u, \varphi\rangle$$

$$= \langle -\lambda\bar{a}\cdot\nabla(Lu) + u, \varphi\rangle \quad \forall \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$\Rightarrow$ (5) se cumple en sentido distribucional.

Ahora, suponiendo $1<p<\infty$ tomamos $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ y aplicamos Hölder:

$$|Lu(x)| \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\xi/\lambda q} e^{-\xi/\lambda p} |u(x-\xi\bar{a})|\, d\xi$$

$$\leq \lambda^{-1/p}\left(\int_0^\infty e^{-\xi/\lambda} |u(x-\xi\bar{a})|^p\, d\xi\right)^{1/p}$$

Hölder

Potencia p e integrando en $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\|Lu\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{1}{\lambda}\|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \int_0^\infty e^{-\xi/\lambda}\, d\xi$$

$$= \|u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \quad \Rightarrow (6)$$

si $1<p<\infty$

El caso $p=1$ es análogo. □

Demostración del Teorema 1

Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(A) \Rightarrow D(A)$ es denso en $L^p(\mathbb{R}^n)$. Por el lema 2, para todo $\lambda \neq 0$,

$$Lu + \lambda A(Lu) = u \iff Lu = (I+\lambda A)^{-1} u$$

y se cumple la estimación

$$\|(I+\lambda A)^{-1}\| \leq 1, \qquad \forall \lambda \neq 0.$$

Esto implica que A es el generador de un C_0-grupo de isometrías. □

Corolario Para cada $u_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$ existe una única solución al problema de Cauchy (1) dada por

$$S(t)u_0(x) = u_0(x - t\bar{a}).$$

Sistemas simétricos hiperbólicos

Consideremos el problema de Cauchy:

$$(1)\cdots \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(x)\, u_{x_j} = 0, & x \in \mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^d \end{cases}$$

donde $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^d$, $t>0$, $n \geq 1$, $d \geq 1$, con

$$A^j \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{n\times n})$$

$$C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{n\times n}) = \{ M = M(x) \in \mathbb{R}^{n\times n},\ M \in C^1 \text{ y acotadas } |\partial_{x_j} M|, |M(x)| \leq C \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \}$$

Además suponemos que las matrices $A^j(x)$ son simétricas:

$$(2)\cdots \quad A^j(x)^T = A^j(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d$$
$$\forall\ 1 \leq j \leq d$$

<u>Definición</u> El sistema $u_t + \sum A^j(x) u_{x_j}$ $= Lu$ es hiperbólico si el símbolo

$$A(x,\xi) = \sum_{j=1}^{d} A^j(x)\,\xi_j$$

es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^d$.

$A^j(x,t,u(x,t))$ — misma definición

<u>Proposición</u> Todo sistema simétrico es hiperbólico. Todo sistema simetrizable (es decir, existe $A^0(x)$ simétrica $A^0(x) > 0$ tal que $A^0(x)A^j(x)$ es simétrica) es hiperbólico. Si $d=1$ entonces todo sistema hiperbólico es simetrizable.

<u>Dem.</u> Ejercicio. $\square$

Trabajaremos con $X = L^2(\mathbb{R}^d)^n$. No es evidente determinar el dominio de $\mathcal{Q}$,

$$\mathcal{Q}u := -\sum_{j=1}^{d} A^j(x)\,\partial_{x_j} u$$

Vamos a definir primero $\mathcal{Q}$ en $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ y tomamos la cerradura.

<u>Lema 1</u> Para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ se tiene que

$$\langle u, \mathcal{Q}u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} = -\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T A^j(x)\,\partial_{x_j} u \, dx$$

$$\leq \omega \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$ con $\omega \geq 0$.

__Demostración__ : Integrando por partes, $\forall\ 1 \leq j \leq d$ tenemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T A^j(x) \partial_{x_j} u \, dx = - \int_{\mathbb{R}^d} \partial_{x_j} \left(u(x)^T A^j(x) \right) u \, dx$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} \left(\partial_{x_j} u(x) \right)^T A^j(x) u(x) \, dx \; + $$

$$- \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T \partial_{x_j} A^j(x) u(x) \, dx$$

A^j simétrica

$$= - \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T A^j(x) \partial_{x_j} u(x) \, dx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T \partial_{x_j} A^j(x) u(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T A^j(x) \partial_{x_j} u(x) \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} u(x)^T \partial_{x_j} A^j(x) u(x) \, dx$$

$$\Rightarrow \langle u, \mathcal{Q} u \rangle_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq \omega \, \|u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

con $0 < \omega = \frac{1}{2} \sup\limits_{\substack{x \in \mathbb{R}^d \\ 1 \leq j \leq d}} \left| \partial_{x_j} A^j(x) \right| < \infty$

$\square$