Lección 3.4: Sistemas simétricos hiperbólicos. Un problema no lineal.

Sistema simétrico hiperbólico (caso lineal):

$$(1)\cdots \quad \begin{cases} u_t + \sum_{j=1}^{d} A^j(x) u_{x_j} = 0, & x\in\mathbb{R}^d,\ t>0 \\ u(x,0) = u_0(x), & x\in\mathbb{R}^d \end{cases}$$

con $u = u(x,t) \in \mathbb{R}^n$, $A^j \in C_b^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^{n\times n})$, $d\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}$. Coeficientes simétricos:

$$(2)\cdots \quad A^j(x)^\top = A^j(x), \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}^d,\ 1\le j\le d$$

Espacio: $X = L^2(\mathbb{R}^d)^n$. Considerar

$$(3)\cdots \quad \begin{cases} D(\mathcal{Q}) := H^1(\mathbb{R}^d)^n \\ \mathcal{Q} := -\sum_{j=1}^{d} A^j(x)\partial_{x_j} \end{cases}$$

Clase pasada:

<u>Lema 1</u> $\forall\, u\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$, $\langle u, \mathcal{Q}u\rangle_{L^2} \le \omega \|u\|_{L^2}^2$ con $\omega \ge 0$.

Para aplicar Lumer-Phillips debemos verificar:

✓ (i) $D(\mathcal{Q})$ denso en X.

✓ (ii) $\mathrm{Re}\,\langle u, \mathcal{Q}u\rangle_X \le \omega\|u\|_X^2$ (si X es de Hilbert), $\forall\, u\in D(\mathcal{Q})$.

(iii) $\exists\ \lambda_0 > \omega$ tal que $\mathcal{Q} - \lambda_0 I$ es sobre

"

Para demostrar (iii) es suficiente verificar que el rango de $\mathcal{A} - \lambda I$ es denso en X para $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \gg 1$. (En efecto, si para $\lambda \gg 1$, $A - \lambda I$ tiene una inversa acotada entonces su rango debe ser cerrado.)

Para ello consideramos el operador:

$$\tilde{\mathcal{A}} := -\sum_{j=1}^{d} A^j(x)\partial_{x_j}$$

$$D(\hat{\mathcal{A}}) := \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d)^n : A^j(x)\partial_{x_j} u \in L^2(\mathbb{R}^d) \ \forall\ 1 \leq j \leq d \right\}$$

Aquí $A^j(x)\partial_{x_j} u$ se entiende en sentido distribucional, es decir, $A^j(x)\partial_{x_j} u \in H^{-1}(\mathbb{R}^d)^n$.

Claramente $H^1(\mathbb{R}^d)^n \subset D(\tilde{\mathcal{A}})$ y $\tilde{\mathcal{A}}$ es una extensión de $\mathcal{A}$. Vamos a demostrar que para $\lambda \gg 1$, $\hat{\mathcal{A}} - \lambda I$ es sobre mediante una aproximación tipo Galerkin.

<u>Lema 2</u> Para todo $\lambda \gg 1$ suficientemente grande, $\tilde{\mathcal{A}} - \lambda I$ es sobre en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$, es decir, $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ existe $u \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ tal que $(\hat{\mathcal{A}} - \lambda I)u = f$.

<u>Demostración</u> Sea $\{\varphi_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una base ortogonal (completa) de $H^1(\mathbb{R}^d)^n$ (reflexivo).

Sea $X_m := \operatorname{span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, $\forall m \in \mathbb{N}$.
$X_m \subset H^1(\mathbb{R}^d)^n \subset L^2(\mathbb{R}^d)^n$ $\dim X_m = m < \infty$.
Definimos P_m como la proyección ortogonal de L^2 sobre X_m. Buscamos una solución a la ecuación

$$(5) \text{--} \quad \langle \varphi, (\mathcal{Q} - \lambda I) u_m \rangle_{L^2} = \langle \varphi, f \rangle_{L^2} \qquad \begin{array}{l} \forall \varphi \in X_m \\ \forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)^n \end{array}$$

Nótese que $u_m \in X_m \subset H^1(\mathbb{R}^d)^n$, $\tilde{\mathcal{Q}} u_m = \mathcal{Q} u_m$.

Por el lema 1, $\mathcal{Q}$ es cuasi-disipativo, entonces para $\lambda > \omega$ se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle u, (\mathcal{Q} - \lambda I) u \rangle_{L^2} &\overset{\mathcal{Q} \text{ simétrico}}{=} \langle u, \mathcal{Q} u \rangle_{L^2} - \lambda \|u\|_{L^2}^2 \\ &< \langle u, \mathcal{Q} u \rangle_{L^2} - \omega \|u\|_{L^2}^2 \\ &\le 0 \end{aligned}$$

si $\lambda > \omega$

Esto implica que la forma bilineal $a(\varphi, u) = -\langle \varphi, (\mathcal{Q} - \lambda I) u \rangle_{L^2}$ satisface las hipótesis de Lax-Milgram. Concluimos que $\exists!\, u_m \in X_m$ solución de (5), $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ dado. Mas aún, $\|u_m\|_{L^2}$ está acotada por arriba independientemente de $m \in \mathbb{N}$. En efecto, por cuasi-disipatividad

$$\langle u_m, \mathcal{Q} u_m \rangle_{L^2} = \langle u_m, f \rangle_{L^2} + \lambda \|u_m\|_{L^2}^2 \le \omega \|u_m\|_{L^2}^2$$

Lo cual implica si $\lambda > \omega$ que .

$$(\lambda-\omega)\|u_m\|_{L^2}^2 = -\langle u_m, f\rangle_{L^2} \leq \|u_m\|_{L^2}\|f\|_{L^2}$$

$$\Rightarrow \quad \|u_m\|_{L^2} \leq \frac{\|f\|_{L^2}}{\lambda-\omega} \quad \forall\, m\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto existe una subsucesión $\{u_{m_j}\}_{j\in\mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^d)^n$ que converge débilmente en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$, es decir,

$$u_{m_j} \rightharpoonup u \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$$

Usando (5) verificamos, tomando el límite cuando $m_j\to\infty$, que

$$\langle(\tilde{\mathfrak{a}}-\lambda)u, \varphi\rangle_{L^2} = \langle f, \varphi\rangle_{L^2}$$

$\forall\, \varphi\in H^1(\mathbb{R}^d)^n$, y además $u\in D(\tilde{\mathfrak{a}})$.
Esto implica

$$(\tilde{\mathfrak{a}}-\lambda)u = f \qquad \text{c.d.s.}$$

Para $\lambda\gg 1$ y todo $f\in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ existe una solución $u\in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ de la ecuación

$$(\tilde{\mathfrak{a}}-\lambda)u = f \qquad \text{en } L^2(\mathbb{R}^d)^n.$$

$\therefore\ \tilde{\mathfrak{a}}-\lambda I$ es sobre

Δ

Para terminar el argumento sólo resta demostrar que $\tilde{\mathfrak{a}}$ coincide con $\mathfrak{a}$.

Para esto requerimos:

Lema (Friedrichs) Para cada $\epsilon > 0$ existe un mapeo $Q_\epsilon : L^2(\mathbb{R}^d)^n \to H^1(\mathbb{R}^d)^n$, inyectivo, tal que:

(a) Para cada $f \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$, $Q_\epsilon f \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

(b) El operador $\mathcal{Q} Q_\epsilon - Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}}$ puede extenderse a un operador acotado en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$. Mas aún, $\forall\, u \in D(\tilde{\mathcal{Q}})$ se tiene que $(\mathcal{Q} Q_\epsilon - Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}})u \to 0$ en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$ cuando $\epsilon \to 0^+$.

Teorema L El operador $\mathcal{Q}$ es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$.

Demostración Ya verificamos (i) y (ii) y (iii) para $\tilde{\mathcal{Q}}$. Para aplicar Lumer-Phillips a $\mathcal{Q}$, solo nos falta probar que para $u, f \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ tales que $\tilde{\mathcal{Q}} u = f$ (Lema 2) existen sucesiones $u_j \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ y $f_j \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$ tales que $\mathcal{Q} u_j = f_j \;\forall j \in \mathbb{N}$ y $u_j \to u$, $f_j \to f$ en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$.

Por el lema de Friedrichs, definimos $u_\epsilon := Q_\epsilon u$, $f_\epsilon := \mathcal{Q} u_\epsilon$. En ese caso,

$$f_\epsilon = Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}} u + (\mathcal{Q} Q_\epsilon - Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}}) u$$
$\forall \epsilon > 0.$

Lema (Friedrichs) $\Rightarrow$ $Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}} u \to \tilde{\mathcal{Q}} u = f$ en L^2 si $\epsilon \to 0^+$, y $(\mathcal{Q} Q_\epsilon - Q_\epsilon \hat{\mathcal{Q}}) u \to 0$ si $\epsilon \to 0^+$. Esto implica que $\mathcal{Q} - \lambda I$ es sobre en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$ si $\lambda \gg 1$, es decir, (iii).

$\square$

<u>Corolario</u> Para todo $u_0 \in H^1(\mathbb{R}^d)^n$ existe una única solución clásica $u \in C([0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)^n) \cap C^1((0,T]; H^1(\mathbb{R}^d)^n)$ de (1).

<u>Demostración del lema de Friedrichs</u>

Usamos el alisador de Friedrichs, $u_\epsilon := \eta_\epsilon * u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)^n$ si $u \in L^2(\mathbb{R}^d)^n$. Definimos

$$Q_\epsilon u := \eta_\epsilon * u$$
$$Q_\epsilon : L^2(\mathbb{R}^d)^n \longrightarrow H^1(\mathbb{R}^d)^n$$

Por propiedades del alisador, $\|\eta_\epsilon * u\|_{L^2} = \|Q_\epsilon u\|_{L^2} \le \|u\|_{L^2}$ $\therefore$ $\|Q_\epsilon\| \le 1$ $\forall \epsilon > 0$.

Además, $Q_\epsilon u \to u$ si $\epsilon \to 0^+$ si u está en un conjunto denso de $L^2(\mathbb{R}^d)^n$, por ejemplo, en $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)^n = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^n$.

2.

Q_ϵ es inyectivo : $Q_\epsilon u \to u \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^n$

$\therefore \; Q_\epsilon u = 0$ sólo si $u = 0$ c.d.s. en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$.

Como Q_ϵ es uniformemente acotado y $Q_\epsilon u \to u \quad \forall u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^n$ denso en $L^2(\mathbb{R}^d)^n$ concluimos (a).

Para probar (b) hay que hacer el cálculo:

$$\mathcal{Q} Q_\epsilon u - Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}} u = \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y)\left(A^j(x) - A^j(y)\right)\partial_{y_j} u(y)\, dy}_{(*_1)}$$

$$= \underbrace{\sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y) \frac{\partial A^j(y)}{\partial y_j} u(y)\, dy + \sum_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial y_j}(x-y)\left(A^j(x) - A^j(y)\right) u(y)\, dy}_{(*_2)}$$

$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)^n = \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^n$

Para u suave $(*_1) \to 0$ si $\epsilon \to 0^+$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y)\,\psi(y)\, dy \underset{\epsilon \to 0^+}{\longrightarrow} \psi(x), \quad \psi \text{ suave}.$$

Para extrapolar esta propiedad a todo $L^2(\mathbb{R}^d)^n$ basta con verificar que el operador $\mathcal{Q} Q_\epsilon - Q_\epsilon \tilde{\mathcal{Q}}$ está uniformemente acotado.

Esto lo vamos a deducir de $(*)_2$.

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y) \frac{\partial A^j}{\partial y_j}(y)\, dy \right| \leq \underbrace{\sup_{y \in \mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial A^j}{\partial y_j}(y) \right|}_{\leq C} \underbrace{\left| \int_{\mathbb{R}^d} \eta_\epsilon(x-y)\, dy \right|}_{=1}$$

$\leq C$ independiente de $\epsilon > 0$.

Además,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial y_j}(x-y) \left(A^j(x) - A^j(y) \right) dy \right|$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j}(x-y) \right| \left| A^j(x) - A^j(y) \right| dy$$

$$= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{\operatorname{supp} \eta_\epsilon \subset B_\epsilon(x)} \left| \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j}(x-y) \right| \underbrace{\left| A^j(x) - A^j(y) \right|}_{\substack{\leq C\epsilon \\ \text{por continuidad} \\ \text{de } A^j(x)}} dy$$

Pero $\left\| \frac{\partial \eta_\epsilon}{\partial x_j} \right\|_{L^1} \leq \frac{C}{\epsilon}$

$\therefore$ el operador es uniformemente acotado.

Esto prueba (b).

$\square$

Un problema nolineal

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\partial\Omega \in C^1$, abierto, acotado.
Sea el problema:

$$(1)\cdots \begin{cases} u_t = \Delta u + \sum_{j=1}^{n} u \frac{\partial u}{\partial x_j}, & (x,t) \in \Omega \times (0,T] \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T] \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega \end{cases}$$

Interpretamos (1) como un problema de Cauchy abstracto:

$$(2)\cdots \begin{cases} \frac{du}{dt} = \underbrace{-Au}_{\text{parte lineal}} + \underbrace{N(u)}_{\text{transporte no lineal}} \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

con $A : D(A) \subset X \longrightarrow X$ generador de un C_0-semigrupo.

Escogemos: $X = L^2(\Omega)$

$$(3)\cdots \begin{cases} D(A) := H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \\ A := -\Delta \end{cases}$$

A es simétrico (auto-adjunto en $L^2(\Omega)$)

$A = -\Delta$ es el generador de un semigrupo <u>analítico</u> en $L^2(\Omega)$.

A^α está definido para $0<\alpha<1$.

Así,

$$\langle Au, u\rangle_{L^2} = \langle A^{1/2}u, A^{1/2}u\rangle_{L^2}$$

$$= \|A^{1/2}u\|^2_{L^2}$$

Ejercicio. Rellich-Rogers

$$\boxed{= \|\nabla u\|^2_{L^2}} \geq C\,\|u\|^2_{L^2}$$

$$\forall u \in D(A) = H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$$

<u>Lema 1</u> $D(A)$ consiste de funciones Hölder continuas con exponente $\theta = 1/2$ y existe $C>0$ tal que

$$|u(x)-u(y)| \leq C\,\|Au\|_{L^2}\,|x-y|^{1/2}$$

$$\forall u \in D(A).$$

<u>Dem.</u> Ver Pazy, p. 239.

<u>Lema 2</u> Existe $C>0$ tal que

$$\|u\|_\infty^{n+1} \leq C\,\|Au\|_{L^2}^{n}\,\|u\|_{L^2}$$

$\forall u \in D(A)$.

Nota: $\|u\|_\infty < \infty$ si $u \in H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$!

Demostración: Por lema de Sobolev $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset C(\bar{\Omega})$.
Además $u=0$ en $\partial\Omega$.

Si $u \equiv 0$ la desigualdad es trivial.

Suponemos que $\|u\|_\infty = M > 0$.
Por el lema 1,

$$|u(x)-u(y)| \leq K\,|x-y|^{1/2}$$

$$K = C\,\|Au\|_{L^2}$$

W.l.o.g. suponemos que $|u(0)| = M$.
Sea $B_R = B_R(0)$, con $R = \left(\frac{M}{K}\right)^2$.
En esta bola

$$|u(x)| \geq |u(0)| - |u(x)-u(0)|$$

$$\geq M - K|x|^{1/2}$$

$$> M - K\frac{M}{K} = 0$$

Como $u|_{\partial\Omega} = 0$ deducimos que

$B_R \subset \Omega$ y para $x \in B_R$ se tiene

$$|u(x)| \geq M - K|x|^{1/2}.$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2}^2 \geq \int_{B_R} |u(x)|^2 dx \geq \int_{B_R} (M-K|x|^{1/2})^2\, dx$$

$$= C\omega_n R^n M^2 \int_0^1 (1-\eta^{1/2})^2 \eta^n \, d\eta$$

$$= \tilde{C} M^2 R^n$$

$$= \tilde{C} M^2 \left(\frac{M}{K}\right)^{2n} = \tilde{C} \frac{M^{2(n+1)}}{K^{2n}}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_{L^2}^2 \geq \bar{C}^2 \frac{\|u\|_\infty^{2(n+1)}}{\|Au\|_{L^2}^{2n}}$$

$$\Rightarrow \quad \|u\|_\infty^{n+1} \leq C \|Au\|_{L^2}^n \|u\|_{L^2}$$

$\square$

Lema 3 Para $1 > \gamma > \frac{n}{n+1}$ existe una constante $C > 0$ que depende sólo de γ y Ω, tal que

$$\|u\|_\infty \leq C \|A^\gamma u\|_{L^2}$$

$\forall u \in D(A)$.

Dem. Pazy, p. 240.

$\square$

Se define $$N(u) = \sum_{j=1}^n u \partial_{x_j} u$$

Si $1 > \gamma > \frac{n}{n+1}$ y $u \in D(A)$ entonces $N(u)$ está bien definido y

$$\|N(u)\|_{L^2} \leq C \, \|A^{\gamma} u\|_{L^2} \, \|A^{1/2} u\|_{L^2}$$

y si $u, v \in D(A)$ entonces

$$\|N(u) - N(v)\|_{L^2} \leq C \Big(\|A^{\gamma} u\|_{L^2} \, \|A^{1/2} u - A^{1/2} v\|_{L^2} \quad (**)$$
$$+ \|A^{1/2} v\|_{L^2} \, \|A^{\gamma} u - A^{\gamma} v\|_{L^2} \Big)$$

Teorema El problema (1) tiene una única solución fuerte $\forall \, u_0 \in D(A^{\gamma})$, con $\gamma > \frac{n}{n+1}$

Se deduce de la propiedad de N:

$\|N(u) - N(v)\|_{L^2} \leq$ lado derecho de $(**)$.

$$N(u) = f$$