Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales

Semigrupos y Ecuaciones Diferenciales Parciales de Evolución

Semestre 2022-2

Tarea 1

1. Sea $X = C_0((-\infty, 0]) = \Big\{u \in C((-\infty,0]) \,:\, \lim_{x\to-\infty} u(x) = 0\Big\}$. Sea $(S(t)u)(x) := e^{-t^2+2xt}u(x-t)$. Verificar que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo en X y que $\omega_0 = -\infty$. Sin embargo, el semigrupo no es nilpotente, es decir, $S(t) \neq 0 \in \mathcal{B}(X)$, $\forall t > 0$.

2. Demostrar que

$$\dot{S}_n(t) = \frac{d}{dt}S_n(t) = A\left(I - \frac{t}{n}A\right)^{-n-1},$$

en sentido de la norma de operadores. Aquí $S_n(t)$ es la aproximación de Hille vista en clase.

3. Demostrar que es necesario verificar la estimación de todas las potencias del resolvente en el teorema de Feller-Miyadera-Phillips. Como contraejemplo considerar $X = C_0(\mathbb{R}) \times C_0(\mathbb{R})$, con norma

$$\|(u,v)\| = \max\{\|u\|_\infty, \|v\|_\infty\}.$$

Sea $m(s) = is$, $s \in \mathbb{R}$. Se define el operador

$$A\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & m \\ 0 & m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

con $D(A) = \{(mu, mv) \in X\}$. Demostrar que

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M}{\operatorname{Re}\lambda - \omega},$$

para todo $\operatorname{Re}\lambda > \omega$ para cierto $M > 0$ y $\omega \in \mathbb{R}$ (es decir, tenemos la estimación para $n = 1$), pero que A no genera un C_0-semigrupo.

4. Consideremos el operador de Stokes: sea $H = \{\mathbf{u} \in L^2(\mathbb{R}^3)^3 \,:\, \nabla \cdot \mathbf{u} = 0\}$, con producto interno $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \sum_{j=1}^{3}\langle u_j, v_j\rangle_{L^2}$. H es un espacio de Hilbert. El operador de Stokes se define mediante

$$D(A) = \{\mathbf{u} \in H^2(\mathbb{R}^3)^3 \cap H \,:\, \Delta u \in H\},$$
$$A\mathbf{u} = \Delta\mathbf{u}, \qquad \mathbf{u} \in D(A).$$

Demostrar que A es el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo analítico y contractivo (ver Vrabie, pág. 163).