

Ramón G. Plaza

# Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación



*A Paulina*



# Prefacio

Este libro tiene su origen en el curso “Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación” que he impartido en el Posgrado en Ciencias Matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México en diversas ocasiones en los últimos diez años. El objetivo del curso es introducir al estudiante a temas de investigación relacionados con sistemas de ecuaciones diferenciales parciales de primer orden en forma de divergencia conocidos como *sistemas hiperbólicos de leyes de conservación*. Este libro constituye una guía para ello. Diversos modelos matemáticos en las ciencias naturales (en particular, en mecánica de medios continuos) están descritos por sistemas de este tipo. Su estudio constituye una rama importante del análisis matemático y de la teoría de ecuaciones diferenciales, con diversas aplicaciones en física, química y biología, entre otras disciplinas.

Una de las razones por la que decidí escribir un libro introductorio sobre el tema es la ausencia de un texto en castellano con los aspectos básicos de la teoría de leyes de conservación. Los libros y series de notas que estudian sistemas de leyes de conservación son, o bien muy técnicos (dirigidos a especialistas), o se reducen, en su defecto, a breves secciones en textos dedicados a la teoría general de ecuaciones diferenciales parciales. Mi intención es subsanar esta omisión y establecer un puente entre los libros de ecuaciones en derivadas parciales y los textos avanzados, a través de una introducción a la teoría a un nivel accesible para el estudiante de posgrado o avanzado de las licenciaturas de física, matemáticas e ingeniería.

Este libro contiene una introducción rigurosa a la teoría matemática de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación y de sus propiedades más importantes, entre las cuales destacan la formación de discontinuidades (ondas de choque), existencia y unicidad de soluciones entrópicas, y la propagación de ondas con datos iniciales discontinuos. Para cumplir con este objetivo, es necesario estudiar un heterogéneo conjunto de temas, que van desde el análisis funcional abstracto hasta la termodinámica de fluidos compresibles, pasando por la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, sistemas dinámicos y álgebra lineal.

Como es habitual, el contenido de un libro refleja tanto las inclinaciones como las limitaciones de su autor. En este caso, algunos temas se mencionan sólo tangencialmente o bien son omitidos en su totalidad. Por ejemplo, no hago mención alguna de los métodos numéricos para leyes de conservación. Afortunadamente existen excelentes textos sobre el tema (cf. [85, 114, 138, 139, 220]).

Agradezco a mis estudiantes Mauricio Del Razo, Oscar Chávez, Felipe Ángeles y Juan Francisco Leyva por numerosos comentarios y sugerencias, los cuales mejoraron sustancialmente la versión final.

Finalmente, dedico este libro a mi hija Paulina, agradeciendo su infinita paciencia.

México D.F.,  
Diciembre 2020

*Ramón G. Plaza*

## Agradecimientos

Primeramente, agradezco a mis profesores en el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York: Peter Lax, Andy Majda, Esteban Tabak y Zhouping Xin, quienes me introdujeron al estudio de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación, y despertaron en mí la vocación y la curiosidad que permanecen hasta hoy. De igual manera agradezco a mi asesor doctoral, Jonathan Goodman (Instituto Courant, Universidad de Nueva York), por las incontables conversaciones delante su pizarrón, y a Kevin Zumbrun (Universidad de Indiana), por compartir conmigo su enorme conocimiento y su continuo entusiasmo. Ambos han dejado una huella profunda en mi visión sobre esta rama de la matemática.

Asimismo, el resultado final es impensable sin el apoyo y la inspiración generados por la colaboración con colegas y amigos en distintas partes del mundo: Heinrich Freistühler, Corrado Mascia, Chiara Simeoni, Corrado Lattanzio, Pierangelo Marcati, Gregory Lyng, Peter Howard, Pablo Castañeda, Bongsuk Kwon y Toan Nguyen,

Doy gracias también a mis estudiantes Oscar Chávez, Mauricio Del Razo, Felipe Ángeles y Juan Francisco Leyva, quienes utilizaron (sufrieron) versiones previas de este texto y sugirieron numerosos cambios y correcciones.

Finalmente, dedico este trabajo a mi hija Paulina, por su infinita paciencia.



# Índice general

<b>1. Introducción</b> .....	1
<b>2. Generalidades</b> .....	3
2.1. Leyes de conservación y leyes de balance .....	4
2.2. Ejemplos .....	6
2.3. Convección no lineal .....	20
2.4. Soluciones débiles y condiciones de Rankine-Hugoniot .....	25
2.5. Hiperbolicidad y simetrizabilidad .....	39
2.6. Entropía y flujo de entropía .....	53
2.7. Aproximación viscosa .....	58
Ejercicios .....	71
<b>3. Ley de conservación escalar en una dimensión</b> .....	75
3.1. Existencia local de soluciones clásicas .....	76
3.2. Condiciones de entropía .....	79
3.3. Solución entrópica para $f$ convexa: la fórmula de Lax-Hopf .....	96
3.4. El problema de Riemann .....	123
3.5. Teoría de Kružkov-Oleñnik .....	133
3.6. Ejemplos .....	143
Ejercicios .....	148
<b>4. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión</b> .....	151
4.1. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión .....	151
4.2. Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann .....	161
4.3. Ondas de choque y discontinuidades de contacto .....	174
4.4. Condiciones de entropía .....	181
4.5. El problema de Riemann .....	181
Ejercicios .....	184

<b>5. El problema de Riemann en dinámica de gases</b> .....	187
5.1. El problema de Riemann para un gas ideal en el caso isentrópico .....	187
5.2. Desigualdades de entropía .....	187
5.3. Estudio de los campos característicos .....	187
5.4. Solución numérica .....	187
<b>6. El esquema de Glimm</b> .....	189
6.1. Descripción del esquema .....	189
6.2. La estimación de interacción .....	189
6.3. Aproximación en diferencias .....	189
6.4. Convergencia .....	189
<b>7. Perfiles viscosos para ondas de choque</b> .....	191
7.1. Perfiles viscosos escalares .....	192
7.2. Estabilidad en el caso escalar .....	192
7.3. Perfiles viscosos para sistemas .....	192
7.4. Estabilidad de perfiles para sistemas .....	192
<b>A. Elementos de Análisis Real</b> .....	195
A.1. Teoremas elementales de cálculo .....	195
A.2. Teoremas de convergencia .....	196
A.3. Funciones convexas .....	198
A.4. Funciones de variación acotada .....	199
<b>B. Elementos de Teoría de Probabilidad</b> .....	203
<b>C. El teorema de variedad central</b> .....	205
<b>Bibliografía</b> .....	207
<b>Índice alfabético</b> .....	217

# Notación

Lista de acrónimos, símbolos y notación usada en el texto.

$A^\top$	Transpuesta de la matriz (o vector) $A$
$A^*$	Conjugada transpuesta de la matriz (o vector) $A$
$\mathcal{L}^*$	Adjunto formal del operador $\mathcal{L} : X \rightarrow Y$
$C^k(X; Y)$	Espacio de funciones $k$ -diferenciables en el espacio de Banach $X$ que toma valores en el espacio de Banach $Y$
$C_0^k(X; Y)$	Espacio de funciones $k$ -diferenciables con soporte compacto en $X$
c.d.s.	Acrónimo de “casi donde sea”
$\delta_j^k$	Delta de Kronecker con índices $j, k \in \mathbb{N}$
$\Delta$	Operador de Laplace $\Delta = \sum \partial_i^2$
$\ker A$	Núcleo de la matriz (u operador) $A$
$\mathcal{R}(A)$	Rango de la matriz (u operador) $A$
$\partial\Omega$	Frontera del conjunto $\Omega$
$L^p$	Espacio de funciones medibles tales que $\int  f ^p d\mu < +\infty$
$o(g)$	$f = o(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si $\lim_{x \rightarrow x_0}  f(x) / g(x)  = 0$
$O(g)$	$f = O(g)$ cuando $x \rightarrow x_0$ si $ f  \leq C g $ para $x \sim x_0$
$\Omega^\circ$	Interior del conjunto $\Omega$
$\overline{\Omega}$	Cerradura del conjunto $\Omega$
$\mathbb{R}^n$	Espacio euclideo de dimensión $n$
$u_{x_i}, \partial_{x_i} u$	Derivada parcial $\partial u / \partial x_i$
$W^{m,p}, H^s$	Espacios de Sobolev



# **Capítulo 1**

## **Introducción**

Coming soon...!



## Capítulo 2

# Generalidades

En este capítulo se discuten los aspectos básicos de sistemas hiperbólicos de leyes de conservación. En la sección 2.1 se derivan las ecuaciones de campo resultantes a partir de un principio de balance generalizado en forma integral. Algunos ejemplos, tales como las ecuaciones de Euler para la dinámica de fluidos compresibles, sistemas en teoría de elasticidad, y modelos de tráfico, entre otros, se presentan en la sección 2.2. En la sección 2.3 se discute el fenómeno de convección no lineal, que consiste en que soluciones clásicas a este tipo de sistemas no lineales pueden dejar de existir en un tiempo finito (llamado también tiempo de rompimiento), a partir del cual se pueden formar singularidades. Por simplicidad, este fenómeno se explicará en términos de un ejemplo concreto. Motivados por esta pérdida de regularidad, en la sección 2.4 se introduce el concepto de *solución débil*, el cual extiende la noción de solución clásica a una clase más amplia de soluciones que admiten discontinuidades. También se deducen las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot, las cuales son condiciones necesarias para soluciones débiles en una posible discontinuidad. Asimismo, se discuten las limitaciones de la definición de solución débil en términos de su pérdida de unicidad. En la sección 2.5 se definen las nociones de hiperbolicidad y simetrizabilidad de un sistema, así como la relación entre ambos conceptos. En vista de la pérdida de unicidad de soluciones débiles, en la sección 2.6 se introduce un concepto fundamental en la teoría de leyes de conservación que es el de *par de entropía*. Se explica la desigualdad de entropía en sentido distribucional y se revisa la relación entre la existencia de una función de entropía estrictamente convexa y la simetrizabilidad del sistema. En la sección 2.7 se discute el método de aproximación viscosa de soluciones discontinuas mediante la incorporación de términos de segundo orden, que llamaremos *viscosos o de difusión*. Estos sistemas pertenecen a la clase de Kawashima-Shizuta [108, 206], la cual incluye a las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido compresible. Finalmente, se hace notar también que si existe un límite de las soluciones al sistema viscoso cuando el coeficiente de viscosidad tiende a cero, entonces éste es una solución débil al sistema de leyes de conservación que satisface la desigualdad de entropía en sentido distribucional.

## 2.1. Leyes de conservación y leyes de balance

El espacio físico será denotado por las variables  $x \in \mathbb{R}^d$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d)^\top$ , con  $d \geq 1$ . En aplicaciones a la física de medios continuos, generalmente  $d = 1, 2$  ó  $3$ . Adicionalmente consideraremos la variable independiente  $t \in [0, +\infty)$ , en virtud de que nos interesa modelar fenómenos dinámicos que evolucionan con respecto a un parámetro homogéneo que asociamos al tiempo. De este modo, el espacio-tiempo (o espacio ambiente) donde ocurren los fenómenos estará denotado por las variables  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$ .

Una ley de conservación o ley de balance se expresa en términos de  $n$  cantidades extensivas conservadas, denominadas *variables de estado*, y se postula en función del balance entre la producción de dichas cantidades en un subdominio arbitrario del espacio físico, y del flujo de las mismas a través de la frontera del subdominio. Así, sean  $u_1, \dots, u_n$ , con  $n \geq 1$ , las densidades (por unidad de volumen) de las variables de estado, funciones de  $(x, t)$ . Denotaremos al campo vectorial  $(x, t) \mapsto u(x, t)$  como el vector de densidades de variables de estado,

$$u(x, t) = \begin{pmatrix} u_1(x, t) \\ \vdots \\ u_n(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

De esta manera, la dimensión del espacio de variables de estado es  $n \geq 1$ , mientras que la dimensión del espacio físico es  $d \geq 1$ . Vamos a suponer que  $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ , donde  $\Omega$  es un conjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ , conocido como el *conjunto de variables de estado* del sistema.

Para ilustrar el principio de balance sea  $D \subset \mathbb{R}^d$  una región arbitraria del espacio físico, acotada y abierta con frontera  $\partial D$  suave y orientable, de manera que el teorema de la divergencia es aplicable. Sea  $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d)^\top \in \mathbb{R}^d$ ,  $|\hat{n}| = 1$ , el vector normal a  $\partial D$  que apunta al exterior de  $D$ . La cantidad total de la variable  $u_k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , en el volumen  $D$  a tiempo  $t > 0$  está dada por  $\int_D u_k(x, t) dx$ . De este modo, el vector,

$$U(t) = \int_D u(x, t) dx \in \mathbb{R}^n,$$

representa la cantidad total (o “masa”) de las variables de estado en  $D$  a tiempo  $t > 0$ . La producción de las cantidades  $u$  en  $D$  (o dicho de otra manera, la razón de cambio de  $U(t)$ ) está balanceada por el flujo de las mismas a través de la frontera  $\partial D$ , el cual, suponemos, está determinado por un campo  $F : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times d}$ ,  $u \mapsto F(u)$ , de la siguiente manera: la cantidad de la densidad  $u$  que fluye a través de un elemento de superficie  $dS$  sobre  $\partial D$  cuya normal exterior va en dirección  $\hat{n}$  está dada por  $-F(u)\hat{n}dS$  de manera que la masa total de las cantidades conservadas que fluye a través de la frontera es

$$-\int_{\partial D} F(u)\hat{n}dS_x.$$

Para representar la función de flujo  $F$  escribimos

$$F(u) := (f^1(u), \dots, f^d(u)) \in \mathbb{R}^{n \times d}$$

como una matriz de dimensión  $n \times d$  que tiene como columnas<sup>1</sup> a las funciones de flujo  $f^j(u) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  con  $j = 1, \dots, d$ . Vamos a suponer que cada una de las funciones  $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^2$ , usualmente no lineal. Adicionalmente suponemos que existe una interacción del sistema con campos externos (por ejemplo, la fuerza de gravedad), cuyas densidades por unidad de volumen se expresan mediante el campo vectorial  $(x, t) \mapsto g(x, t)$ ,  $g = (g_1, \dots, g_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ . En consecuencia, el *principio de balance* se expresa de la siguiente forma integral,

$$\frac{d}{dt} \int_D u dx = - \int_{\partial D} F(u) \hat{n} dS_x + \int_D g(x, t) dx, \quad (2.1)$$

para todo dominio  $D$  del espacio físico arbitrario. Cada  $k$ -componente del vector (2.1) expresa el balance de producción de la cantidad  $u_k$  a través de  $D$ . En ausencia de campos externos, es decir, cuando  $g \equiv 0$ , obtenemos una *ley o principio de conservación*,

$$\frac{d}{dt} \int_D u dx = - \int_{\partial D} F(u) \hat{n} dS_x. \quad (2.2)$$

Aplicando el teorema de la divergencia, para cada componente  $1 \leq k \leq n$  del vector en (2.1) se cumple que

$$\begin{aligned} \int_D g_k(x, t) dx &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_{\partial D} \sum_{j=1}^d n_j f_k^j(u) dS_x \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \operatorname{div} \begin{pmatrix} f_k^1(u) \\ \vdots \\ f_k^d(u) \end{pmatrix} dx \\ &= \frac{d}{dt} \int_D u_k dx + \int_D \sum_{j=1}^d (f_k^j(u))_{x_j} dx, \end{aligned}$$

es decir,

$$\int_D u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} dx = \int_D g(x, t) dx.$$

Dado que la región  $D$  es arbitraria, si suponemos que  $u$  y sus derivadas de primer orden son continuas, por el teorema de localización (ver Apéndice A, teorema A.1), obtenemos las ecuaciones de campo

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = g, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty). \quad (2.3)$$

Un sistema de ecuaciones diferenciales parciales de la forma (2.3) es conocido como un sistema de *leyes de balance*. Nótese que se trata de un sistema de primer orden en forma de divergencia. Asimismo, en ausencia de campos externos,  $g \equiv 0$ , obtenemos lo que se conoce

<sup>1</sup> la componente  $(i, j)$  de  $F(u)$  está dada por  $f_i^j(u)$ , con  $1 \leq j \leq d$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Aquí  $f^j(u) = (f_1^j(u), \dots, f_n^j(u))^\top \in \mathbb{R}^n$ .

como un *sistema de leyes de conservación*:

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty). \quad (2.4)$$

Nuestro objetivo principal es el estudio de las soluciones a sistemas de la forma (2.4).

**Observación 2.1.** En principio, el campo  $g$  que representa las fuerzas externas puede también depender del valor de  $u$  en cada punto del espacio-tiempo. En este caso definimos

$$g_k(x, t) := h_k(x, t, u(x, t)),$$

para cada  $1 \leq k \leq n$ , donde las funciones  $h_k$  son conocidas. A éstas funciones se les denomina *fuentes* del sistema (2.3).

**Observación 2.2.** Como el lector ha advertido, una hipótesis fundamental consiste en suponer que el campo de flujo  $F(u)$  depende únicamente de  $u$ . Al excluir la dependencia con respecto al gradiente de  $u$ , o a derivadas de orden más alto, se excluyen efectos dispersivos o difusivos, entre otros. El resultado es un sistema de ecuaciones de primer orden en forma de divergencia. El término ley de conservación (o ley de balance) hace referencia, en éste caso, a sistemas en forma de divergencia únicamente. Cabe señalar, sin embargo, que el principio de balance expresado aquí es general y que muchos modelos que incorporan dichos efectos se pueden derivar aplicando el mismo principio.

## 2.2. Ejemplos

A continuación presentaremos algunos modelos que están expresados como sistemas de leyes de conservación o leyes de balance, los cuales son importantes en mecánica de medios continuos.

### 2.2.1. Ecuaciones de Euler para un fluido compresible

El paradigma de un sistema de leyes de conservación, conocido como el sistema del *ecuaciones de Euler*, modela la dinámica de un fluido compresible no viscoso que no conduce calor, y que en coordenadas eulerianas se pueden escribir en la siguiente forma conservativa

$$\rho_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j)_{x_j} = 0, \quad (2.5)$$

$$(\rho v_i)_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_i v_j)_{x_j} + p_{x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2.6)$$

$$(\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2))_t + \sum_{j=1}^3 (\rho v_j(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p v_j)_{x_j} = 0, \quad (2.7)$$

donde  $\rho > 0$  es la densidad (por unidad de volumen) de masa del fluido,  $v = (v_1, v_2, v_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  es el campo de velocidades,  $p$  es la presión termodinámica,  $e > 0$  es la densidad (por unidad de masa) de energía interna del fluido, y  $E := e + \frac{1}{2}|v|^2$  es la densidad de energía total del mismo. La ecuación (2.5) representa la ley de conservación de masa, mientras que las ecuaciones (2.6) corresponden a las leyes de conservación de momento lineal en las tres direcciones del espacio físico. La ecuación (2.7) expresa conservación de la energía total.

El sistema de ecuaciones (2.5) - (2.7) se puede escribir en forma abreviada de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0, \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2))_t + \operatorname{div}(\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2)v + p v) &= 0, \end{aligned} \quad (2.8)$$

y está complementado por una ecuación de estado para el fluido de la forma,

$$p = \hat{p}(\rho, e), \quad (2.9)$$

que determina la presión en términos de las densidades de masa y de energía interna. La forma de la función  $\hat{p}$  se establece mediante observaciones experimentales y debe ser consistente con las leyes de la termodinámica. La invariancia de las ecuaciones (2.8) bajo traslaciones galileanas requiere que  $\hat{p}$  no dependa del campo de velocidades (ver [85], capítulo 4).

Observamos que este sistema de ecuaciones tiene la forma de un sistema de leyes de conservación (2.4), donde  $d = 3$  es la dimensión del espacio físico, y  $n = 5$  el número de variables de estado (o cantidades conservadas), las cuales son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_1 \\ \rho v_2 \\ \rho v_3 \\ \rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^5,$$

mientras que las funciones de flujo están dadas por

$$\begin{aligned}
F(u) &= \begin{pmatrix} \rho v_1 & \rho v_2 & \rho v_3 \\ \rho v_1^2 + p & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_1 v_2 & \rho v_2^2 + p & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_1 v_3 & \rho v_2 v_3 & \rho v_3^2 + p \\ (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_1 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_2 & (\rho(e + \frac{1}{2}|v|^2) + p)v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_2 & u_3 & u_4 \\ (u_2)^2/u_1 + \hat{p} & u_2 u_3/u_1 & u_2 u_4/u_1 \\ u_2 u_3/u_1 & (u_3)^2/u_1 + \hat{p} & u_3 u_4/u_1 \\ u_2 u_4/u_1 & u_3 u_4/u_1 & (u_4)^2/u_1 + \hat{p} \\ u_2 u_5/u_1 + (u_2/u_1)\hat{p} & u_3 u_5/u_1 + (u_3/u_1)\hat{p} & u_4 u_5/u_1 + (u_4/u_1)\hat{p} \end{pmatrix} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^{5 \times 3}),
\end{aligned}$$

donde

$$\hat{p} = \hat{p}(u_1, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1^2).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\begin{aligned}
\Omega &= \{u \in \mathbb{R}^5 : u_1 > 0, u_5/u_1 - \frac{1}{2}(u_2^2 + u_3^2 + u_4^2)/u_1^2 > 0\} \\
&= \{(\rho, \rho v, \rho(e + \frac{1}{2}|v|^2)) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : \rho > 0, e > 0\}.
\end{aligned}$$

Existe una gran cantidad de referencias sobre las ecuaciones de Euler. Una buena introducción se puede encontrar en el libro de Courant y Friedrichs [40], así como en el capítulo 18 del libro de Smoller [213].

### Ecuaciones de Euler en una dimensión espacial

En este texto prestaremos especial atención a las ecuaciones de Euler en una dimensión espacial, las cuales modelan la dinámica de un gas que fluye a través de un tubo y donde la densidad, la velocidad y la energía son constantes a lo largo de secciones transversales del mismo. El fenómeno es, por ende, esencialmente unidimensional. Especializando las ecuaciones (2.5) - (2.7) a una dimensión espacial, que denotaremos por  $x$  en la dirección del tubo, obtenemos el siguiente sistema

$$\begin{aligned}
\rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\
(\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \\
(\rho(e + \frac{1}{2}v^2))_t + (\rho(e + \frac{1}{2}v^2)v + p v)_x &= 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Claramente, el sistema (2.10) es de la forma conservativa (2.4), donde  $d = 1$  es la dimensión del espacio físico, y el número de cantidades conservadas es  $n = 3$ . Aquí el campo de velocidades es escalar,  $v \in \mathbb{R}$ , que representa la velocidad del gas en cada instante de tiempo y en cada punto del tubo, en la dirección del mismo. En este caso las variables de estado son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho(e + \frac{1}{2}v^2) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},$$

y tenemos una función vectorial de flujo dada por

$$f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + p \\ \rho(e + \frac{1}{2}v^2)v + pv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + p \\ u_2(u_3 + p)/u_1 \end{pmatrix} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\begin{aligned} \Omega &= \{u \in \mathbb{R}^3 : u_1 > 0, u_3/u_1 - \frac{1}{2}u_2^2/u_1^2 > 0\} \\ &= \{(\rho, \rho v, \rho(e + \frac{1}{2}v^2)) \in \mathbb{R}^3 : \rho > 0, e > 0\}, \end{aligned}$$

y la ecuación de estado es nuevamente  $p = \hat{p}(\rho, e)$ .

Nótese que el conjunto admisible de estados requiere la condición  $\rho > 0$ , la cual expresa, en términos físicos, que el modelo no contempla la ausencia de materia o de elementos de fluido, es decir, el vacío.

### Ecuaciones de Euler en variables lagrangianas

Al reescribir las ecuaciones de Euler (2.8) en variables lagrangianas obtenemos un sistema muy complicado y poco aplicable si la dimensión del espacio físico es  $d \geq 2$ . Por esta razón nos limitaremos al caso unidimensional  $d = 1$ . Usando la ley de conservación de masa en (2.10),

$$\rho_t + (\rho v)_x = 0, \quad (2.11)$$

podemos escribir un cambio de coordenadas  $(x, t) \mapsto (y, t)$  que depende de la solución. En efecto, la ecuación (2.11) implica que la forma diferencial  $dy = \rho dx - \rho v dt$  es exacta. Así, podemos definir la variable lagrangiana  $y(x, t) = \int^x \rho(\xi, t) d\xi$  de manera única (módulo una constante), de tal forma que  $y_x = \rho$  y  $y_t = -\rho v$ . Definiendo el *volumen específico* del gas como  $\tau := 1/\rho$ , para  $\rho > 0$ , y aplicando el cambio de variables, la ley de conservación de masa (2.11) se transforma en

$$\partial_t \tau = \partial_y v.$$

De este modo, tras aplicar el cambio de variables, para cada ley de conservación en variables eulerianas de la forma  $\partial_t u_i + \partial_x f_i = 0$ , obtenemos

$$\partial_t(\tau u_i) + \partial_y(f_i - v u_i) = 0.$$

Tomando  $u_i = \rho v$  y  $f_i = \rho v^2 + p$ , la ecuación de conservación de momento en (2.10) se transforma en

$$\partial_t v + \partial_y p = 0.$$

Análogamente, tomando  $u_i = \rho e + \frac{1}{2}\rho v^2$  y  $f_i = (\rho e + \frac{1}{2}\rho v^2 + p)v$  en la ecuación de conservación de energía en (2.10), obtenemos

$$\partial_t(e + \frac{1}{2}v^2) + \partial_y(vp) = 0.$$

En resumen, y reetiquetando la variable lagrangiana  $y$  por  $x$  por simplicidad en la notación, obtenemos el sistema de ecuaciones de Euler en forma lagrangiana

$$\begin{aligned}\tau_t - v_x &= 0, \\ v_t + p_x &= 0, \\ (e + \frac{1}{2}v^2)_t + (vp)_x &= 0,\end{aligned}\tag{2.12}$$

donde  $e + \frac{1}{2}v^2$  es la densidad de energía total, y la ecuación de estado se puede reescribir en términos del volumen específico de la siguiente forma

$$p = \tilde{p}(\tau, e) := \hat{p}(1/\tau, e),$$

donde  $\hat{p}$  es la función dada en (2.9). Naturalmente, el sistema (2.12) está escrito en forma conservativa, donde las variables de estado y la función de flujo son

$$u = (\tau, v, e + \frac{1}{2}v^2)^\top \in \mathbb{R}^3, \quad y, \quad f(u) = (-v, \tilde{p}(\tau, e), v\tilde{p}(\tau, e))^\top \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

respectivamente, y el conjunto admisible de variables de estado es

$$\Omega = \{(\tau, v, e + \frac{1}{2}v^2) \in \mathbb{R}^3 : \tau > 0, e > 0\}.$$

**Observación 2.3.** El jacobiano de la transformación  $(x, t) \mapsto (y, t)$  es  $\rho$ , el cual es siempre positivo en  $\Omega$ . Si  $\rho = 0$  entonces el cambio de variables no es válido, y en este caso el volumen específico  $\tau = \rho^{-1}$  se reduce a una masa de Dirac con norma igual a la longitud del intervalo en donde se presenta el vacío. Las ecuaciones de Euler en formulación euleriana (2.8) tampoco están bien definidas en el vacío, pues no es posible determinar la velocidad a partir del momento lineal, que es la variable conservada.

### 2.2.2. Modelo de tráfico

Consideremos una autopista en un solo sentido, sin entradas ni salidas. Sea  $\rho = \rho(x, t)$  la densidad de autos (número de autos por unidad de longitud) al instante  $t > 0$  en la posición  $x \in \mathbb{R}$  de la autopista unidimensional. Supongamos que  $\rho$  está acotado, de modo que

$$0 \leq \rho \leq \rho_m,$$

donde la cota  $\rho_m > 0$  está relacionada con el número máximo posible de autos en la autopista. Asimismo, sea  $u$  la velocidad de los autos en la autopista. Supongamos que existe un límite de velocidad  $u_m > 0$ . Por conservación de la cantidad de autos tenemos la siguiente ecuación,

$$\rho_t + (\rho u)_x = 0,$$

que representa la conservación de “masa” de autos en la autopista, que se desplazan con velocidad  $u$ . Podemos suponer que la velocidad depende de la densidad de autos, siendo ésta decreciente con respecto a  $\rho$  (los autos van más lento cuando hay muchos autos). De este modo podemos proponer una relación simple del tipo

$$u(\rho) = u_m(1 - \rho/\rho_m),$$

en la que evidentemente  $u(0) = u_m$  y  $u \rightarrow 0$  cuando  $\rho \rightarrow \rho_m^+$ . El modelo toma la siguiente forma de una ley de conservación,

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0, \quad (2.13)$$

con función de flujo  $q$  dada por

$$q(\rho) = \rho u_m(1 - \rho/\rho_m). \quad (2.14)$$

Claramente la variable conservada es la densidad de masa de autos  $\rho \in \mathbb{R}$ , y el conjunto de variables de estado es simplemente el intervalo  $\Omega = [0, \rho_m] \subset \mathbb{R}$ . Cabe señalar que, en realidad, el número total de autos en una autopista es una cantidad discreta, y que este modelo es una aproximación continua y aplicable sólo cuando el número de autos es suficientemente grande.

**Observación 2.4.** Es posible considerar términos difusivos (ver [229], pág. 72), y obtener un modelo más preciso que tome en cuenta el hecho de que un conductor frena (o acelera) cuando éste nota un aumento (o disminución) en la densidad de autos. De esta manera podemos suponer que  $u(\rho) - u_m(1 - \rho/\rho_m)$  tiene signo opuesto a  $\rho_x$ . Así, proponemos

$$u(\rho) = u_m(1 - \rho/\rho_m) - \varepsilon \rho_x,$$

donde el coeficiente  $0 < \varepsilon \ll 1$  es pequeño. De esta manera, llegamos a la ecuación

$$\rho_t + q(\rho)_x = \varepsilon(\rho \rho_x)_x, \quad (2.15)$$

donde la función de flujo  $q(\rho)$  también está dada por (2.14). Ésta ecuación constituye una regularización de segundo orden a la ley de conservación. Notemos que la ecuación (2.15) no está escrita en forma conservativa, aunque para su deducción hemos partido de un principio de conservación como tal. Podemos pensar que (2.15) es una ley de conservación con flujo efectivo  $\hat{q}(\rho, \rho_x) = \rho \hat{u}(\rho) - \varepsilon \rho \rho_x$ . En este caso, sin embargo, la dependencia de  $\hat{q}$  con respecto a  $\rho_x$  cambia por completo la naturaleza de la ecuación, ya que (2.13) es una ecuación hiperbólica mientras que la ecuación (2.15) es de tipo parabólico<sup>2</sup>. El nuevo término  $\varepsilon(\rho \rho_x)_x$  en (2.15) produce difusión de las ondas, y el coeficiente de difusión  $\varepsilon > 0$  es una medida del tiempo de respuesta del conductor para frenar o acelerar.

El modelo de tráfico representado por la ley de conservación escalar (2.13) es conocido como el *modelo de Lighthill-Whitham-Richards* [142, 187], y se estudiará con más detalle en

<sup>2</sup> una diferencia importante radica en que la ecuación (2.15) siempre tiene soluciones clásicas para todo  $t > 0$  y todo dato inicial. Por eso le llamamos al término  $\varepsilon(\rho \rho_x)_x$  una *regularización* de segundo orden.

la sección 3.6.1. El lector encontrará una discusión muy completa en el tercer capítulo del libro de Whitham [229].

### 2.2.3. Ecuaciones de agua poco profunda

Las llamadas *ecuaciones de agua poco profunda* modelan la propagación de perturbaciones (ondas) en agua o en otros fluidos incompresibles que responden a fuerzas gravitacionales o rotacionales. La hipótesis fundamental consiste en suponer que la profundidad del fluido es pequeña comparada con la longitud de las ondas. Para un fluido incompresible no viscoso (por ejemplo, agua) que fluye sobre un plano, y suponiendo además por simplicidad que la fuerza de gravedad es la única fuerza externa (no se considera la aceleración por rotaciones), las ecuaciones de agua poco profunda tienen la siguiente forma conservativa

$$\begin{aligned}\eta_t + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0, \\ (\eta u)_t + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2\right)_x + (\eta uv)_y &= 0, \\ (\eta v)_t + (\eta uv)_x + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta v^2\right)_y &= 0,\end{aligned}\tag{2.16}$$

donde  $\eta = \eta(x, y, t) > 0$  es la altura del fluido, y  $(u, v)(x, y, t) \in \mathbb{R}^2$  es el campo de velocidades bidimensional. La constante  $g > 0$  es la constante de gravedad. En las unidades apropiadas las cantidades conservadas son la masa del fluido (proporcional a  $\eta$ , ya que por incompresibilidad la densidad de masa es constante) y los momentos horizontal y vertical, proporcionales a  $\eta u$  y  $\eta v$ , respectivamente. De esta manera las variables de estado y la función de flujo son

$$U = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta u \\ \eta v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, \quad y \quad F(U) = \begin{pmatrix} \eta u & \eta v \\ \eta u^2 + \frac{1}{2}g\eta^2 & \eta uv \\ \eta uv & \eta v^2 + \frac{1}{2}g\eta^2 \end{pmatrix} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^{3 \times 2}).$$

El conjunto de variables de estado es

$$\Omega = \{(\eta, \eta u, \eta v) \in \mathbb{R}^3 : \eta > 0\}.$$

Nótese que se han despreciado tanto la componente vertical de la velocidad como la dependencia de los campos con respecto a la variable vertical.

Las ecuaciones de agua poco profunda constituyen el modelo más sencillo para describir la estructura horizontal del océano y la atmósfera [177, 161]. Usualmente también se incorpora a las ecuaciones un término correspondiente a la fuerza de Coriolis, asociada a la rotación terrestre. Aunque las ecuaciones se pueden derivar a partir de simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes (o de Euler) bajo la hipótesis de que la longitud característica de las ondas es muy grande en comparación con la profundidad característica (lo cual es una buena aproximación en el caso de flujos en geofísica; ver Stoker [214]), también es posible derivar el sistema siguiendo primeros principios, bajo la hipótesis del balance hidrostático (es decir, suponiendo que la presión es  $p = \rho g(\eta - z)$ , donde  $z$  es la variable vertical), así como despreciando

la velocidad vertical y la dependencia en  $z$  (ver [117]). Como referencias, el lector puede también consultar los libros de Johnson [104] y Acheson [2], entre otros.

### Ecuaciones de agua poco profunda en una dimensión

Para modelar ondas de agua en un canal, es posible simplificar el sistema (2.16) suponiendo que el campo de velocidades  $u$  es escalar y en dirección del canal, la cual asociamos a la dirección de  $x$ . De este modo, en el sistema (2.16) se excluye la dependencia con respecto a  $y$ , y se desprecia la componente transversal de la velocidad, para obtener, así, el siguiente modelo unidimensional

$$\begin{aligned} \eta_t + (\eta u)_x &= 0, \\ (\eta u)_t + \left(\frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2\right)_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Las variables conservadas son ahora  $U = (\eta, \eta u)^\top \in \mathbb{R}^2$ , con función de flujo  $f(U) = (\eta u, \frac{1}{2}g\eta^2 + \eta u^2)^\top \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$ . El conjunto admisible de estados es  $\Omega = \{(\eta, \eta u) \in \mathbb{R}^2 : \eta > 0\}$ .

### 2.2.4. Materiales hiperelásticos

Consideremos un sólido deformable que en reposo ocupa una configuración de referencia  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . La formulación lagrangiana describe el movimiento de este sólido mediante un mapeo

$$(x, t) \mapsto X(x, t) \in \mathbb{R}^3, \quad (x, t) \in \Omega \times [0, +\infty),$$

que denota la posición a tiempo  $t$  de una partícula del sólido que en tiempo  $t = 0$  estaba en  $x \in \Omega$ . De esta forma definimos la velocidad local  $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$  y el tensor de deformación  $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{3 \times 3}$  mediante

$$V = X_t, \quad U = \nabla_x X,$$

o componente a componente,  $V_j = \partial X_j / \partial t$ ,  $U_{ij} = \partial X_i / \partial x_j$ , para todo  $i, j = 1, 2, 3$ .

Un material es llamado *hiperelástico* si admite una densidad de energía interna dada por una función  $W : \mathbb{R}^{3 \times 3} \rightarrow \mathbb{R}$ , que depende del gradiente de deformación solamente,  $W = W(U)$ , y si las fuerzas de deformación  $\mathcal{F}$  se derivan de esta energía (principio de trabajo virtual):

$$\mathcal{F}_\alpha = \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{\alpha j}}, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Adicionalmente, y motivados por la física del fenómeno, vamos a requerir, por un lado, que la densidad de energía sea invariante bajo rotaciones, es decir, que  $W(U) = W(RU)$  para toda rotación  $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ,  $R^T R = I$ ,  $\det R = 1$ . Por otro lado, el gradiente de deformación debe satisfacer  $\det U > 0$ , lo cual significa que el material no cambia de orientación. Suponiendo, además, que el material no conduce calor, que el proceso es isentrópico, y que no hay fuerzas externas, la dinámica está regida únicamente por las leyes de conservación de masa y

momento. De esta manera, las ecuaciones de movimiento son las siguientes:

$$\partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i = 0, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.18)$$

$$\partial_t V_i - \sum_{j=1}^3 \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{ij}} = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.19)$$

Las primeras nueve ecuaciones (2.18) corresponden a ecuaciones de compatibilidad, dadas las definiciones de  $U$  y  $V$ , y equivalen a conservación de masa. Las últimas tres ecuaciones (2.19) expresan conservación de momento. Este sistema puede abreviarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} U_t - \nabla_x V &= 0, \\ V_t - \operatorname{div}_x \sigma(U) &= 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde

$$\sigma(U) := \frac{\partial W}{\partial U} \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

es el primer tensor de esfuerzos de Piola-Kirchhoff [36], definido componente a componente como

$$\sigma(U)_{ij} = \frac{\partial W}{\partial U_{ij}}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

El sistema (2.20) es un sistema de leyes de conservación donde tenemos doce variables de estado, determinadas por las nueve componentes del gradiente de deformación, más tres componentes del campo local de velocidades. Por lo tanto, aquí  $n = 12$  y  $d = 3$ . Las variables de estado y los flujos están dados por

$$u = (U_{11}, U_{21}, U_{31}, U_{12}, U_{22}, U_{32}, U_{13}, U_{23}, U_{33}, V_1, V_2, V_3)^\top \in \mathbb{R}^{12},$$

y por,

$$\begin{aligned} f^1(u) &= -(V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \sigma(U)_{11}, \sigma(U)_{21}, \sigma(U)_{31})^\top \\ f^2(u) &= -(0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, 0, 0, 0, \sigma(U)_{12}, \sigma(U)_{22}, \sigma(U)_{32})^\top \\ f^3(u) &= -(0, 0, 0, 0, 0, 0, V_1, V_2, V_3, \sigma(U)_{13}, \sigma(U)_{23}, \sigma(U)_{33})^\top, \end{aligned}$$

respectivamente. Tenemos, además, una restricción de origen físico ya que, por la definición de  $U$ , las derivadas mixtas de  $X$  deben ser iguales, es decir,  $\partial_{x_k} U_{ij} = \partial_{x_j} U_{ik}$ , para todas  $i, j, k = 1, 2, 3$ . En forma abreviada escribimos esta constricción como

$$\operatorname{curl} U = 0.$$

**Observación 2.5.** Las ecuaciones (2.20) son lineales cuando la función de densidad de energía  $W$  es cuadrática. Este tipo de modelos no es, sin embargo, realista. Aparte de estar definida para  $U$  con  $\det U > 0$ , usualmente también se requiere que  $W$  tienda a infinito cuando el material se comprime a un sólo punto, es decir,

$$\lim_{|U| \rightarrow 0} W(U) = +\infty.$$

Esto impone la restricción de que los modelos en elasticidad sean, en esencia, no lineales.

Una buena referencia para teoría de elasticidad es el texto de Ciarlet [36]. Para modelos más generales de medios continuos y un tratamiento un tanto más matemático recomiendo consultar el libro de Dafermos [47].

### 2.2.5. Termoelasticidad adiabática unidimensional

Sea una barra elástica con sección transversal constante, la cual es idealizada como un medio continuo unidimensional que ocupa el intervalo  $[0, L]$  (configuración de referencia) cuando está en reposo. El movimiento longitudinal de la barra está determinada por la variable lagrangiana  $X(x, t)$ , que denota la posición de una partícula que a tiempo  $t = 0$  ocupaba la posición  $x \in [0, L]$ . Definimos el gradiente de deformación como  $u = X_x$  y la velocidad local como  $v = X_t$ . Supondremos que el medio es homogéneo; que la densidad de masa de la barra es constante,  $\rho_0 = 1$ ; y que  $u > 0$ . De este modo, el mapeo  $x \mapsto X(x, t)$  es siempre invertible para todo  $t \geq 0$ . Un medio termoelástico es aquél para el cual, para cualquier partícula fija  $x$  y para cualquier movimiento  $X$ , la energía interna  $e$ , el esfuerzo de Piola-Kirchhoff  $\sigma$ , la temperatura  $\theta$ , y el flujo de calor  $Q$ , están determinados por el valor en  $(x, t)$  del gradiente de deformación  $u$ , la entropía específica  $s$ , y el gradiente de temperatura  $\nabla\theta$ , mediante relaciones constitutivas que tienen la siguiente forma:

$$\begin{aligned} e &= \hat{e}(u, s), \\ \sigma &= \rho_0 \partial_u \hat{e}(u, s), \\ \theta &= \partial_s \hat{e}(u, s), \\ Q &= \hat{Q}(u, s, \nabla\theta), \end{aligned}$$

Si suponemos que la barra está constituida por un medio termoelástico que no conduce calor (proceso adiabático en el que  $Q \equiv 0$ ), y en ausencia de fuerzas externas, así como de fuentes de calor, las ecuaciones de conservación de masa, momento lineal y energía tienen la siguiente forma conservativa (lagrangiana)

$$\begin{aligned} u_t - v_x &= 0, \\ v_t - \sigma(u, s)_x &= 0, \\ (e + \frac{1}{2}v^2)_t - (v\sigma(u, s))_x &= 0. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Las cantidades conservadas son  $U = (u, v, e + \frac{1}{2}v^2)^\top \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ , con función de flujo dada por

$$f(U) = - \begin{pmatrix} v \\ \sigma(u, s) \\ v\sigma(u, s) \end{pmatrix},$$

y donde el conjunto de variables de estado es  $\Omega = \{(v, u, e + \frac{1}{2}v^2) \in \mathbb{R}^3 : e > 0\}$ . El sistema (2.21) está complementado por la desigualdad de Clausius

$$s_t \geq 0, \quad (2.22)$$

que expresa la segunda ley de la termodinámica. Para la derivación de las ecuaciones de una barra termoelástica, el lector puede consultar Slemrod [211], y Jiang y Racke [102] (ver también [47, 35]).

### Barra hiperelástica unidimensional

El esfuerzo  $\sigma$  sobre la barra depende sólo del gradiente de deformación mediante  $\sigma(u) = W'(u)$ , donde la función  $W(u) := \rho_0 \hat{e}(u)$  está determinada por las propiedades constitutivas del material, y debe satisfacer  $W(0) = 0$  y  $W'(0) = \sigma(0) > 0$ . La primera condición significa que el material en su configuración de referencia está libre de esfuerzos, mientras que la segunda implica que el módulo de tensión de la barra es positiva. En puntos donde el gradiente de deformación  $u$  y la velocidad local  $v$  son continuas y diferenciables, el movimiento de la barra está determinada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} u_t - v_x &= 0, \\ v_t - \sigma(u)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.23)$$

ya que suponemos que la barra está libre de fuerzas externas (tales como la gravedad) y que el momento lineal y la masa se conservan. Aquí  $x \in [0, L]$ ,  $t \geq 0$ , y el sistema tiene claramente forma conservativa. El lector notará inmediatamente que este sistema es un caso particular de (2.20), en el caso de un material elástico unidimensional. Las cantidades conservadas y la función de flujo son

$$U = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \text{y} \quad f(U) = - \begin{pmatrix} v \\ \sigma(u) \end{pmatrix},$$

respectivamente. El conjunto de variables de estado es  $\Omega = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0\}$ . Como referencias el lector puede consultar [54, 101, 1].

#### 2.2.6. El sistema $p$

Considérese el siguiente sistema de dos ecuaciones en forma conservativa

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , y  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal dada, de clase  $C^2$ , que satisface las condiciones  $p' < 0$ , y  $p'' > 0$ . Las variables de estado y función de flujo son

$$u = \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad \text{y} \quad f(u) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix} \in C^2(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2),$$

respectivamente. Este sistema de ecuaciones, conocido como *sistema  $p$* , constituye el ejemplo no trivial más simple de un sistema no lineal de leyes de conservación, razón por la cual es de gran importancia teórica. Más aún, el sistema  $p$  ha sido ampliamente estudiado porque, también, es el paradigma de varios modelos de origen físico. Por ejemplo, consideremos las ecuaciones de Euler en forma lagrangiana (2.12), y supongamos, además, que el proceso es isentrópico. Como consecuencia la energía interna  $e$  es constante y la presión es función solamente del volumen específico  $\tau$ . Bajo estas condiciones, el sistema (2.12) se reduce a un sistema  $p$  de la forma (2.24), donde la presión (a densidad de energía constante) hace las veces de la función  $p$ . Dicha función debe satisfacer las condiciones  $p'(\tau) < 0$  y  $p''(\tau) > 0$ .

Asimismo, claramente el modelo para una barra elástica unidimensional (2.23) tiene la forma de un sistema  $p$ , donde la función  $p$  se define como  $p = -\sigma$ , siendo  $\sigma$  el esfuerzo. Finalmente, nótese que la primera ecuación en (2.24) implica, en regiones simplemente conexas de  $(x, t)$ , que existe una función  $\psi = \psi(x, t)$  tal que  $\psi_x = v$  y  $\psi_t = w$ . Sustituyendo en la segunda ecuación de (2.24) obtenemos la siguiente ecuación de onda no lineal para  $\psi$ ,

$$\psi_{tt} + p(\psi_x)_x = 0,$$

cuya velocidad de propagación,  $c = \sqrt{-p'(\psi_x)}$ , depende de  $\psi_x$ . Esta clase de ecuaciones ha sido ampliamente estudiada a partir del trabajo fundamental de Fermi, Pasta y Ulam [58]. Por su importancia, el sistema  $p$  es estudiado en diversos textos (véanse, por ejemplo, [213, 197, 128]), y sigue siendo objeto de intensa investigación.

### 2.2.7. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell en el vacío con permisividades magnética  $\mu_0 = 1$  y eléctrica  $\epsilon_0 = 1$ , tienen la siguiente forma

$$\mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (2.25)$$

$$\mathbf{E}_t - \nabla \times \mathbf{B} = -\mathbf{J}, \quad (2.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad (2.27)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (2.28)$$

en donde los campos vectoriales  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  y  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  representan el campo eléctrico y el campo magnético, respectivamente. La corriente eléctrica está determinada por el campo  $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)^\top$ . Las ecuaciones de evolución (dependientes del tiempo), a saber, (2.25) y (2.26), corresponden a las leyes de Faraday y de Ampère, respectivamente. Las ecuaciones (2.27) y (2.28) son las leyes de Gauss eléctrica y magnética. Observamos que este sistema no tiene forma conservativa. Sin embargo, podemos escribir las leyes de Faraday y de Ampère como un sistema de leyes de balance de la forma

$$u_t + \operatorname{div} F(u) = \tilde{J},$$

donde el vector de variables de estado  $u$  está dado por

$$u = (B_1, B_2, B_3, E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^6,$$

con funciones de flujo,

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 & E_3 & -E_2 \\ -E_3 & 0 & E_1 \\ E_2 & -E_1 & 0 \\ 0 & -B_3 & B_2 \\ B_3 & 0 & -B_1 \\ -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{6 \times 3},$$

y donde las fuentes del sistema están determinadas por el campo

$$\tilde{J} = (0, 0, 0, J_1, J_2, J_3)^\top \in \mathbb{R}^6.$$

Las leyes de Gauss en forma de divergencia, que no involucran derivadas temporales, cierran el sistema como constricciones a los campos. Notemos que estas ecuaciones son *lineales*, ya que los flujos  $F$  son funciones lineales de las variables de estado. Como referencia, recomiendo ver el libro de Jackson [100].

### 2.2.8. Magnetohidrodinámica (MHD)

El siguiente sistema de ecuaciones en forma conservativa modela el movimiento de un fluido en presencia de un campo electromagnético. Suponemos que dicho campo electromagnético ejerce una fuerza sobre el fluido, de tal manera que la aceleración se ve afectada por el campo. Igualmente el movimiento mismo del fluido contribuye a la evolución del campo. El sistema de ecuaciones tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0 \\ (\rho v_i)_t + \operatorname{div}(\rho v_i v) + (p + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)_{x_i} - \operatorname{div}(B_i \mathbf{B}) &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ (\frac{1}{2}\rho|v|^2 + \rho e + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2)_t + \operatorname{div}(\frac{1}{2}v\rho|v|^2 + v\rho e + p v + \mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= 0, \\ \mathbf{B}_t + \nabla \times \mathbf{E} &= 0, \end{aligned} \quad (2.29)$$

donde, al igual que en las ecuaciones de Euler, tenemos que  $\rho > 0$  es la densidad de masa del fluido,  $v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3$  es el campo de velocidades,  $e > 0$  es la densidad de energía interna,  $p$  es la presión termodinámica,  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  es el campo eléctrico, y  $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^3$  denota al campo magnético. Las ecuaciones (2.29) representan conservación de masa, momento, energía y la ley de Faraday, respectivamente.

Este sistema está complementado, además, por dos leyes constitutivas. Por un lado tenemos la ecuación de estado del fluido,  $p = \hat{p}(\rho, e)$ , y por el otro, consideramos la ley aproximada  $\mathbf{E} = \mathbf{B} \times v$ , la cual es una aproximación a equilibrio local ya que  $\mathbf{E} + v \times \mathbf{B} \approx 0$  si la velocidad es pequeña. Claramente, este sistema de ecuaciones representa un sistema de leyes de conservación con cantidades conservadas

$$u = (\rho, \rho v_1, \rho v_2, \rho v_3, \rho(\frac{1}{2}|v|^2 + e) + \frac{1}{2}|\mathbf{B}|^2, B_1, B_2, B_3)^\top \in \mathbb{R}^8,$$

y con funciones de flujo determinadas por

$$f^j(u) = \begin{pmatrix} \rho v_j \\ \rho v_1 v_j + (p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2) \delta_1^j + B_1 B_j \\ \rho v_2 v_j + (p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2) \delta_2^j + B_2 B_j \\ \rho v_3 v_j + (p + \frac{1}{2} |\mathbf{B}|^2) \delta_3^j + B_3 B_j \\ \rho v_j (\frac{1}{2} |v|^2 + e) + p v_j + (\mathbf{E} \times \mathbf{B})_j \\ (\nabla \times \mathbf{E})_1 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_2 \\ (\nabla \times \mathbf{E})_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^8,$$

para cada  $j = 1, 2, 3$ . Aquí  $\delta_i^k$  es la delta de Kronecker, y  $(\nabla \times \mathbf{E})_i$  es la componente  $i$  del rotacional de  $\mathbf{E}$ .

En referencia a las ecuaciones de la magnetohidrodinámica, el lector puede consultar el octavo volumen de la serie de Física Teórica de Landau y Lifshitz [122] (véanse también [59, 224]).

### 2.2.9. Electroforesis

Se conoce como *electroforesis* al proceso utilizado para separar  $n$  componentes químicos ionizados en una solución acuosa mediante la aplicación de un campo eléctrico. Si  $u_j \geq 0$  denota la concentración del ion  $j$ , y la constante  $c_j > 0$  es su *movilidad electroforética* (definida como el producto  $c_j = \mu_j J$ , donde  $J > 0$  es la corriente eléctrica aplicada por el experimentalista, y  $\mu_j > 0$  es la movilidad del ion), el sistema de ecuaciones toma la siguiente forma conservativa:

$$\partial_t u_j + \partial_x \left( \frac{c_j u_j}{\sum_{i=1}^n u_i} \right) = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad (2.30)$$

donde las movilidades electroforéticas satisfacen  $0 < c_1 < c_2 < \dots < c_n$ . Las variables conservadas son las concentraciones de las  $n$  especies iónicas,

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \Omega,$$

con función de flujo  $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$  dada por

$$f(u) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n u_i} \begin{pmatrix} c_1 u_1 \\ \vdots \\ c_n u_n \end{pmatrix}.$$

El conjunto de variables de estado es  $\Omega = \{u \in \mathbb{R}^n : \sum u_j > 0, u_j \geq 0, j = 1, \dots, n\}$ . Para una deducción de éste y otros modelos relacionados el lector puede consultar Fife y Geng [60] (véase también Alekseyevskaya [6]). El sistema (2.30) pertenece a una clase especial de sistemas llamados *ricos o semi-Hamiltonianos*, los cuales están dotados de algunas propiedades interesantes que veremos más adelante (ver Serre [197, 198] y Freistühler [67]).

### 2.3. Convección no lineal

Los ejemplos de la sección anterior son una muestra de la gran variedad de fenómenos que pueden ser modelados mediante sistemas de ecuaciones de la forma (2.4) o (2.3). En la mayoría de ellos, las funciones de flujo asociadas son funciones no lineales de  $u$ . Por diversas razones, la aparente simplicidad de sistemas en forma de conservación (2.4) contrasta con la enorme dificultad de los problemas asociados a ellos, tales como el problema de Cauchy, los problemas mixtos (es decir, con condiciones iniciales y de frontera), o el estudio del comportamiento asintótico de las soluciones. Cabe mencionar que no existe una teoría satisfactoria de existencia de soluciones al problema de Cauchy, ya que incluso con datos iniciales regulares, es posible encontrar una solución regular (o clásica) que deja de existir para tiempos finitos. Esta particularidad de los sistemas hiperbólicos no lineales de primer orden se conoce como *convección no lineal*. Para ilustrar este fenómeno, estudiaremos un ejemplo concreto.

Consideremos la ecuación diferencial parcial más simple posible,

$$u_t + au_x = 0, \quad (2.31)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $a \in \mathbb{R}$  es una constante distinta de cero, y  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . El problema de Cauchy asociado consiste en resolver (2.31) en el dominio  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , bajo una condición inicial dada,

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (2.32)$$

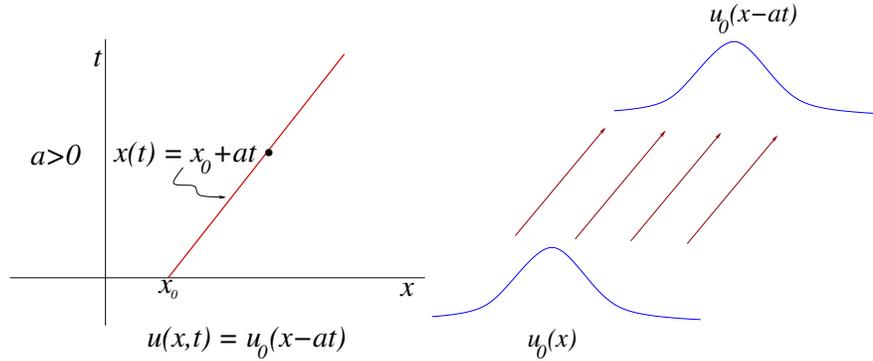
Una solución clásica de (2.31)-(2.32) es una solución de clase  $C^1$  para  $t > 0$ , continua para  $t \geq 0$ , que satisface (2.31) puntualmente. Si  $u_0$  es diferenciable, es fácil probar que la solución clásica está determinada únicamente por

$$u(x, t) = u_0(x - at), \quad (2.33)$$

para todo  $x$  y  $t$ . Es decir, los datos iniciales se propagan (sin cambio en su forma) a la derecha si  $a > 0$ , o a la izquierda si  $a < 0$ . La solución  $u(x, t)$  es constante a lo largo de las *curvas características*, soluciones a la ecuación

$$\begin{aligned} x'(t) &= a, \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

es decir, a lo largo de líneas rectas de la forma  $x(t) = at + x_0$ . (Ver figura 2.1 para el caso en que  $a > 0$ .)



**Figura 2.1** Curvas características para  $a > 0$  (izquierda). La condición inicial  $u_0(x)$  se propaga sin cambios a la derecha con velocidad  $a > 0$  (derecha).

Dicho de otro modo, dados  $(x, t)$  en  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , existe  $x_0(x, t) = x - at$  tal que  $u(x, t) = u_0(x_0(x, t))$  es la solución al problema. Notemos que si diferenciamos  $u(x, t)$  a lo largo de las curvas características obtenemos

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x'(t)u_x + u_t = au_x + u_t = 0,$$

por lo que el mapeo  $t \mapsto u(x_0 + at, t)$  es constante con valor  $u_0(x_0)$ . Observamos que claramente (2.33) es la única solución a (2.31) - (2.32) y que ésta existe para todo tiempo  $t \geq 0$ .

Podemos también suponer que la velocidad es una función de la posición, es decir, considerar la ecuación

$$u_t + (a(x)u)_x = 0,$$

donde  $a(x)$  es una función suave. Esta ecuación puede interpretarse como la relación que gobierna la concentración de cierta sustancia  $u$  con velocidad variable  $a(x)$ . En este caso, podemos escribir  $(\partial_t + a(x)\partial_x)u = -a'(x)u$ , lo cual sugiere definir las curvas características como soluciones a

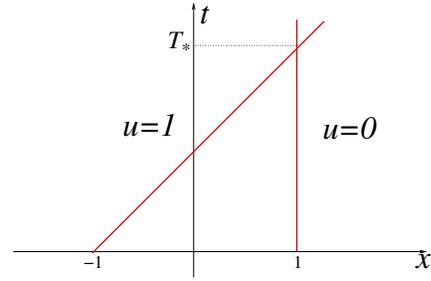
$$\begin{aligned} x'(t) &= a(x), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned}$$

para cierto  $x_0 \in \mathbb{R}$ . Notamos que sobre las curvas características, la solución  $u$  satisface la ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u(x(t), t) &= -a(x(t))u, \\ u(x(0), 0) &= u_0(x_0). \end{aligned}$$

Aquí  $u$  no es constante a lo largo de las curvas características, pero el problema se reduce a resolver dos ecuaciones diferenciales ordinarias. En ambos casos se puede probar (ver [56, 103]) que si  $u_0$  es suficientemente regular, por ejemplo,  $u_0 \in C^k(\mathbb{R})$  para  $k > 0$ , entonces la solución  $u$  es igualmente suave en el espacio y en el tiempo, es decir,  $u \in C^k(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$  y existe para todo tiempo  $t \geq 0$ .

**Figura 2.2** Incluso con condiciones iniciales suaves, las soluciones de la ecuación no-lineal (2.34) dejan de existir a tiempo finito. En la gráfica, dos características se intersectan a tiempo  $t = 2 > T_*$ , donde  $T_* > 0$  es el tiempo de rompimiento, produciendo una solución multivaluada.



¿Qué sucede, sin embargo, si consideramos que la velocidad depende de  $u$ , es decir, si  $a = a(u)$ ? Veamos el caso más simple, en el que  $a$  depende de  $u$  linealmente, a saber,  $a(u) = u$ . La ecuación toma la forma

$$u_t + uu_x = 0. \quad (2.34)$$

Esta ecuación se conoce como *ecuación de Burgers no viscosa* [32]. Nuevamente, nos interesa resolver el problema de Cauchy con condición inicial (2.32). Si buscamos una curva característica sobre la cual la solución permanece constante, llegamos al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'(t) &= u, \\ u'(t) &= 0, \end{aligned}$$

con condiciones iniciales  $x(0) = x_0$  y  $u(0) = u_0(x_0)$  para  $x_0$  dado. La solución a este sistema de ecuaciones es una línea recta dada por  $x(t) = u_0(x_0)t + x_0$ , a lo largo de la cual el valor de  $u$  es constante. En efecto, si diferenciamos  $u(x, t)$  a lo largo de dicha característica, tenemos que

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = x'(t)u_x + u_t = uu_x + u_t = 0.$$

Como anteriormente, el problema de Cauchy se reduce, dados  $(x, t)$  en  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , a encontrar  $x_0$  tal que  $x = u_0(x_0)t + x_0$ . Por el teorema de la función implícita, para encontrar  $x_0$  requerimos que

$$\frac{d}{dx_0}(u_0(x_0)t + x_0) = u'_0(x_0)t + 1 \neq 0.$$

Esto es posible si  $t$  es pequeño y  $u'_0(x_0)$  es acotado. Pero para  $t$  suficientemente grande podemos llegar a una contradicción. Tomemos por ejemplo  $u_0$  tal que  $u_0(-1) = 1$  y  $u_0(1) = 0$ . Como se puede apreciar en la figura 2.2, el valor de  $u$  es constante (y con valores distintos) a lo largo de dos líneas rectas que, eventualmente, se intersectan. Es posible demostrar que si  $u'_0(x)$  es negativa para alguna  $x$  entonces existe un tiempo finito  $T_* > 0$  (llamado *tiempo de rompimiento*), y determinado por

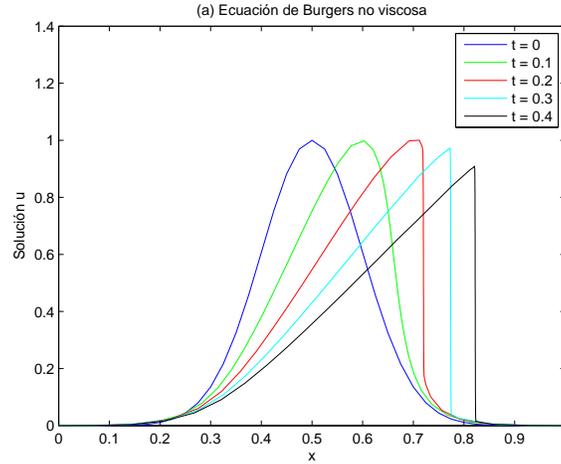
$$T_* = \frac{-1}{\min u'_0(x)} > 0,$$

a partir del cual las características se intersectan y la solución es multivaluada.

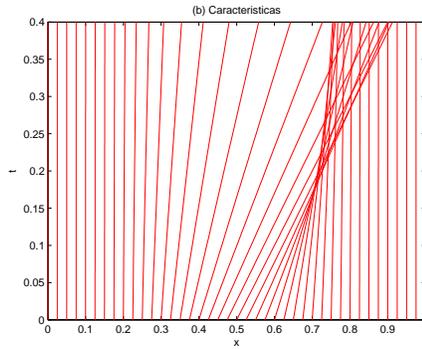
Por ejemplo, consideremos una condición inicial de la forma

$$u_0(x) = e^{-(x-\frac{1}{2})^2}. \quad (2.35)$$

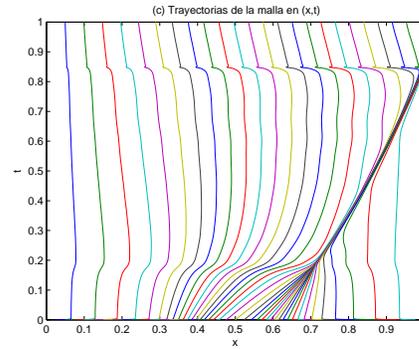
Dado que  $u'_0 < 0$  en algunos intervalos, por la observación anterior la solución clásica construida por el método de características sólo existe antes de un tiempo finito de rompimiento  $T_* > 0$ . La figura 2.3 muestra la solución de (2.34) con condición inicial (2.35) normalizada, para tiempos positivos.



(a) Solución a la ecuación de Burgers no viscosa (2.34) para distintos valores de  $t > 0$



(b) Rectas características



(c) Trayectorias sobre la malla en  $(x,t)$

**Figura 2.3** Solución a la ecuación de Burgers no viscosa (2.34) con condición inicial (2.35). En la figura (a) se aprecia la solución para tiempos  $t = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ . Nótese que a partir de cierto tiempo de rompimiento  $T_* \in (0, 15, 0, 2)$ , la solución se vuelve discontinua y se convierte en un frente que se propaga a la derecha con cierta velocidad positiva. La figura (b) muestra las características de la ecuación en el plano  $(x,t)$ ; notablemente, éstas se intersectan a partir del tiempo de rompimiento  $T_*$ . La figura (c) muestra la malla móvil en  $(x,t)$ ; se aprecia la aparición de una discontinuidad para tiempos mayores a  $T_*$ .

Como se muestra en la figura 2.3, la solución clásica existe para tiempos suficientemente pequeños. A partir del tiempo de rompimiento  $T_* \in (0, 15, 0, 2)$ , la solución se convierte en un frente discontinuo que se propaga hacia la derecha con cierta velocidad positiva. Esta solución discontinua se conoce como *onda de choque*, en analogía a lo que sucede en dinámica de gases, la cual se dice que “se genera” a partir del tiempo de rompimiento. En el estudio de fluidos compresibles, y en general para sistemas de leyes de conservación, muchas de las soluciones que tienen significado físico son discontinuas. Es importante señalar que este fenómeno de formación de singularidades es particular de las ecuaciones no lineales. Como veremos más adelante en la sección 3.1 para ecuaciones escalares, el método de características se puede aplicar para probar la existencia local de soluciones clásicas y para calcular el tiempo de rompimiento.

**Observación 2.6.** A pesar de que se ha descrito el fenómeno de rompimiento a tiempo finito para un caso particular, éste es distintivo de sistemas generales no lineales de la forma (2.4). Por ejemplo, en el caso de una ecuación *escalar* en varias dimensiones espaciales, con  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}$ , es posible aplicar el método de características para verificar que la solución es constante a lo largo de curvas integrales  $t \mapsto x(t) = (x_1(t), \dots, x_d(t))^T$  del sistema de ecuaciones

$$\frac{dx_j}{dt} = a_j(u(x, t)), \quad j = 1, \dots, d,$$

donde  $a_j(u) = (d/du)f^j(u)$ , y, asimismo, probar que existe un tiempo finito de rompimiento determinado por

$$T_* = \frac{-1}{\min_{x \in \mathbb{R}^d} (\operatorname{div} a(u_0(x)))},$$

si se cumple la condición

$$\operatorname{div} a(u_0(\tilde{x})) < 0, \quad \text{para cierto } \tilde{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.36)$$

con  $a(u) = (a_1(u), \dots, a_d(u))^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ . En otro caso, la solución clásica existe para todo tiempo (ver Majda [160], teorema 3.1).

En el caso de sistemas, determinar las condiciones suficientes para la formación de discontinuidades y calcular el tiempo de rompimiento es un poco más complicado. Cabe destacar, sin embargo, que la formación de singularidades es un fenómeno ampliamente reportado (ver la nota bibliográfica al final del capítulo). También es posible restringir la clase de funciones para las condiciones iniciales de manera que existan soluciones clásicas globales a sistemas particulares, como es el caso de las ecuaciones de Euler para un gas ideal, tal y como lo muestra Grassin [89]. Esto indica que en el caso de sistemas no existe una condición sencilla sobre los datos iniciales, como sucede en el caso escalar (condición (2.36)), que determine la formación de discontinuidades a tiempo finito.

**Observación 2.7.** La ecuación de Burgers no viscosa (2.34) se puede escribir (cuando la solución es clásica) como una ley de conservación de la forma

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (2.37)$$

donde la función de flujo está dada por la función no lineal  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ . Al igual que los sistemas prototipo (2.4), claramente ésta ecuación expresa un principio fundamental de conservación de la cantidad  $u$  a lo largo de un conjunto en  $\mathbb{R}$ , para la cual la pérdida o ganancia de esta cantidad a lo largo de la frontera de dicho conjunto está controlada por una función de flujo  $\frac{1}{2}u^2$ . La ecuación de Burgers no viscosa (2.34) es el paradigma de una ley de conservación escalar y reviste gran importancia, pues es la aproximación escalar de la ley de conservación de momento en el sistema de Euler para un gas compresible.

## 2.4. Soluciones débiles y condiciones de Rankine-Hugoniot

Las observaciones de la sección anterior nos indican que en el estudio de soluciones globales de la ecuación (2.34) (y en general, para sistemas hiperbólicos no lineales de primer orden), es necesario extender nuestra definición de solución, debido al fenómeno de convección no lineal. Éste último provoca que, incluso con condiciones iniciales suaves, la solución clásica puede existir sólo hasta un tiempo finito, a partir del cual ésta se “rompe” y se forman singularidades. Por ende, la nueva clase de soluciones debe admitir soluciones discontinuas. En esta sección se definirá el concepto de *solución débil*, y se discutirán las clásicas condiciones de salto que expresan el principio de conservación.

### 2.4.1. Definición de solución débil

Consideremos el problema de Cauchy para un sistema general de leyes de conservación en varias dimensiones espaciales,

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0, \quad (2.38)$$

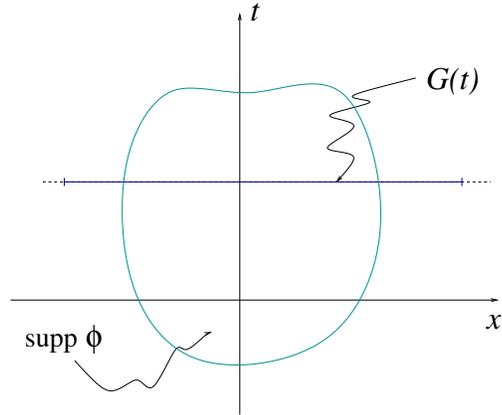
$$u(x, 0) = u_0, \quad (2.39)$$

en  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, \infty)$ ,  $u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Supongamos que  $u$  es una solución clásica, por ejemplo, de clase  $C^1$ . Tomemos una *función de prueba*

$$\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n),$$

es decir,  $\phi$  es la restricción de una función de clase  $C^\infty$  con soporte compacto en un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ . Multiplicando (2.38) por  $\phi$  e integrando en el espacio y en el tiempo obtenemos

**Figura 2.4** Función de prueba  $\phi$  con soporte compacto (que se denota como  $\text{supp } \phi$ ), que intersecta a  $\{t \geq 0\}$  dentro de la curva en la figura.  $G(t)$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^d$  que contiene propiamente al soporte de  $\phi$  para cada  $t > 0$  fijo.



$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u_t \cdot \phi + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} \cdot \phi \, dx \, dt \\ &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \phi)_t + \sum_{j=1}^d (f^j(u) \cdot \phi)_{x_j} \, dx \, dt - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Sea  $G(t) \subset \mathbb{R}^d$ , abierto y acotado para cada  $t > 0$  fijo, tal que el soporte de  $\phi$  con  $t$  fijo está contenido enteramente en  $G(t)$ . Por lo tanto,  $\phi = 0$  sobre la frontera  $\partial G(t)$  tal y como se muestra en la figura 2.4. Entonces, por el teorema de la divergencia tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^d} (u \cdot \phi) \Big|_{t=0}^{t=+\infty} dx + \int_0^{+\infty} \int_{\partial G(t)} \begin{pmatrix} f^1(u) \cdot \phi \\ \vdots \\ f^d(u) \cdot \phi \end{pmatrix} \cdot \hat{n} \, dS_x \, dt + \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u_0(x) \, dx - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Por lo tanto llegamos a la relación integral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} \, dx \, dt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u_0(x) \, dx = 0. \quad (2.40)$$

**Definición 2.8.** Una función<sup>3</sup>  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty); \Omega)$  es una solución débil de (2.38)-(2.39) si  $u$  satisface (2.40) para toda función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ .

<sup>3</sup> aquí  $L^\infty$  denota el espacio de funciones esencialmente acotadas. En general, si  $X$  es un espacio vectorial,  $\mathcal{A}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mu$  una medida, el espacio  $L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$  se define como

**Observación 2.9.** (a) Por construcción, toda solución clásica es débil. Notamos que si  $u$  es solución débil, entonces  $u$  satisface (2.40) en sentido de distribuciones.

(b) Si tomamos  $\phi$  con soporte contenido en un conjunto abierto  $\mathcal{O} \subset \{t \geq t_0 > 0\}$  (es decir, lejos de  $t = 0$ ), entonces

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt = 0. \quad (2.41)$$

(c) Si  $u$  es solución débil de clase  $C^1$  en alguna región abierta  $R \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ , entonces  $u$  es una solución clásica en  $R$ . En efecto, tomando cualquier  $\phi \in C_0^\infty$  con soporte en  $\{t > 0\} \cap R$  como en el punto anterior e integrando por partes la ecuación (2.41), obtenemos

$$\int_R \phi \cdot (u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j}) dx dt = 0,$$

lo cual implica que

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0,$$

en el interior de la región  $R$ .

(d) Si ahora tomamos una solución débil, de clase  $C^1$  y consideramos  $R = \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ , multiplicando la ecuación anterior por una función general de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  obtenemos, al integrar por partes,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} (u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j}) \cdot \phi dx dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot u(x, 0) dx - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt. \end{aligned}$$

Comparando con (2.40), podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x, 0) \cdot (u(x, 0) - u_0(x)) dx = 0,$$

para toda  $\phi \in C_0^\infty$ , por lo que  $u(x, 0) = u_0(x)$  c.d.s. en  $\mathbb{R}^d$ , y la condición inicial se satisface puntualmente excepto en un conjunto de medida cero. Por lo tanto, *la noción de solución débil extiende la noción de solución clásica.*

$$L^\infty = \{f : \|f\|_\infty < +\infty\},$$

$$\|f\|_\infty := \inf\{s_f(E) : E \in \mathcal{M}, \mu(E) = 0\},$$

$$s_f(E) := \sup\{|f(x)| : x \notin E\};$$

consultar, por ejemplo, [12, 190]. En este texto basta con pensar en  $L^\infty$  como el espacio de funciones medibles acotadas.

(e) Claramente, la definición de solución débil admite soluciones *discontinuas*. Observemos que el principio básico de conservación (2.2) está expresado en forma integral y admite también posibles discontinuidades de  $u$ . De este modo, el lector puede verificar directamente mediante un argumento similar que toda solución débil de (2.38) y (2.39) satisface la ecuación (2.2) para todo tiempo positivo  $t > 0$  y para todo dominio arbitrario  $D$  del espacio físico.

(f) Una clase de soluciones débiles que es importante considerar es la clase de *soluciones  $C^1$  por pedazos*, es decir, con un número contable de discontinuidades (en este caso, hipersuperficies  $\Sigma_k$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , en el espacio ambiente  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ ), fuera de las cuales la solución es de clase  $C^1$ , pero discontinua a través de cada superficie  $\Sigma_k$ . Sin embargo, no toda discontinuidad es admisible, como veremos a continuación.

### 2.4.2. Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot

Las clásicas condiciones de salto de Rankine-Hugoniot fueron establecidas originalmente en el estudio de la dinámica de gases [97, 186], y describen los saltos en las variables termodinámicas a través de una posible discontinuidad (por ejemplo, una onda de choque). A partir de la noción de solución débil, vamos a derivar éstas condiciones de salto necesarias sobre una posible discontinuidad de una solución  $u$  para un sistema general de leyes de conservación de la forma (2.4). Dichas condiciones establecen una relación (sobre la discontinuidad) entre  $u$  y el flujo  $F(u)$  que expresa, precisamente, el principio de conservación.

Asumamos que  $u$  es una solución que es  $C^1$  por pedazos, y sea  $\Sigma$  una discontinuidad, es decir, una hipersuperficie orientable (en el espacio-tiempo  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ ) de la forma

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+ : \psi(x, t) = 0\},$$

con normal  $\hat{n} = (n_1, \dots, n_d, n_t)^\top \in \mathbb{R}^{d+1}$ ,  $|\hat{n}| = 1$ . Por ejemplo, si  $\Sigma$  está definida por una función diferenciable  $\psi$ , entonces las componentes espacial,  $\hat{n}_x = (n_1, \dots, n_d)^\top$ , y temporal,  $\hat{n}_t$ , de  $\hat{n} = (\hat{n}_x, \hat{n}_t)^\top$  están dadas por

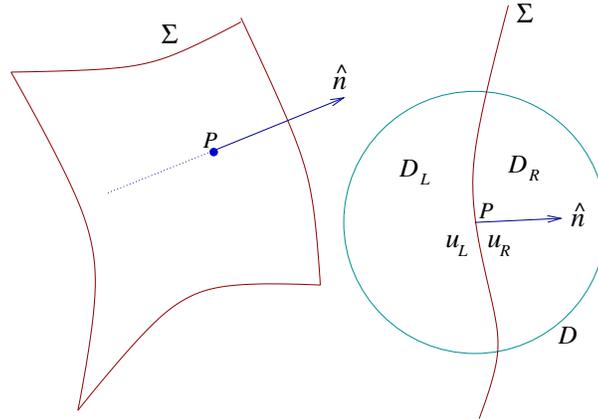
$$\hat{n}_x = \frac{\nabla_x \psi}{\sqrt{|\nabla_x \psi|^2 + \psi_t^2}}, \quad \hat{n}_t = \frac{\psi_t}{\sqrt{|\nabla_x \psi|^2 + \psi_t^2}}.$$

Dado que  $\Sigma$  es orientable, la hipersuperficie divide el espacio-tiempo en dos regiones y suponemos por convención que  $\hat{n}$  apunta en la dirección “derecha” de la superficie; ver figura 2.5.

Por lo tanto, definimos para cada  $(x, t)$  en  $\Sigma$ ,

$$\begin{aligned} u_R &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) + \varepsilon \hat{n}), \\ u_L &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u((x, t) - \varepsilon \hat{n}), \end{aligned} \tag{2.42}$$

como los valores límite a cada lado (derecho e izquierdo, respectivamente) de la frontera. Sea un punto  $P \in \Sigma$  y consideremos una bola  $D$  centrada en  $P$  con radio pequeño, de manera que



**Figura 2.5** Hipersuperficie  $\Sigma$  en el espacio  $(x,t)$ ;  $\hat{n}$  es la normal unitaria a  $\Sigma$  que por convención apunta al lado “derecho” de la superficie. Los valores  $u_R$  y  $u_L$  en cada punto  $P$  de  $\Sigma$  se definen como los límites de  $u$  del lado derecho e izquierdo, respectivamente, en dirección de  $\hat{n}$  cuando  $(x,t)$  tiende al punto  $P$ . La bola  $D$  tiene centro en  $P$ , y  $D = D_R \cup D_L$  donde  $D_R$  y  $D_L$  denotan las componentes derecha e izquierda de  $D$ , respectivamente.

$u$  es  $C^1$  fuera de  $\Sigma \cap D$ , y  $D$  está lejos de  $\{t = 0\}$ . Sean  $D_R$  y  $D_L$  dos componentes de  $D$  a cada lado de la frontera  $\Sigma$ , tales que  $D = D_L \cup D_R \cup (\Sigma \cap D)$  como se observa en la figura 2.5.

Sea  $\phi \in C_0^\infty(D)$ . Si  $u$  es solución débil entonces, por la fórmula (2.41), tenemos que

$$\int_{D_L \cup D_R} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dxdt = 0.$$

Dado que  $u$  es de clase  $C^1$  en el interior de  $D_L$  y  $D_R$ , y  $\phi \equiv 0$  en  $\partial D$ , obtenemos, por el teorema de la divergencia,

$$\begin{aligned} I_R &:= \int_{D_R} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dxdt \\ &= \int_{D_R} (\phi \cdot u)_t + \sum_{j=1}^d (\phi \cdot f^j(u))_{x_j} dxdt - \int_{D_R} \phi \cdot (u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j}) dxdt \\ &= \int_{\partial D_R} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t} = - \int_{\Sigma \cap D} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t}, \end{aligned}$$

donde  $-\hat{n}$  es la normal exterior a  $D_R$  sobre  $\Sigma \cap D$ . Si hacemos lo mismo con la integral sobre  $D_L$ , donde ahora es  $\hat{n}$  la normal exterior a su frontera, obtenemos

$$I_L := \int_{D_L} u \cdot \phi_t + \sum_{j=1}^d f^j(u) \cdot \phi_{x_j} dx dt = \int_{\Sigma \cap D} \begin{pmatrix} \phi \cdot f^1(u) \\ \vdots \\ \phi \cdot f^d(u) \\ \phi \cdot u \end{pmatrix} \cdot \hat{n} dS_{x,t}.$$

De este modo,

$$0 = I_R + I_L = \int_{\Sigma \cap D} (n_t(u_R - u_L) + \sum_{j=1}^d n_j(f^j(u_R) - f^j(u_L))) \cdot \phi dS_{x,t},$$

lo cual se cumple para toda bola arbitraria  $D$  con centro en  $\Sigma$  y para toda  $\phi$  con soporte compacto en  $D$ . Por lo tanto llegamos a las siguientes ecuaciones que se cumplen en cada punto de  $\Sigma$ ,

$$\hat{n}_t[u] + \sum_{j=1}^d \hat{n}_j[f^j(u)] = 0, \quad (x, t) \in \Sigma \quad (2.43)$$

donde, para toda  $(x, t) \in \Sigma$ , definimos el salto para cualquier función  $g(u)$  como

$$[g(u)] := g(u_R) - g(u_L). \quad (2.44)$$

Las condiciones de salto (2.43) son conocidas como *las condiciones de Rankine-Hugoniot*. Éstas expresan el principio de conservación (2.40) a través de la frontera, y constituyen restricciones para las posibles discontinuidades de una solución débil.

**Observación 2.10.** (a) En el caso de una dimensión espacial ( $d = 1$ ),  $\Sigma$  es una curva de la forma  $\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x = \check{x}(\sigma), t = \check{t}(\sigma), \sigma \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ , donde  $\check{x}$  y  $\check{t}$  son funciones derivables del parámetro  $\sigma$  en un intervalo  $I$ . El vector normal unitario es

$$\hat{n} = \frac{1}{(\check{x}'(\sigma)^2 + \check{t}'(\sigma)^2)^{1/2}} \begin{pmatrix} \check{t}'(\sigma) \\ -\check{x}'(\sigma) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{n}_x \\ \hat{n}_t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

de tal forma que las condiciones de Rankine-Hugoniot (2.43) a lo largo de  $\Sigma$  se escriben como

$$-\check{x}'(\sigma)[u] + \check{t}'(\sigma)[f(u)] = 0, \quad (x, t) \in \Sigma.$$

Si es posible reparametrizar la curva en términos de  $t$  (por ejemplo, si  $\check{t}'(\sigma) \neq 0$  para toda  $\sigma \in I$ ), de modo que  $\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ : x = \hat{x}(t), t \in I \subseteq \mathbb{R}\}$ , entonces las condiciones de salto se leen

$$-s[u] + [f(u)] = 0, \quad \text{sobre } \Sigma, \quad (2.45)$$

donde  $s = d\hat{x}/dt$  es la *velocidad de propagación de la discontinuidad*. Notemos que la ecuación (2.45) implica que los vectores  $[f(u)]$  y  $[u]$  son colineales sobre cada punto de  $\Sigma$ . También respresenta una ecuación diferencial para la dinámica de la discontinuidad.

(b) En el caso de una ecuación escalar en una dimensión espacial  $d = 1, n = 1$ ,

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (2.46)$$

con  $u \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , la velocidad de la discontinuidad está dada puntualmente por  $d\hat{x}/dt = s = [f(u)]/[u]$ , si  $[u] \neq 0$ .

(d) *Frentes planos*. El ejemplo más simple de una solución discontinua es el de un plano que separa dos valores constantes de las variables de estado. Sea  $\hat{n} \in \mathbb{R}^d$  un vector no nulo,  $|\hat{n}| = 1$ , que define una dirección de propagación. La discontinuidad  $\Sigma$  tendrá la forma

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty) : x \cdot \hat{n} - st = 0\},$$

es decir, tenemos un frente plano que se propaga con velocidad  $s \in \mathbb{R}$  en dirección  $\hat{n}$ . La solución discontinua

$$u(x, t) = \begin{cases} u_R, & x \cdot \hat{n} > st, \\ u_L, & x \cdot \hat{n} < st, \end{cases} \quad (2.47)$$

donde  $u_R$  y  $u_L$  son constantes,  $u_L \neq u_R$ , es conocida como un *frente plano*, y tiene forma de onda viajera (discontinua), ya que depende sólo de  $\xi = x \cdot \hat{n} - st$ . Sobre la discontinuidad  $\Sigma$  se satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$-s[u] + \sum_{j=1}^d n_j [f^j(u)] = 0, \quad (2.48)$$

las cuales determinan la velocidad de propagación. A este tipo de soluciones discontinuas también se les conoce como *ondas de choque*, si satisfacen criterios adicionales que estudiaremos más adelante (conocidos como condiciones de entropía). Por la observación 2.9 (c) y dado que (2.47) es constante por pedazos, la solución (2.47) satisface trivialmente la ecuación diferencial a cada lado del frente plano, y si el frente satisface las relaciones de Rankine-Hugoniot (2.48), la solución discontinua (2.47) es una *solución débil* de la ecuación (2.38).

Para una ley de conservación escalar en una dimensión espacial del tipo (2.46), la solución débil en forma de onda plana es

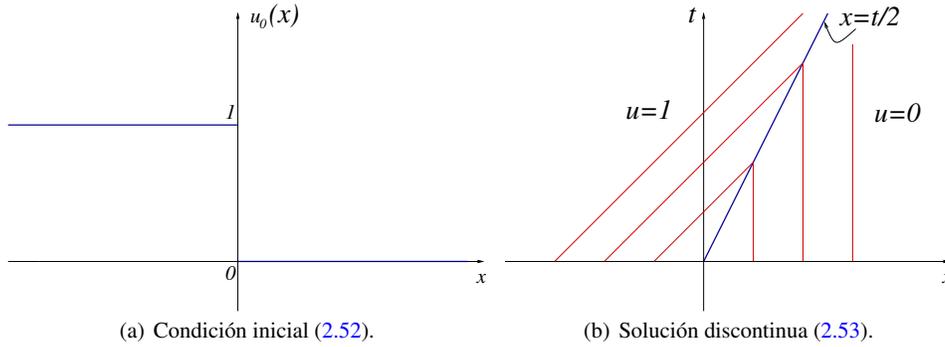
$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases} \quad (2.49)$$

con  $u_L \neq u_R \in \mathbb{R}$  constantes, y donde la única velocidad de propagación posible está dada por

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}. \quad (2.50)$$

### 2.4.3. No unicidad de soluciones débiles

Una consecuencia importante de extender la noción de solución clásica a la de solución débil es la pérdida de unicidad de ésta última. Analizaremos un ejemplo sencillo para ilustrar este hecho; sea la ecuación de Burgers no viscosa en una dimensión espacial,



**Figura 2.6** (a) Condición inicial (2.52), y (b) solución en forma de onda de onda discontinua (2.53). La línea en azul representa la discontinuidad  $\{x = \frac{1}{2}t\}$  que se propaga con velocidad  $s = \frac{1}{2}$ . Las líneas en rojo son las curvas características de la forma  $x = ut + x_0$ , donde la pendiente de la recta es  $u = 1$  a la izquierda del choque, y  $u = 0$  a su derecha. Nótese que las características aparentan “entrar” a la discontinuidad.

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (2.51)$$

con  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , y con función de flujo  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ . Consideremos el problema de Cauchy asociado con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x > 0, \\ 1, & x < 0. \end{cases} \quad (2.52)$$

En este caso, tenemos que  $u_L = 1$  y  $u_R = 0$ . El problema de Cauchy con condición inicial discontinua (2.52) (constante para  $x < 0$  y para  $x > 0$ ) se conoce como *problema de Riemann*. Como vimos, un frente (u onda de choque) de la forma (2.47) que separa valores constantes y que se propaga con velocidad  $s$  es una solución débil siempre y cuando la velocidad satisfaga

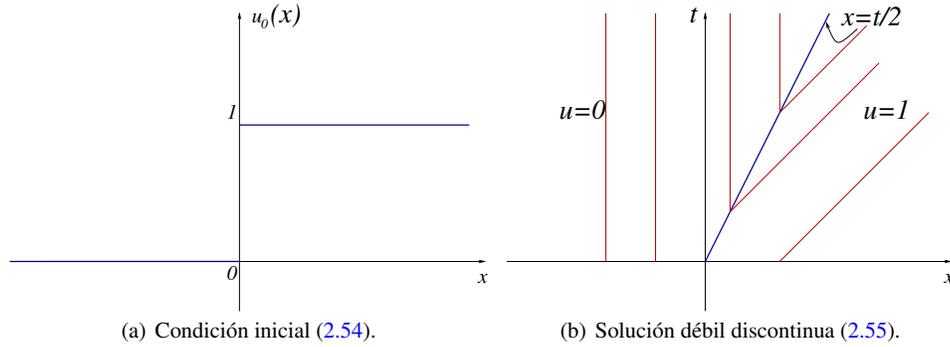
$$s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{0 - 1} = \frac{1}{2}.$$

De esta manera, una solución débil tipo onda de choque está dada por

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x > \frac{1}{2}t, \\ 1, & x < \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (2.53)$$

La solución es constante para  $x > \frac{1}{2}t$  y toma el valor  $u \equiv 0$ ; igualmente, en la región  $x < \frac{1}{2}t$  ésta toma el valor  $u \equiv 1$ . La discontinuidad está dada por la línea recta  $\{x - \frac{1}{2}t = 0\}$ . Es claro que esta solución es una solución débil (en este caso, discontinua) de (2.51) - (2.52). La solución (2.53) con su condición inicial (2.52) están representados en la figura 2.6.

Como vimos en la sección 2.3, la solución es constante a lo largo de curvas características de la forma



**Figura 2.7** (a) Condición inicial (2.54), y (b) la solución débil discontinua (2.55). La línea en azul representa la discontinuidad  $\{x = \frac{1}{2}t\}$  que se propaga con velocidad  $s = \frac{1}{2}$ . Las líneas en rojo son las curvas características de la forma  $x = ut + x_0$ , donde ahora la pendiente de la recta es  $u = 0$  a la izquierda de la discontinuidad, y  $u = 1$  a su derecha. Nótese que las características, en este caso, aparentan “salir” de la discontinuidad. Éste es un caso de una onda de choque sin significado físico.

$$x(t) = ut + x_0,$$

donde la pendiente  $u$  es el valor de la solución (en este caso, constante) a cada lado de la discontinuidad. Por lo tanto las curvas características son de la forma  $x = x_0$  a la derecha de la discontinuidad, y de la forma  $x = t + x_0$  a la izquierda de la misma. Se puede apreciar en la figura 2.6 que las características aparentan “entrar” en la discontinuidad.

Consideremos ahora la misma ley de conservación (2.51) pero ahora con condición inicial invertida,

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases} \tag{2.54}$$

es decir, donde ahora  $u_L = 1$  y  $u_R = 0$ . Notamos que una onda de choque se propaga con la misma velocidad

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{\frac{1}{2}(1)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{1 - 0} = \frac{1}{2},$$

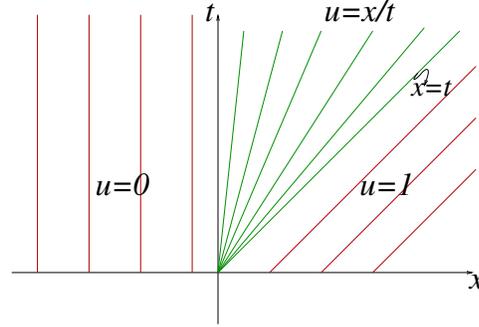
y que tiene la siguiente forma

$$u(x,t) = \begin{cases} 1, & x > \frac{1}{2}t, \\ 0, & x < \frac{1}{2}t. \end{cases} \tag{2.55}$$

Sin embargo, ahora las curvas características tienen pendiente  $u = 0$  del lado izquierdo del choque, y  $u = 1$  del lado derecho del mismo, de modo que las rectas aparentan “salir” de la discontinuidad  $x = \frac{1}{2}t$  como se aprecia en la figura 2.7.

La solución (2.55) es una solución débil del problema (2.51) con condiciones iniciales (2.54). Vamos a construir otra solución débil al mismo problema. Consideremos ahora la

**Figura 2.8** Solución en forma de *onda de rarefacción* (2.56) con condiciones iniciales (2.54), las mismas que en la figura 2.7. Nótese que la solución es continua para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , a pesar de que los datos iniciales son discontinuos. La solución es constante para  $x < 0$  y para  $x > t$ , mientras que en el intervalo  $0 \leq x \leq t$  toma el valor *autosimilar*  $u(x, t) = x/t$ , el cual está representado como el “ventilador” en la figura.



función

$$u(x, t) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/t, & 0 \leq x < t, \\ 1, & t < x, \end{cases} \quad (2.56)$$

para todo  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ . Esta nueva función satisface trivialmente la ecuación diferencial (2.51) en el interior de las regiones donde está definida, ya que es constante para  $x < 0$  y  $x \geq t$ , mientras que para  $0 < x < t$ ,

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \partial_t(x/t) + \partial_x\left(\frac{1}{2}x^2/t^2\right) = -x/t^2 + x/t^2 = 0.$$

La solución (2.56) está representada en la figura 2.8. La condición inicial (2.54) se satisface por construcción. Otra observación importante es que esta solución es continua en  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  a pesar de que los datos iniciales son discontinuos. Una solución de este tipo (2.56) es llamada una *onda de rarefacción*.

Vamos a demostrar que esta onda de rarefacción es solución débil al mismo problema. Aunque la prueba es un ejercicio sencillo de cálculo, es incluida aquí para convencer al lector de que la generalización inmediata de este tipo de ondas al caso de sistemas también constituyen soluciones débiles (lo cual se puede probar fácilmente con un argumento similar).

**Proposición 2.11.** *La onda de rarefacción (2.56) es una solución débil de (2.51) con condición inicial (2.54).*

*Demostración.* Tomemos una función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  y definamos

$$I := \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x)\phi(x, 0) dx =: \hat{I} + I_0,$$

donde  $\hat{I}$  es la integral en todo  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  e  $I_0$  es la segunda integral en  $\mathbb{R} \times \{t = 0\}$ . El soporte de  $\phi$  intersecta  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$  en una región  $\Omega$  que se divide en tres componentes  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  tal como se muestra en la figura 2.9. De este modo, tenemos que  $\hat{I} = I_1 + I_2 + I_3$ , donde

$$I_j = \int_{\Omega_j} u \phi_t + \frac{1}{2} u^2 \phi_x dx dt, \quad j = 1, 2, 3.$$

Dado que  $u \equiv 0$  en el interior de  $\Omega_1$ , claramente se tiene que  $I_1 = 0$ . Por el teorema de la divergencia en el dominio  $\Omega_j$  tenemos que

$$I_j = \int_{\partial\Omega_j} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_t \end{pmatrix} dS_{x,t} - \int_{\Omega_j} \phi (u_t + (\frac{1}{2} u^2)_x) dx dt,$$

para todo  $j = 1, 2$ . Dado que en el interior de cada  $\Omega_j$  la función satisface la ecuación diferencial  $u_t + (\frac{1}{2} u^2)_x = 0$  ( $u$  es constante en el interior de  $\Omega_3$ , y  $u = x/t$  es solución en el interior de  $\Omega_2$ ), la segunda integral es cero, obteniendo así

$$I_j = \int_{\partial\Omega_j} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_j dS_{x,t},$$

para todo  $j = 1, 2$ ; aquí  $\hat{n}_j = (\hat{n}_j^x, \hat{n}_j^t)^\top$  es la normal exterior a  $\partial\Omega_j$ . En vista de que  $\phi \equiv 0$  sobre  $\partial\Omega$ , las integrales de línea se reducen a

$$I_2 = \int_{\Omega \cap \{x=0\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_2 dS_{x,t} + \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_2 dS_{x,t},$$

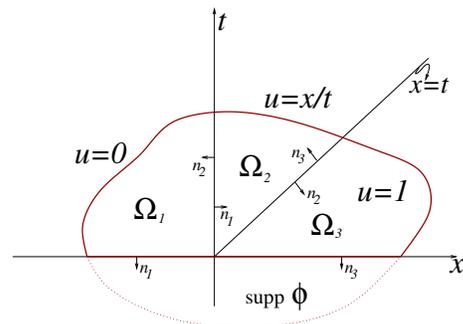
$$I_3 = \int_{\Omega \cap \{t=0\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_3 dS_{x,t} + \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} u^2 \\ u \end{pmatrix} \cdot \hat{n}_3 dS_{x,t}.$$

Sobre  $\{x = 0\} \cap \Omega$ , del lado de  $\Omega_2$ ,  $u$  toma el valor  $u_{|\{x=0\} \cap \Omega_2} = (x/t)|_{x=0} \equiv 0$ . Sobre  $\{x = t\} \cap \Omega$ , del lado de  $\Omega_2$ ,  $u$  toma el valor  $u_{|\{x=t\} \cap \Omega_2} = (x/t)|_{x=t} = 1$ , y la normal exterior es  $\hat{n}_2 = (n_2^x, n_2^t)^\top = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})^\top$ . Por ende,

$$I_2 = \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{dS_{x,t}}{\sqrt{2}} = - \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \frac{dS_{x,t}}{2\sqrt{2}}$$

Análogamente, sobre  $\{x = t\} \cap \Omega$ , del lado de  $\Omega_3$ ,  $u$  toma el valor  $u \equiv 1$  y la normal exterior es  $\hat{n}_3 = -\hat{n}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$ . Sobre  $\{t = 0\} \cap \Omega$ , del lado de  $\Omega_3$ ,  $u$  toma el valor  $u \equiv 1$  y la normal exterior es  $\hat{n}_3 = (0, -1)^\top$ . Por lo tanto

**Figura 2.9** Intersección entre el soporte de  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  y  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . La región se divide en tres componentes  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3$  con normales exteriores  $n_1, n_2$  y  $n_3$  respectivamente.



$$\begin{aligned}
I_3 &= \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{dS_{x,t}}{\sqrt{2}} + \int_{\Omega \cap \{t=0\}} \phi \left( \frac{1}{2} \right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dS_{x,t} \\
&= \int_{\Omega \cap \{x=t\}} \phi \frac{dS_{x,t}}{2\sqrt{2}} - \int_{\Omega \cap \{t=0\}} 1 \cdot \phi dS_{x,t}.
\end{aligned}$$

De esta manera

$$\hat{I} = I_1 + I_2 + I_3 = - \int_{\Omega \cap \{t=0\}} 1 \cdot \phi dS_{x,t}.$$

Parametrizando en  $\{t=0\}$  por  $dS_{x,t} = dx$ , y dado que la condición inicial es tal que  $u_0 = 1$  para  $x > 0$  y  $u_0 = 0$  para  $x < 0$ , reconocemos que

$$\hat{I} = - \int_0^{+\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_{-\infty}^0 u_0(x) \phi(x, 0) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} u_0(x) \phi(x, 0) dx = -I_0,$$

ya que  $\phi$  se anula fuera de  $\Omega$ . Así, hemos probado que  $I = \hat{I} + I_0 = 0$  para toda función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ , es decir, la onda de rarefacción (2.56) es una solución débil de (2.51) con condición inicial (2.54).  $\square$

Como corolario a esta observación obtenemos que las soluciones débiles no son únicas, ya que tanto la onda de rarefacción (2.56), como la onda de choque discontinua (2.55) son soluciones débiles de (2.51) con condición inicial (2.54). Más aún, es posible construir un número infinito de soluciones débiles del mismo problema. En efecto, sea cualquier  $\alpha \in [0, 1]$  y definamos las funciones (parametrizadas por  $\alpha$ )

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 0, & x < \frac{\alpha}{2}t, \\ \alpha, & \frac{\alpha}{2}t \leq x < \alpha t, \\ x/t, & \alpha t \leq x < t, \\ 1, & t \leq x. \end{cases} \quad (2.57)$$

Es posible demostrar que  $u_\alpha$  es una solución débil de (2.51) y (2.54) para cada  $\alpha \in [0, 1]$  (ver ejercicio 2.1).

La definición de solución débil es, por lo tanto, muy general. El siguiente ejemplo muestra un número infinito de soluciones incluso con condiciones iniciales suaves. Consideremos nuevamente la ecuación de Burgers no viscosa (2.51), pero ahora con condición inicial trivial  $u_0 \equiv 0$ . Existe una solución clásica trivial a este problema dada por  $u(x, t) \equiv 0$ . Sin embargo, para cada  $\beta > 0$ , la siguiente función

$$u_\beta(x, t) = \begin{cases} 0, & x < -\beta t, \\ -2\beta, & -\beta t < x < 0, \\ 2\beta, & 0 < x < \beta t, \\ 0, & \beta t < x, \end{cases} \quad (2.58)$$

es una solución débil no trivial del mismo problema de Cauchy, como el lector puede verificar directamente (ejercicio 2.2).

**Observación 2.12.** En este punto, es preciso hacer un comentario sobre la importancia de mantener la forma conservativa de las ecuaciones en lo que respecta a soluciones débiles. Consideremos una onda de choque para la ecuación de Burgers (2.51) en forma conservativa, que conecta a dos estados constantes  $u_L$  y  $u_R$ ,  $u_L \neq u_R$ , y que se propaga con una velocidad determinada por la condición de Rankine-Hugoniot

$$s = \frac{1}{2}(u_L + u_R). \quad (2.59)$$

Multiplicando la ecuación de Burgers (2.51) por  $u$  obtenemos una nueva ley de conservación para  $\frac{1}{2}u^2$  dada por

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0. \quad (2.60)$$

Si las soluciones son clásicas, las ecuaciones (2.51) y (2.60) son equivalentes. La ecuación (2.60) no es, sin embargo, válida para soluciones débiles de (2.51). De otra manera, una onda de choque que conecta a los mismos estados  $u_L$  y  $u_R$  tendría una velocidad dada por

$$s = \frac{\frac{1}{3}(u_R^3 - u_L^3)}{\frac{1}{2}(u_R^2 - u_L^2)} = \frac{2}{3} \frac{u_R^2 + u_R u_L + u_L^2}{u_R + u_L},$$

contradiendo (2.59). Es decir, una onda de choque no conserva  $u$  y  $\frac{1}{2}u^2$  simultáneamente.

Como hemos visto, la definición de solución débil es poco restrictiva, ya que no garantiza unicidad. Por lo tanto, es necesario considerar nuevos criterios de admisibilidad que restrinjan la clase de soluciones débiles, y que, posiblemente, garanticen su unicidad. En la siguiente sección discutiremos algunos de estos criterios, los cuales serán estudiados con detalle en el capítulo 3, sección 3.2.

#### 2.4.4. Condiciones de entropía

La no unicidad de soluciones débiles no es admisible ni desde el punto de vista matemático, ni desde el punto de vista físico. Para tener una teoría aceptable es necesario que la solución encontrada (si es el caso) sea única y continua con respecto a los datos iniciales, es decir, que el problema de Cauchy esté bien planteado, o que satisfaga:

1. Para datos iniciales dados en un cierto espacio  $Y$ , el problema de Cauchy admite una solución en el espacio  $Z$  que está contenido en  $L^\infty(\mathbb{R}; Y)$ .
2. Dicha solución es *única*.
3. El mapeo  $Y \rightarrow Z$  que lleva los datos iniciales a la solución es un mapeo *continuo*.

Si un problema satisface los puntos anteriores, se dice que está *bien planteado en el sentido de Hadamard* [92].

A la fecha, no se ha podido demostrar que el problema de Cauchy para un sistema general de leyes de conservación de la forma (2.4) está bien planteado en el sentido de Hadamard, es decir, no se cuenta con una teoría matemática completa. Sin embargo, como veremos más adelante, para garantizar unicidad de la solución en el caso escalar (y en el caso de algunos

sistemas) vamos a requerir la imposición de condiciones adicionales que en numerosos casos están motivadas por problemas de la física, esto es, sus definiciones provienen de mecanismos para seleccionar, de entre las numerosas posibles soluciones débiles a un sistema, aquella solución que sea físicamente admisible. En el caso de la ecuación de Burgers no viscosa, por ejemplo, es preciso encontrar condiciones que nos permitan distinguir entre las soluciones débiles (2.55) (onda discontinua) y (2.56) (onda de rarefacción), las cuales tienen la misma condición inicial (2.54). Hemos denominado a la solución discontinua (2.55) como una onda sin significado físico (ver figura 2.7), ya que no satisface ninguno de los criterios que mencionaremos a continuación y que estudiaremos con más detalle en el capítulo siguiente.

Observemos los frentes representados en las figuras 2.6 y 2.7. Aunque ambos son discontinuidades que se propagan con la misma velocidad, notamos que tienen propiedades geométricas diferentes. En la figura 2.6 se observa que las características aparentan “entrar” en la discontinuidad, mientras que en la figura 2.7 las características “salen” de la misma. Esta observación tiene la siguiente interpretación. Si las características salen del frente, la discontinuidad es inestable bajo perturbaciones, en el sentido de que existen puntos  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  tales que si dibujamos la característica que pasa por dichos puntos “de regreso” en el tiempo, nos cruzamos con la discontinuidad, violando así la unicidad de la solución. Sin embargo, en el caso en el que las características entran en la discontinuidad, para cada punto fuera de ella, la característica que pasa por dicho punto no intersecta ninguna otra para tiempos menores y corta al eje  $\{t = 0\}$  en algún punto  $(x_0, 0)$ . Estas observaciones motivan la siguiente definición.

**Definición 2.13 (condición de entropía de Lax [124], versión escalar).** Una discontinuidad propagándose con velocidad  $s$  que satisface la condición de Rankine-Hugoniot se dice que satisface la condición de entropía de Lax si

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L). \quad (2.61)$$

Notemos, en particular, que la onda de choque (2.53) satisface la condición de entropía de Lax,

$$0 = u_R = f'(u_R) < s = \frac{1}{2} < 1 = u_L = f'(u_L),$$

mientras que (2.55), no:

$$f'(u_L) = u_L = 0 < s = \frac{1}{2} < 1 = u_R = f'(u_R).$$

Por otra parte, si  $f$  es estrictamente convexa,  $f''(u) > 0$ , entonces (2.61) se reduce a pedir que  $u_L > u_R$ . Otra condición de entropía es la siguiente:

**Definición 2.14 (condición de entropía de Lax-Oleĭnik [124, 176]).**  $u$  es una solución entrópica si todas las discontinuidades satisfacen

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq s \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}, \quad (2.62)$$

para todo  $u$  entre  $u_L$  y  $u_R$ .

La condición (2.62) es más general que (2.61), ya que la primera implica la segunda. De hecho, si  $f$  es convexa entonces ambas condiciones son equivalentes. En el caso convexo tenemos otra condición de entropía, muy útil en aplicaciones, la cual se debe a Oleñnik [175, 176]:

**Definición 2.15 (condición de entropía de Oleñnik).** Si  $f$  es estrictamente convexa,  $f'' > 0$ , se dice que  $u$  es una solución entrópica si existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $a > 0$  y toda  $t > 0$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , se tiene que

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} < \frac{C}{t}. \quad (2.63)$$

La condición de Oleñnik se puede interpretar geoméricamente de la siguiente manera. Si fijamos  $t > 0$  y tomamos  $x$  real que va de  $-\infty$  a  $+\infty$ , un posible salto o discontinuidad en  $u$  sólo puede ser decreciente, es decir, en dirección de la discontinuidad. Ésta propiedad en la que los saltos pueden tener sólo una dirección, nos recuerdan cantidades con significado físico, como la *entropía*, que sólo pueden experimentar cambios con signo definido. Naturalmente, la solución (2.53) para la ecuación de Burgers no viscosa satisface la condición de Oleñnik, ya que,

$$\frac{1}{t} > \frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} = \begin{cases} 0, & \text{si } x+a < \frac{1}{2}t \text{ ó } \frac{1}{2}t \geq x \\ -1/a, & \text{si } x < \frac{1}{2}t \leq x+a, \end{cases}$$

para toda  $t > 0$  y toda  $a > 0$ ; mientras que la solución débil (2.55) viola la condición (2.63): en efecto, tomemos  $a = \varepsilon$  con  $0 < \varepsilon \ll 1$  suficientemente pequeño y sea el punto  $(x, t) = (1 - \frac{1}{2}\varepsilon, 2)$ . La condición (2.63) implica que

$$u(x+a, t) - u(x, t) = u(1 + \frac{1}{2}\varepsilon, 2) - u(1 - \frac{1}{2}\varepsilon, 2) = 1 \leq \frac{1}{2}C\varepsilon;$$

tomando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtenemos una contradicción.

**Observación 2.16.** Las condiciones de entropía descritas en esta sección fueron definidas sólo para leyes de conservación escalares ( $n = 1$ ). En la sección 3.2 se discuten con mayor detalle dichas condiciones y, en particular, se demuestra que son equivalentes entre sí en el caso estrictamente convexo, es decir, cuando  $f''(u) \geq \delta > 0$  para todo  $u$ . La consecuencia más importante de imponer una condición de entropía es la unicidad de la solución débil al problema de Cauchy en la clase de soluciones entrópicas.

## 2.5. Hiperbolicidad y simetrizabilidad

De la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, es un hecho conocido que la hiperbolicidad de un sistema de ecuaciones lineales de primer orden es necesaria para que el problema de Cauchy esté bien planteado (ver [103, 56]). De la misma manera, para obtener existencia de soluciones a sistemas de leyes de conservación es necesario definir lo que entendemos por hiperbolicidad del sistema (2.4). En el caso de una ecuación escalar lineal de la forma (2.31), con  $a > 0$  constante, vimos que ésta admitía una solución (de hecho, la solución) en forma

de onda viajera (2.33), donde  $u_0$  es la condición inicial. Igualmente, podemos preguntarnos bajo qué condiciones un sistema no lineal de leyes de conservación de la forma (2.4) admite soluciones en forma de onda viajera. Nos interesa que la solución sea de clase  $C^1$  fuera de una discontinuidad, por lo que podemos suponer que  $u$  es una solución suave. De este modo, lejos de una eventual discontinuidad, la solución debe satisfacer el siguiente sistema cuasilineal,

$$u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u) u_{x_j} = 0, \quad (2.64)$$

donde  $A^j(u) = Df^j(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  denota la matriz jacobiana de  $f^j$  con respecto de  $u$ , es decir,

$$A^j(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1^j(u) & \cdots & \partial_{u_n} f_1^j(u) \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n^j(u) & \cdots & \partial_{u_n} f_n^j(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Vamos a usar esta notación por el resto del capítulo. Supongamos que existen soluciones a (2.4) en forma de onda viajera, a saber,

$$u(x, t) = \bar{u}(x \cdot \xi - st), \quad (2.65)$$

donde  $\bar{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es una función continuamente diferenciable en una variable,  $\xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  es la dirección de propagación de la onda, y  $s \in \mathbb{R}$  es su velocidad. Tenemos, por lo tanto, un frente plano de la forma  $x \cdot \xi - st = 0$  en el espacio tiempo que se propaga con velocidad  $s$ . Sustituyendo (2.65) en el sistema cuasi-lineal (2.64) obtenemos

$$-s\bar{u}'(x \cdot \xi - st) + \sum_{j=1}^d \xi_j A^j(\bar{u}(x \cdot \xi - st)) \bar{u}'(x \cdot \xi - st) = 0. \quad (2.66)$$

Definamos la matriz

$$A(u, \xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j A^j(u). \quad (2.67)$$

La ecuación (2.66) sugiere que  $\bar{u}'$  debe ser un vector propio de la matriz  $A(\bar{u}, \xi)$  con valor propio  $s$ . En otras palabras, para tener velocidades reales de propagación, los valores propios de  $A(u, \xi)$  deben ser reales. Por ende, la definición de hiperbolicidad de un sistema de  $n$  ecuaciones estará relacionada con la posibilidad de encontrar  $n$  ondas (o frentes) distintos que se propagan en cualquier dirección  $\xi$  del espacio físico con una cierta velocidad característica determinada por un valor propio (real) de la matriz  $A(u, \xi)$ . El vector propio asociado especifica la dirección de la amplitud de dicha onda.

### 2.5.1. Sistemas hiperbólicos

**Definición 2.17.** El sistema de leyes de conservación (2.4) es llamado *hiperbólico* en un estado  $u \in \Omega$ , si para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ , la matriz  $A(u, \xi)$  definida en (2.67) es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ . En ese caso, los valores propios de  $A(u, \xi)$  son reales y semi-simples, que denotamos como

$$\lambda_1(u, \xi) \leq \dots \leq \lambda_n(u, \xi).$$

Si los valores propios son, además, todos distintos, entonces decimos que el sistema es *estrictamente hiperbólico* en  $u$ . Si el sistema es hiperbólico (respectivamente, estrictamente hiperbólico) para todo estado  $u \in \Omega$  entonces se dice que es *hiperbólico* (respectivamente, *estrictamente hiperbólico*) en todo  $\Omega$ . Los valores propios  $\lambda_j(u, \xi)$  de un sistema hiperbólico son llamados también *velocidades características* del sistema en el estado  $u \in \Omega$  en dirección  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ .

**Observación 2.18.** Un valor propio de una matriz  $A$  se denomina semi-simple si sus multiplicidades algebraica y geométrica coinciden<sup>4</sup>. Por lo tanto,  $A$  es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$  si y sólo si sus valores propios son todos reales y semi-simples. La condición de semi-simplicidad de los valores propios de un sistema hiperbólico tiene una interpretación física, pues garantiza que para cada valor propio con multiplicidad algebraica, digamos,  $k \geq 0$ , es posible encontrar  $k$  vectores propios linealmente independientes; dicho de otro modo, existen  $k$  ondas diferentes asociadas a dicha velocidad característica, tal y como lo sugiere la ecuación (2.66). En este sentido, un bloque simple de Jordan no es hiperbólico, pues es imposible completar una base de vectores propios asociados al valor propio. De este modo, la definición de hiperbolicidad se puede reformular como la propiedad de  $A(u, \xi)$  de tener todos sus valores propios reales y una base de  $n$  vectores propios linealmente independientes.

**Observación 2.19 (hiperbolicidad estricta).** Si el sistema es estrictamente hiperbólico entonces existen vectores propios  $r_1(u, \xi), \dots, r_n(u, \xi) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  que generan todo  $\mathbb{R}^n$  y satisfacen

$$A(u, \xi)r_j(u, \xi) = \lambda_j(u, \xi)r_j(u, \xi),$$

para toda  $1 \leq j \leq n$ , y todo  $u \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ , en donde  $\lambda_j \neq \lambda_k$  si  $j \neq k$ . Dado que toda matriz real y su adjunta tienen el mismo espectro, introducimos los vectores propios *izquierdos*,  $l_j(u, \xi) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , tales que,

$$l_j(u, \xi)A(u, \xi) = \lambda_j(u, \xi)l_j(u, \xi),$$

para toda  $1 \leq j \leq n$ , y todo  $u \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ . En este caso también se cumple la relación

$$l_k(u, \xi)r_j(u, \xi) = 0, \quad \text{si } k \neq j,$$

en virtud de que  $\lambda_k(l_k r_j) = l_k A r_j = l_k \lambda_j r_j = \lambda_j(l_k r_j)$  implica que  $(\lambda_k - \lambda_j)l_k r_j = 0$ , o simplemente,  $l_k r_j = 0$ , si  $k \neq j$ . Del mismo modo,  $l_j(u, \xi)r_j(u, \xi) \neq 0$  para todo  $u, \xi$  y  $j$ .

<sup>4</sup> recordemos que la multiplicidad geométrica es la dimensión del núcleo de  $A - \lambda I$ , mientras que la multiplicidad algebraica es el orden de  $\lambda$  como raíz del polinomio característico (véase [130]).

La siguiente proposición garantiza que la definición de hiperbolicidad es invariante bajo cambios suaves de coordenadas.

**Proposición 2.20.** *Sea  $u \in \Omega$ . Sea  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  un difeomorfismo suave sobre su rango (es decir, una función inyectiva y sobre, con derivadas continuas), con inversa  $\Phi^{-1}$ . Entonces, el sistema (2.4) es hiperbólico si y sólo si  $w = \Phi(u)$  satisface el sistema hiperbólico cuasi-lineal*

$$w_t + \sum_{j=1}^d \tilde{A}^j(w) w_{x_j} = 0, \quad (2.68)$$

en  $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$ , donde  $\tilde{A}^j(w) = D_u \Phi(\Phi^{-1}(w)) A^j(\Phi^{-1}(w)) D_w \Phi^{-1}(w)$  y  $A^j(u) = D_u f^j(u)$ , para todo  $u \in \Omega$ ,  $w \in \Phi(\Omega)$ .

*Demostración.* Sea  $u \in \Omega$ . La hiperbolicidad del sistema (2.4) en  $u$  está relacionada con la hiperbolicidad del sistema cuasi-lineal

$$u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u) u_{x_j} = 0.$$

$\Phi$  es invertible y suave. Por lo tanto, si  $w = \Phi(u)$  entonces tenemos que  $u_t = D_w \Phi^{-1}(w) w_t$ , y  $u_{x_j} = D_w \Phi^{-1}(w) w_{x_j}$ . Sustituyendo,

$$D_w \Phi^{-1}(w) w_t + \sum_{j=1}^d A^j(\Phi^{-1}(w)) D_w \Phi^{-1}(w) w_{x_j} = 0.$$

En vista de que  $(D_w \Phi^{-1}(w))^{-1} = D_u \Phi(\Phi^{-1}(w))$ , si multiplicamos la ecuación anterior por  $D_u \Phi(\Phi^{-1}(w))$  se obtiene (2.68). Para verificar que el sistema cuasi-lineal (2.68) es un sistema hiperbólico si y sólo si el sistema (2.4) es hiperbólico, basta con hacer notar que las matrices  $A(u, \xi)$  y

$$\tilde{A}(w, \xi) = \sum_{j=1}^d \xi_j \tilde{A}^j(w),$$

son similares, dado que  $\tilde{A}(\Phi(u), \xi) = D_u \Phi(u) A(u, \xi) (D_u \Phi(u))^{-1}$ ; por lo tanto, tienen el mismo espectro, y si una es diagonalizable sobre  $\mathbb{R}$ , la otra también. Los valores propios de  $\tilde{A}(w, \xi)$  están dados por  $\lambda_j(\Phi^{-1}(w), \xi)$ , donde  $\lambda_j(u, \xi)$  denota un valor propio de  $A(u, \xi)$ . Por lo tanto, el sistema (2.68) es también hiperbólico.  $\square$

**Observación 2.21.** En la práctica, esta proposición es muy útil, ya que en muchos casos es más fácil verificar hiperbolicidad de un sistema cuasi-lineal equivalente que hacerlo directamente, como veremos en algunos ejemplos concretos.

### 2.5.2. Ejemplos de sistemas hiperbólicos

Existe una gran cantidad de sistemas hiperbólicos que aparecen frecuentemente en mecánica de medios continuos. A continuación presentaremos sólo algunos de ellos, los cuales serán estudiados en secciones subsecuentes.

**Ejemplo 2.22 (ecuación escalar).** Toda ley de conservación escalar

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = 0$$

(donde cada función de flujo  $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$  es una función escalar y  $u \in \mathbb{R}$ ), es hiperbólica. Aquí existe una única velocidad característica real dada por

$$\lambda(u, \xi) = \sum_{j=1}^d \xi_j (d/d u) f^j(u), \quad \xi \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}.$$

**Ejemplo 2.23 (el sistema  $p$ ).** Recordemos sistemas de la forma (2.24) donde  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función no lineal dada, que satisface  $p'(v) < 0$ ,  $p''(v) > 0$ , y donde  $v, w \in \mathbb{R}$  y  $x \in \mathbb{R}, t \geq 0$ , llamados *sistemas  $p$* . La función de flujo es

$$f(u) = \begin{pmatrix} -w \\ p(v) \end{pmatrix}$$

donde  $u = (v, w)^\top$  es el vector de variables de estado. La matriz jacobiana del sistema está dada por

$$Df(v, w) = A(v, w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente  $\det(A(v, w) - \lambda I) = \lambda^2 + p'(v) = 0$ , por lo que los valores propios son

$$\lambda_1(v, w) = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2(v, w) = +\sqrt{-p'(v)},$$

Dado que  $p'(v) < 0$ , los valores propios son reales, distintos, y por lo tanto el sistema es estrictamente hiperbólico. Es fácil comprobar que los vectores propios de  $A$  asociados a  $\lambda_1$  y a  $\lambda_2$  son

$$r_1(v, w) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \quad y \quad r_2(v, w) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix},$$

respectivamente. Los vectores propios izquierdos son

$$l_1(v, w) = \begin{pmatrix} \sqrt{-p'(v)} & 1 \end{pmatrix}, \quad y \quad l_2(v, w) = \begin{pmatrix} -\sqrt{-p'(v)} & 1 \end{pmatrix}.$$

**Ejemplo 2.24 (ecuaciones de Euler en una dimensión).** El sistema de ecuaciones de Euler para un fluido compresible en una dimensión (2.10) también es un sistema hiperbólico si se cumplen ciertas hipótesis sobre la función de estado del fluido  $p = \hat{p}(\rho, e)$ . Supongamos que la función  $\hat{p}$  satisface:

$$\hat{p} > 0, \quad \hat{p}_\rho > 0, \quad \hat{p}_e > 0. \quad (2.69)$$

Vamos a aplicar la proposición 2.20 y verificar la hiperbolicidad de (2.10) probando que un sistema cuasilineal (equivalente para soluciones clásicas) es hiperbólico. Después de algunas manipulaciones algebraicas, es posible escribir (2.10) como el sistema cuasi-lineal equivalente

$$\begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\ e_t + ve_x + \frac{pv_x}{\rho} &= 0, \end{aligned} \quad (2.70)$$

donde  $p_x = \hat{p}_\rho \rho_x + \hat{p}_e e_x$ . El sistema (2.70) tiene la forma  $U_t + A(U)U_x = 0$  donde

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ e \end{pmatrix}, \quad y \quad A(U) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \hat{p}_\rho & v & \frac{1}{\rho} \hat{p}_e \\ 0 & \frac{1}{\rho} \hat{p}_e & v \end{pmatrix}.$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} \det(A(U) - \lambda I) &= (v - \lambda) \left( (v - \lambda)^2 - \rho^{-2} \hat{p}_e \hat{p}_\rho \right) - \hat{p}_\rho (v - \lambda) \\ &= (v - \lambda) \left( (v - \lambda)^2 - \rho^{-2} \hat{p}_e \hat{p}_\rho - \hat{p}_\rho \right). \end{aligned}$$

Denotemos

$$c^2 = \hat{p}_\rho + \frac{\hat{p}_e \hat{p}_\rho}{\rho^2} > 0, \quad (2.71)$$

la cual es una cantidad positiva en virtud de (2.69). A la raíz positiva  $c > 0$  se le conoce como *velocidad del sonido*. De este modo los valores propios de  $A(U)$ , o velocidades características del sistema, son

$$\lambda_1 = v - c < \lambda_2 = v < \lambda_3 = v + c,$$

por lo cual el sistema es estrictamente hiperbólico.

**Observación 2.25 (gas politrópico ideal).** Un ejemplo de ecuación de estado que satisface (2.69) es el de un gas ideal y politrópico. La presión termodinámica de un gas ideal está dada por  $p = R\rho\theta$ , donde  $R > 0$  es una constante y  $\theta$  es la temperatura. Si el volumen del gas es constante, el aumento en la energía interna es proporcional al aumento en la temperatura, por lo que

$$\frac{de}{d\theta} = c_v > 0.$$

La cantidad  $c_v$  es el calor específico a volumen constante. Si la presión se mantiene constante y el gas se expande mientras se añade energía, parte de la energía hace trabajo en la expansión, y la otra parte contribuye al aumento en energía interna. Por lo tanto,

$$\frac{d(e + p/\rho)}{d\theta} = c_p,$$

donde  $d(p/\rho)$  es el trabajo de expansión del gas. La cantidad  $c_p$  es el calor específico a presión constante. Para un gas politrópico se asume que  $c_v$  y  $c_p$  son constantes, por lo que

$$e = c_v \theta, \quad e + \frac{p}{\rho} = c_p \theta.$$

Se define la razón  $\gamma$  de calores específicos, también conocida como *constante adiabática*, como

$$\gamma := \frac{c_p}{c_v} > 1,$$

la cual es constante y mayor que uno para gases politrópicos<sup>5</sup>. De este modo, sustituyendo la ecuación de estado tenemos que

$$e = c_v \theta = c_p \theta / \gamma = (e + p/\rho) / \gamma.$$

Resolviendo para  $p$  obtenemos

$$p = \hat{p}(e, \rho) = (\gamma - 1)\rho e. \quad (2.72)$$

Claramente  $\hat{p}$  satisface (2.69) ya que  $\gamma > 1$ . Una ecuación de estado de este tipo es llamada una *ley gama* para un gas politrópico ideal (ver [40]).

La demostración de hiperbolicidad (mas no la hiperbolicidad estricta) de las ecuaciones de Euler en una dimensión (ejemplo 2.24) es extrapolable a varias dimensiones espaciales y se deja al lector como ejercicio (véase el ejercicio 2.3).

**Ejemplo 2.26 (hiperelastividad).** Otro sistema de ecuaciones en mecánica de medios continuos que es hiperbólico si se cumplen ciertas condiciones sobre la relación constitutiva del material, es el sistema que modela la dinámica de un material hiperelástico (2.20). Como se vió en la sección 2.2.4, si denotamos  $U_j$  como la columna  $j$  del gradiente de deformación  $U$ , y  $\sigma_j$  como la columna  $j$  del tensor de esfuerzos  $\sigma = \partial W / \partial U$ , las cantidades conservadas son

$$u = (U_1, U_2, U_3, V)^\top \in \mathbb{R}^{12},$$

con funciones de flujo asociadas,

$$f^1(u) = (V, 0, 0, \sigma_1(U))^\top, \quad f^2(u) = (0, V, 0, \sigma_2(U))^\top, \quad f^3(u) = (0, 0, V, \sigma_3(U))^\top,$$

y donde  $f^j \in \mathbb{R}^{12}$  para toda  $j = 1, 2, 3$ . Para cada par de índices  $1 \leq i, j \leq 3$ ,  $i, j$  fijos, definimos a las matrices  $B_i^j(U) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  componente a componente como

$$(B_i^j(U))_{lk} = \frac{\partial^2 W}{\partial U_{lj} \partial U_{ki}},$$

para cada  $1 \leq l, k \leq 3$ , es decir,

<sup>5</sup> por ejemplo, para un gas monoatómico,  $\gamma = 5/3$ ; para un gas diatómico,  $\gamma = 7/5$ .

$$B_i^j(U) = \begin{pmatrix} W_{U_{1j}U_{1i}} & W_{U_{1j}U_{2i}} & W_{U_{1j}U_{3i}} \\ W_{U_{2j}U_{1i}} & W_{U_{2j}U_{2i}} & W_{U_{2j}U_{3i}} \\ W_{U_{3j}U_{1i}} & W_{U_{3j}U_{2i}} & W_{U_{3j}U_{3i}} \end{pmatrix}.$$

Es posible demostrar (véase [71]) que las matrices jacobianas  $A^j(u) = Df^j(u) \in \mathbb{R}^{12 \times 12}$ ,  $j = 1, 2, 3$ , están dadas por

$$A^1(U) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^1(U) & B_2^1(U) & B_3^1(U) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^2(U) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ B_1^2(U) & B_2^2(U) & B_3^2(U) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^3(U) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ B_1^3(U) & B_2^3(U) & B_3^3(U) & 0 \end{pmatrix},$$

donde cada elemento de las matrices es un bloque de  $3 \times 3$ , e  $I$  denota a la matriz identidad de  $3 \times 3$ . Definimos ahora el *tensor acústico*:

$$N(\xi, U) := \sum_{i,j=1}^3 \xi_i \xi_j B_i^j(U) \in \mathbb{R}^{3 \times 3},$$

para cada  $\xi \in \mathbb{R}^3$  y cada  $U \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ .

**Definición 2.27 (condición de Legendre-Hadamard).** Decimos que la función de densidad de energía  $W$  satisface la *condición de Legendre-Hadamard* en  $U$  si el tensor acústico es definido positivo para todo  $\xi \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi \neq 0$ , es decir, si

$$\eta^\top N(\xi, U) \eta > 0,$$

para todo  $\eta \in \mathbb{R}^3$ ,  $\eta \neq 0$ .

**Lema 2.28.** Si  $W$  satisface la condición de Legendre-Hadamard en un estado  $U \in \mathbb{R}_+^{3 \times 3}$ , y además, los valores propios del tensor acústico  $N(\xi, U)$  son semi-simples, entonces el sistema (2.20) es hiperbólico en  $U$ .

*Demostración.* Para cada  $\xi \in \mathbb{R}^3$ , sea

$$A(\xi, U) = \sum_{j=1}^3 \xi_j A^j(U).$$

Por inspección de las expresiones de  $A^j(U)$ , notamos que éstas tienen un bloque de ceros de dimensión  $9 \times 9$ , y ceros en la diagonal. Por ende,  $\lambda = 0$  es un valor propio múltiple de  $A$ . Supongamos, por lo tanto, que  $\lambda \neq 0$  es un valor propio de  $A$ , es decir,

$$A(\xi, U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix}, \quad (2.73)$$

para cierto  $(\tilde{U}, \tilde{V})^\top := (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, \tilde{V})^\top \in \mathbb{R}^{12}$ . Haciendo las operaciones correspondientes vemos que

$$\begin{aligned} A^1(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\tilde{V} \\ 0 \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^1(U) \tilde{U}_i \end{pmatrix}, \\ A^2(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{V} \\ 0 \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^2(U) \tilde{U}_i \end{pmatrix}, \\ A^3(U) \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\tilde{V} \\ -\sum_{i=1}^3 B_i^3(U) \tilde{U}_i \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

y, por lo tanto, la ecuación espectral (2.73) se puede escribir como

$$\begin{aligned} \xi_i \tilde{V} + \lambda \tilde{U}_i &= 0, \quad i = 1, 2, 3, \\ \sum_{i,j=1}^3 \xi_j B_i^j(U) \tilde{U}_i + \lambda \tilde{V} &= 0. \end{aligned} \quad (2.74)$$

Multiplicando la segunda ecuación de (2.74) por  $\lambda \neq 0$  y sustituyendo la primera obtenemos

$$-\sum_{i,j=1}^3 \xi_j \xi_i B_i^j(U) \tilde{V} + \lambda^2 \tilde{V} = 0,$$

lo cual implica que  $N(\xi, U) \tilde{V} = \lambda^2 \tilde{V}$ , es decir,  $\lambda^2$  es un valor propio del tensor acústico, con vector propio  $\tilde{V}$ . Dado que  $W$  satisface la condición de Legendre-Hadamard, los valores propios de  $N(\xi, U)$  son todos reales y estrictamente positivos, por lo que

$$\lambda = \pm \sqrt{\kappa},$$

donde  $\kappa > 0$  es un valor propio de  $N(\xi, U)$ . De este modo los valores propios de  $A$  son

$$\lambda_0(\xi, U) = 0,$$

con multiplicidad algebraica igual a seis, y seis valores propios reales

$$\begin{aligned}\lambda_j^+(\xi, U) &:= +\sqrt{\kappa_j} > 0, \\ \lambda_j^-(\xi, U) &:= -\sqrt{\kappa_j} < 0,\end{aligned}$$

para  $j = 1, 2, 3$ , donde  $\kappa_j$  son los valores propios (semi-simples) de  $N(\xi, U)$ . Claramente,  $\lambda_0 = 0$  también es semi-simple ya que el núcleo de  $A(\xi, U)$  está generado por

$$(\tilde{U}, \tilde{V}) = (\tilde{U}_1, \tilde{U}_2, \tilde{U}_3, 0), \quad \text{donde} \quad \sum_{i,j=1}^3 \xi_j B_i^j(U) \tilde{U}_i = 0,$$

el cual tiene dimensión igual a seis (véase Dafermos [47], sección 3.3.3). De este modo, los valores propios del sistema son todos reales y semi-simples, y el sistema es hiperbólico (nótese, sin embargo, que no es estrictamente hiperbólico).  $\square$

### 2.5.3. Existencia local

La definición de hiperbolicidad no garantiza que el problema de Cauchy para (2.64) esté bien planteado, ni siquiera localmente en el tiempo, ni con condiciones iniciales suficientemente suaves (ver Serre [197]). Esta definición es, sin embargo, ampliamente utilizada por su invariancia bajo cambios suaves de coordenadas (proposición 2.20), y porque, para la clase especial de sistemas *simétricos*, el problema de Cauchy está bien planteado localmente. No se demostrará aquí el siguiente teorema, pero remitimos al lector a consultar el artículo original de Kato [105].

**Teorema 2.29 (Kato).** *Sea el problema de Cauchy para el sistema hiperbólico cuasi-lineal*

$$\begin{aligned}u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u) u_{x_j} &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x),\end{aligned}\tag{2.75}$$

donde  $u(x, t) \in \mathbb{R}^n$  y cada  $A^j(u)$  es simétrica para todo  $u$  y toda  $j$ . Si  $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n)$  con  $s > d/2 + 1$ , entonces existe un intervalo de tiempo finito  $[0, T]$ , con  $T > 0$ , tal que el problema de Cauchy (2.75) tiene una única solución clásica  $u \in C^1([0, T]; H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^n))$ .

Dado que en el caso de soluciones clásicas los sistemas (2.4) y (2.64) son equivalentes, la proposición 2.29 garantiza la existencia local y la unicidad de soluciones clásicas al sistema hiperbólico original de leyes de conservación (2.4), siempre y cuando cada matriz jacobiana  $A^j = Df^j$ , de cada función de flujo  $f^j$ , con  $j = 1, \dots, d$ , sea simétrica. Por la invariancia de la hiperbolicidad bajo transformaciones suaves en las variables independientes, basta con encontrar un cambio de coordenadas que “simetrice” al sistema original, con el fin de obtener existencia local de soluciones clásicas. Esto motiva el concepto de simetrizabilidad que exploraremos a continuación.

### 2.5.4. Sistemas simetrizables

Recordamos la notación para las matrices jacobianas de las funciones de flujo:  $A^j(u) = Df^j(u)$ , para todo  $u \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, d$ .

**Definición 2.30.** El sistema (2.4) es *simétrico* si las matrices jacobianas de los flujos son simétricas, es decir, si  $A^j(u)^\top = A^j(u)$  para todo  $u \in \Omega$ ,  $j = 1, \dots, d$ .

**Definición 2.31.** El sistema (2.4) es *simetrizable* si para todo  $u \in \Omega$  existe una matriz real  $S(u)$  definida positiva y simétrica (y por ende, invertible), tal que las matrices

$$\hat{A}^j(u) := S(u)A^j(u), \quad j = 1, \dots, d,$$

son simétricas para todo  $u \in \Omega$ . A la matriz  $S(u)$  se le conoce como un *simetrizador* del sistema (2.4).

**Lema 2.32.** Si el sistema (2.4) es simetrizable entonces es hiperbólico.

*Demostración.* Supongamos que (2.4) es simetrizable con simetrizador  $S(u)$ . Denotemos

$$\hat{A}(u, \xi) := S(u)A(u, \xi), \quad A(u, \xi) := \sum_{j=1}^d \xi_j A^j(u),$$

para  $u \in \Omega$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^d$ . De esta forma,  $\hat{A}$  es una matriz real y simétrica; por lo tanto, sus valores propios son reales. Dado que  $S(u)$  es definida positiva, real y simétrica, tenemos que  $w^*S(u)w > 0$  para todo  $w \in \mathbb{C}^n$ ,  $w \neq 0$ . Sea  $w \in \mathbb{C}^n$  un vector propio de  $A$  con valor propio  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $w \neq 0$ . Entonces tenemos que  $Aw = S^{-1}\hat{A}w = \lambda w$ , o bien,  $\hat{A}w = \lambda Sw$ . Sea  $r := w^*Sw > 0$ . Entonces,

$$\lambda r = w^*(\lambda Sw) = w^*\hat{A}w = (\hat{A}w)^*w = (\lambda Sw)^*w = \lambda^*w^*Sw = \lambda^*r.$$

Dado que  $r \neq 0$  tenemos que  $\lambda = \lambda^*$ , esto es,  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Así  $A(\xi, u) = S(u)^{-1}\hat{A}(u, \xi)$  tiene valores propios reales. Por otro lado, dado que  $S > 0$  y además, es simétrica, entonces existe una única  $S^{1/2} > 0$ , también simétrica, tal que  $S = S^{1/2}S^{1/2}$ . Dado que  $SA$  es simétrica, también  $M := S^{1/2}AS^{-1/2}$  es simétrica:

$$M^\top = (S^{-1/2}SAS^{-1/2})^\top = (S^{-1/2})^\top(SA)^\top(S^{-1/2})^\top = S^{-1/2}SAS^{-1/2} = M.$$

Toda matriz simétrica es diagonalizable, por lo que existe  $O$  invertible que diagonaliza a  $M$ . De este modo  $OS^{1/2}$  diagonaliza a  $A$  cuyo espectro es real. Por lo tanto el sistema original es hiperbólico.  $\square$

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.33.** Un sistema simétrico es aquél conocido como *la ecuación de Burgers compleja* [194],

$$\begin{aligned} v_t + \frac{1}{2}(w^2 - v^2)_x &= 0, \\ w_t + (vw)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.76)$$

el cual es un sistema de  $2 \times 2$  para  $u = (v, w)^\top \in \mathbb{R}^2$  y con función de flujo  $f(u) = (\frac{1}{2}(w^2 - v^2), vw)^\top = (f_1(v, w), f_2(v, w))^\top \in \mathbb{R}^2$ . Calculando el jacobiano de  $f$  obtenemos

$$Df(u) = \begin{pmatrix} -v & w \\ w & v \end{pmatrix},$$

el cual es simétrico. El sistema (2.76) resulta de considerar la ecuación escalar

$$\bar{u}_t + \tilde{f}(u)_x = 0, \quad (2.77)$$

donde  $u$  es una función compleja de  $(x, t)$ ,  $u(x, t) = v(x, t) + iw(x, t)$ ,  $\bar{u}$  denota el conjugado complejo de  $u$ , y  $\tilde{f}(u)$  es la función de variable compleja definida por

$$\tilde{f}(u) = \frac{1}{2}(w^2 - v^2) - i vw =: f_1(v, w) + i f_2(v, w).$$

Nótese que  $\tilde{f}$  es analítica ya que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann,  $f_{1w} = -f_{2v}$  y  $f_{1v} = f_{2w}$ . Tomando las partes real e imaginaria de la ecuación (2.77) obtenemos el sistema (2.76). Ecuaciones del tipo (2.77) aparecen en modelos de recuperación de petróleo (véase, por ejemplo, [194]).

Es posible generalizar este principio y obtener una familia de sistemas simétricos siguiendo el argumento de Lax [129]: sea  $f = f(z)$  una función analítica de variable compleja,  $z = x + iy \in \mathbb{C}$ , y sea  $u = u(z, t)$  una función compleja de  $(z, t) \in \mathbb{C} \times [0, +\infty)$ . Consideremos la ecuación diferencial parcial

$$\partial_t \bar{u} + \partial_z f(u) = 0, \quad (2.78)$$

donde  $\partial_z$  denota al operador  $\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)$ . Si denotamos nuevamente  $u = v(x, y, t) + iw(x, y, t)$  y  $f = f_1(v, w) + i f_2(v, w)$ , la ecuación (2.78) es equivalente al sistema de  $2 \times 2$  en dos variables espaciales

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_1(v, w) \\ -f_2(v, w) \end{pmatrix}_x + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_2(v, w) \\ f_1(v, w) \end{pmatrix}_y = 0.$$

Calculando los jacobianos de las funciones de flujo obtenemos

$$A^1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{1v} & f_{1w} \\ -f_{2v} & -f_{2w} \end{pmatrix}, \quad A^2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} f_{2v} & f_{2w} \\ f_{1v} & f_{1w} \end{pmatrix},$$

los cuales son claramente simétricos gracias a las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

**Ejemplo 2.34.** Consideremos el sistema de ecuaciones de Euler para un gas compresible en el caso *barotrópico* [229],

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ (\rho v)_t + (\rho v^2 + p)_x &= 0, \end{aligned} \quad (2.79)$$

que es un caso especial de las ecuaciones de Euler (2.10), en el que la energía interna  $e$  permanece constante. Aquí  $\rho > 0$ ,  $v$  y  $p$  son la densidad, velocidad y presión, respectivamente. Supongamos que  $p = \hat{p}(\rho)$  es la *ecuación de estado barotrópica*, donde  $\hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable que satisface la condición  $\hat{p}'(\rho) > 0$  (caso particular de la condición  $\hat{p}'_\rho > 0$  en (2.69) para  $e$  constante). Las variables conservadas y la función de flujo del sistema (2.79) son

$$u = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad y \quad f(u) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v^2 + \hat{p}(\rho) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_2^2/u_1 + \hat{p}(u_1) \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

respectivamente. Por lo tanto el jacobiano de  $f$  está dado por

$$A(u) = Df(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u_2^2/u_1^2 + \hat{p}'(u_1) & 2u_2/u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -v^2 + \hat{p}'(\rho) & 2v \end{pmatrix}. \quad (2.81)$$

Definiendo la matriz

$$S(u) = \begin{pmatrix} \hat{p}'(\rho) + v^2 & -v \\ -v & 1 \end{pmatrix},$$

obtenemos un simetrizador del sistema (2.79). En efecto, claramente  $S(u)$  es simétrica y además

$$S(u)A(u) = \begin{pmatrix} -v(\hat{p}'(\rho) - v^2) & \hat{p}'(\rho) - v^2 \\ \hat{p}'(\rho) - v^2 & v \end{pmatrix}$$

es una matriz simétrica.  $S(u)$  es definida positiva ya que para todo  $\eta \in \mathbb{R}^2$ ,  $\eta \neq 0$ , la forma cuadrática

$$\eta^\top S(u)\eta = \eta_1^2 \hat{p}'(\rho) + (v\eta_1 - \eta_2)^2 > 0,$$

es estrictamente positiva para todo  $(\rho, v)$  con  $\rho > 0$ . El sistema (2.79) es simetrizable y, por ende, hiperbólico.

Es posible demostrar que todo sistema hiperbólico en una dimensión espacial ( $d = 1$ ) es simetrizable (ejercicio 2.6). El siguiente ejemplo debido a Lax [125] muestra que para dimensiones  $d \geq 2$ , no todo sistema hiperbólico es simetrizable, por lo cual la implicación inversa del lema 2.32 es, en general, falsa.

**Ejemplo 2.35 (Lax).** Consideremos el siguiente sistema lineal de la forma

$$u_t + A_0 u_x + B_0 u_y = 0, \quad (2.82)$$

donde las matrices  $A_0$  y  $B_0$  son simétricas y constantes, dadas por

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

y  $u \in \mathbb{R}^3$ , es decir, tenemos un sistema con  $n = 3$  y  $d = 2$ . El sistema es hiperbólico, simétrico y lineal, con la propiedad de que cada combinación lineal de la forma  $\xi_1 A_0 + \xi_2 B_0$  con  $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $|\xi| = 1$  tiene como valores propios a  $-1$ ,  $0$  y  $1$ , lo cual puede ser verificado

fácilmente. Dado que el conjunto de matrices con valores propios reales y distintos es *abierto*, se deduce que para cualquier matriz real  $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  y para cada  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, todas las combinaciones lineales de  $A_0$  y  $B := B_0 + \varepsilon C$  también tienen valores propios reales y distintos. Por lo tanto todos los sistemas de la forma

$$u_t + A_0 u_x + (B + \varepsilon C) u_y = 0,$$

con  $\varepsilon > 0$  pequeño, son estrictamente hiperbólicos. La idea es mostrar que para una  $C$  apropiada, el sistema no es simetrizable.

Argumentando por contradicción, supongamos que existe un simetrizador  $S$ , definido positivo, simétrico, tal que  $SA_0$  y  $SB$  son simétricas. En particular,  $SA_0 S^{-1}$  y  $SBS^{-1}$  son simétricas. Sea  $Q$  la matriz unitaria, con  $Q^\top Q = I$ , que diagonaliza a  $SA_0 S^{-1}$ . Definamos  $T := S^{-1}Q$  y  $A := T^{-1}A_0 T$ . De este modo,  $A = Q^{-1}SA_0 S^{-1}Q$  es diagonal. Siendo  $A$  y  $A_0$  similares y diagonales, tienen los mismos valores propios y además, podemos suponer sin pérdida de generalidad<sup>6</sup> que  $A = A_0$ . Así, concluimos que

$$T^{-1}A_0 T = A_0,$$

es decir,  $A_0$  y  $T$  conmutan. De aquí se sigue que  $T$  tiene los mismos vectores propios que  $A_0$  y que, por lo tanto,  $T$  también es diagonal. De este modo denotamos

$$T = \text{diag}(t_1, t_2, t_3), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{31} & \cdots & b_{33} \end{pmatrix}.$$

Por otro lado sabemos que  $SBS^{-1}$  es simétrica. Así, siendo  $Q$  unitaria tenemos que  $T^{-1}BT = Q^\top SBS^{-1}Q$  es simétrica. En virtud de que  $T$  es diagonal, es fácil verificar que  $T^{-1}BT$  es simétrica si y sólo si

$$b_{21}b_{32}b_{13} = b_{12}b_{23}b_{31}.$$

Dado que  $B = B_0 + \varepsilon C$ , esta condición es equivalente a

$$c_{32}c_{13} + \varepsilon c_{21}c_{32}c_{13} = c_{23}c_{31} + \varepsilon c_{12}c_{23}c_{31}.$$

Es posible, sin embargo, escoger  $C$  de modo que esta condición no se satisface: por ejemplo, tomando  $c_{32}c_{13} \neq c_{23}c_{31}$  y  $\varepsilon$  suficientemente pequeño obtenemos una contradicción. En conclusión, el sistema es hiperbólico, pero no es simetrizable.

Esta elegante demostración se debe a Lax [125], y constituye el ejemplo clásico de que hiperbolicidad no implica simetrizabilidad (ver [18]).

<sup>6</sup> los valores propios no necesariamente están en el mismo orden, pero es posible escribir  $A$  en la forma de  $A_0$  mediante una transformación unitaria trivial de cambio de base que se incorpora a  $T$ .

## 2.6. Entropía y flujo de entropía

En esta sección se introducirá un concepto fundamental en la teoría de leyes de conservación: el de *par de entropía*. La definición de entropía que manejaremos se debe a Lax [128, 127] y es un tanto contra-intuitiva, ya que corresponde a una entropía *matemática*, la cual, usualmente, es el negativo de la entropía *física* (por ejemplo, la entropía termodinámica en el caso de las ecuaciones de Euler) de los sistemas bajo consideración.

### 2.6.1. Definición de función de entropía

Consideremos un sistema de leyes de conservación de la forma (2.4) con  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$ ,  $u(x, t) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  abierto y acotado,  $f^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase  $C^2$ ,  $j = 1, \dots, d$ , y con condición inicial,

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (2.83)$$

en  $t = 0$ . En diversos ejemplos en mecánica, las soluciones *clásicas* a sistemas del tipo (2.4) satisfacen una ecuación suplementaria de la forma

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^d \Psi^j(u)_{x_j} = 0, \quad (2.84)$$

donde  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa y  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{d \times 1}$ ,  $\Psi = (\Psi^1, \dots, \Psi^d)^\top$  es un vector de funciones de flujo, donde cada  $\Psi^j$  es una función escalar. A la función  $E(u)$  se le conoce como *función de entropía*, y a las funciones  $\Psi$  se les denomina *flujos de entropía*.

Supongamos que  $u$  es una solución de clase  $C^1$  de (2.4). Podemos entonces preguntarnos, ¿bajo qué condiciones satisface  $u$  una ley de conservación adicional de la forma (2.84)? Vamos a denotar a los gradientes de  $E$  y de  $\Psi^j$  como

$$DE(u) = (E_{u_1}, \dots, E_{u_n})^\top \in \mathbb{R}^{n \times 1}, \quad \text{y} \quad D\Psi^j(u) = (\Psi_{u_1}^j, \dots, \Psi_{u_n}^j)^\top \in \mathbb{R}^{n \times 1},$$

respectivamente, para cada  $j = 1, \dots, d$  y todo  $u \in \Omega$ . Si  $u$  es solución de clase  $C^1$  de (2.4) entonces multiplicando por  $DE^\top$  por la izquierda obtenemos

$$0 = DE(u)^\top (u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u) u_{x_j}) = E(u)_t + \sum_{j=1}^d DE(u)^\top A^j(u) u_{x_j}.$$

Por lo tanto si se cumplen las relaciones

$$DE(u)^\top A^j(u) = D\Psi^j(u)^\top, \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.85)$$

para todo  $u \in \Omega$ , entonces la ley de conservación (2.84) se satisface.

**Definición 2.36 (par de entropía).** Una función real y convexa  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  es denominada *función de entropía* del sistema (2.4) si existen  $d$  funciones  $\Psi^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j =$

$1, \dots, d$ , de clase  $C^1$ , llamadas *flujos de entropía* tales que se satisfacen (2.85) para todo  $u \in \Omega$ . Al par  $(E, \Psi)$  se le conoce como *par de entropía*. Nótese que, en particular, toda solución clásica de (2.4) satisface la ecuación (2.84).

**Observación 2.37.** (a) La relación (2.84) no es cierta para soluciones débiles de (2.4), ya que si  $u$  tiene una discontinuidad  $\Sigma$ , (2.84) induce una relación adicional de salto de tipo Rankine-Hugoniot de la forma

$$n_t[E(u)] + \sum_{j=1}^d n_j[\Psi^j(u)] = 0,$$

sobre  $\Sigma$ . En general, soluciones débiles no son de clase  $C^1$ , debido a la formación de ondas de choque, y la igualdad (2.84) no es válida. La idea, para soluciones débiles, es la de sustituir (2.84) por la *desigualdad*

$$E(u)_t + \sum_{j=1}^d \Psi^j(u)_{x_j} \leq 0, \quad (2.86)$$

en  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , en el sentido distribucional.

(b) En aplicaciones concretas, muchas veces la entropía *matemática*  $E(u)$  es el negativo de la entropía *física*. La desigualdad (2.86) significa que dicha entropía evoluciona en el tiempo de acuerdo al flujo  $\Psi$ , pero que también puede tener saltos de un solo signo.

(c) Análogamente a la definición de solución débil, dado un par de entropía  $(E, \Psi)$  podemos extender la desigualdad (2.86) a una desigualdad de tipo integral. Multiplicando (2.86) por una función de prueba<sup>7</sup>

$$\varphi \in \mathcal{D}_+ := \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0\},$$

e integrando por partes, tal como lo hicimos para definir soluciones débiles, llegamos a la relación integral

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) E(u_0) dx \geq 0. \quad (2.87)$$

(d) Notemos que las ecuaciones (2.85) son un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales (para cada  $j$ ), con dos funciones desconocidas:  $E$  y  $\Psi^j$ , el cual no tiene solución en general por estar sobredeterminado. No obstante, existen importantes ejemplos de sistemas para los cuales existen soluciones no triviales a (2.85), por ejemplo, las ecuaciones de Euler para gases compresibles. Existe también una clase general de ecuaciones donde existe siempre una solución a (2.85) y, en consecuencia, contamos con una función de entropía: los sistemas *simétricos* (ver lema 2.40 a continuación).

**Observación 2.38.** Tal vez el lector se pregunte: ¿cuál es la relación entre las “condiciones de entropía” para ecuaciones escalares que se definieron en la sección 2.4.4 con el concepto

<sup>7</sup> nótese que la clase de funciones de prueba que consideramos para la definición de solución débil es  $C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ , mientras que en (2.87) las funciones de prueba son funciones escalares *no negativas* (para conservar el sentido de la desigualdad).

de par de entropía de la definición 2.36? En el caso escalar, ambas definiciones son prácticamente equivalentes, y la relación entre ellas se estudiará detalladamente en la sección 3.2 del siguiente capítulo.

### 2.6.2. Entropía e hiperbolicidad

En esta sección vamos a relacionar los conceptos de entropía con la clase de sistemas simetrizables. Comenzaremos estudiando el caso particular de los sistemas simétricos, y para ello necesitamos un lema elemental de cálculo.

**Lema 2.39 (Lema de Poincaré).** *Si el sistema (2.4) es simétrico entonces existen funciones  $g^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ ,  $j = 1, \dots, d$ , tales que*

$$Dg^j(u) = f^j(u), \quad j = 1, \dots, d, \quad (2.88)$$

para todo  $u \in \Omega$ .

*Demostración.* Basta con probar que si  $\psi : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , de clase  $C^1$  es tal que  $D\psi(u)$  es simétrico, entonces podemos construir  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$  tal que  $Dg(u) = \psi(u)$ . Definimos

$$g(u) = \int_{u_*}^{u_j} \psi_j(u_1, \dots, \tilde{u}_j, \dots, u_n) d\tilde{u}_j.$$

De esta manera,  $g_{u_j} = \psi_j$ , y para  $k \neq j$ , dado que  $D\psi(u)$  es simétrico, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u_k} &= \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \psi_j}{\partial u_k}(u_1, \dots, \tilde{u}_j, \dots, u_n) d\tilde{u}_j \\ &= \int_{u_*}^{u_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial u_j}(u_1, \dots, \tilde{u}_j, \dots, u_n) d\tilde{u}_j \\ &= \psi_k(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) + C, \end{aligned}$$

con  $C$  constante, la cual podemos elegir  $C = 0$ . Por lo tanto,  $Dg(u) = \psi(u)$ , y  $g$  es de clase  $C^1$ .  $\square$

**Lema 2.40.** *Para un sistema simétrico, la función convexa  $E(u) = \frac{1}{2}|u|^2$  es una función de entropía asociada a los flujos de entropía  $\Psi^j(u) = -g^j(u) + u^\top f^j(u)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , donde  $g^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es tal que  $Dg^j = f^j$ .*

*Demostración.* Dado que el sistema es simétrico, aplicando el lema de Poincaré concluimos que existen  $d$  funciones  $g^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $Dg^j(u) = f^j(u)$  para cada  $j = 1, \dots, d$ . Claramente,  $DE(u) = u$ . Por lo tanto

$$D\Psi^j(u)^\top = -Dg^j(u)^\top + f^j(u)^\top + u^\top A^j(u) = DE(u)^\top A^j(u), \quad j = 1, \dots, d; \quad u \in \Omega.$$

$\square$

**Proposición 2.41 (Friedrichs-Lax [76]).** *Supongamos que (2.4) es un sistema de leyes de conservación donde  $u$  toma valores en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , abierto, acotado y conexo. Si existe una función de entropía  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  y estrictamente convexa, entonces el sistema es simetrizable. Asimismo, si  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  es una función estrictamente convexa de clase  $C^2$  tal que las matrices  $D^2E(u)A^j(u)$ ,  $j = 1, \dots, d$ , son simétricas para todo  $u \in \Omega$ , entonces  $E$  es una función de entropía del sistema (2.4).*

*Demostración.* Primero supongamos que  $E$  es una función de entropía estrictamente convexa y de clase  $C^2$ . Entonces existen flujos de entropía  $\Psi^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $j = 1, \dots, d$ , tales que las condiciones (2.85) se cumplen para todo  $u \in \Omega$ . Componente a componente, las relaciones (2.85) se escriben como

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \frac{\partial \Psi^j}{\partial u_k},$$

para todo  $1 \leq k \leq n$  y todo  $1 \leq j \leq d$ . Diferenciando con respecto a  $u_m$ , para cierto  $1 \leq m \leq n$ , tenemos

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \frac{\partial^2 \Psi^j}{\partial u_m \partial u_k} - \sum_{l=1}^n \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k} =: G_{k,m}^j(u). \quad (2.89)$$

Dado que  $\Psi^j$  y  $f^j$  son de clase  $C^2$  en un dominio conexo, las matrices  $G^j$  (cuya componente  $(k,m)$  está definida por (2.89)) son simétricas. Por lo tanto,  $G_{k,m}^j = G_{m,k}^j$  y el lado izquierdo de la ecuación (2.89) también es simétrico, es decir,

$$\sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m},$$

o lo que es lo mismo,  $(D^2E(u)Df^j(u))^\top = D^2E(u)Df^j(u)$ , para todo  $u \in \Omega$  y toda  $1 \leq j \leq d$ . Así,  $S(u) = D^2E(u)$  es un simetrizador para las ecuaciones (2.4). El sistema es, por lo tanto, simetrizable.

Ahora supongamos que las matrices  $D^2E(u)A^j(u)$  son simétricas. Definimos las funciones

$$g^j(u) = DE(u)^\top Df^j(u) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times n}.$$

Dado que las matrices  $D^2E(u)Df^j(u)$  son simétricas, tenemos que para toda  $1 \leq m, k \leq n$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_k^j}{\partial u_m} &= \frac{\partial}{\partial u_m} \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} \right) = \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_m \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_k} + \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_m \partial u_k} \\ &= \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 E}{\partial u_k \partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m} + \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial^2 f_l^j}{\partial u_k \partial u_m} = \frac{\partial}{\partial u_k} \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial E}{\partial u_l} \frac{\partial f_l^j}{\partial u_m} \right) = \frac{\partial g_m^j}{\partial u_k}. \end{aligned}$$

Por el lema de Poincaré, existen flujos de entropía  $\Psi^j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  tales que  $D\Psi^j = g^j$ , o equivalentemente,  $DE(u)^\top Df^j(u) = D\Psi^j(u)^\top$ . Por lo tanto  $(E, \Psi)$  es un par de entropía para el sistema (2.4).  $\square$

**Observación 2.42.** Nótese que la existencia de una función de entropía  $E$  estrictamente convexa implica que el sistema es simetrizable, y en consecuencia, hiperbólico. Aquí convexidad

estricta significa que la matriz Hessiana de  $E$  es definida positiva,  $D^2E(u) > 0$ , simétrica, y por ende actúa como simetrizador del sistema.

**Lema 2.43.** *Una condición necesaria y suficiente para que el sistema (2.4) posea una función de entropía  $E$  estrictamente convexa de clase  $C^2$ , es la existencia de una transformación dos veces diferenciable en las variables de estado  $u = \Theta(w)$ ,  $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ , tal que el sistema para  $w$  tiene la forma simétrica*

$$D_w\Theta(w)w_t + \sum_{j=1}^d A^j(\Theta(w))D_w\Theta(w)w_{x_j} = 0, \quad (2.90)$$

con  $D_w\Theta > 0$  definido positivo y simétrico, y con  $A^j(\Theta(w))D_w\Theta(w)$  simétrico para todo  $1 \leq j \leq d$  y todo  $w$ .

*Demostración.* Si  $E$  es una función de entropía estrictamente convexa, por la proposición 2.41 la matriz hessiana  $D^2E$  actúa como simetrizador del sistema. De este modo, el cambio de variables buscado es simplemente  $w = D_uE(u)$ .

Supongamos ahora que existe una transformación  $u = \Theta(w)$ ,  $\Theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \Omega$ , que satisface las hipótesis del lema. Por lo tanto las matrices  $D_w\Theta$ , y  $A^jD_w\Theta$ ,  $j = 1, \dots, d$ , son simétricas. Además, el simetrizador  $D_w\Theta$  es definido positivo. Por el lema de Poincaré existen funciones  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  y  $g^j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tales que

$$D_wq(w) = \Theta(w) = u, \quad D_wg^j(w) = f^j(\Theta(w)) = f^j(u), \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.91)$$

Dado que  $D_w\Theta$  es definido positivo, la función  $q$  es estrictamente convexa, lo cual implica, a su vez, que el mapeo  $w \mapsto D_wq$  es inyectivo. Por lo tanto podemos escribir  $w = \Theta^{-1}(u) =: w(u)$ . Definimos

$$E(u) = w(u)^\top u - q(w(u)), \quad \Psi^j(u) = w(u)^\top f^j(u) - g^j(w(u)), \quad j = 1, \dots, d.$$

Derivando y aplicando (2.91) obtenemos,

$$\begin{aligned} D_uE(u)^\top &= w(u)^\top + u^\top D_uw(u) - D_wq(w(u))^\top D_uw(u) = w(u)^\top, \\ D_u\Psi^j(u)^\top &= w(u)^\top D_u f^j(u) + f^j(u)^\top D_uw(u) - D_wg^j(w(u))^\top D_uw(u) \\ &= w(u)^\top D_u f^j(u), \end{aligned}$$

para todo  $1 \leq j \leq d$ , es decir, se cumplen las relaciones (2.85). Más aún, dado que  $D_uE(u) = w(u)$ , y por ende,  $D_uE(\Theta(w)) = w$  para cada  $w$ , por invertibilidad del mapeo obtenemos  $D_u^2E(\Theta(w))D_w\Theta(w) = I$ , es decir,  $D_u^2E(u) = (D_w\Theta)^{-1}(w(u))$ . Esto implica que  $D_u^2E$  es definido positivo (ya que  $D_w\Theta$  es definido positivo). Esto concluye la demostración.  $\square$

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.44.** (*El sistema  $p$ .*) Consideremos nuevamente el sistema  $p$  de la forma (2.24), donde suponemos que  $p'(v) < 0$ . Sea  $P = \int^v p$  una primitiva de  $p$ , tal que  $P' = p$ . La matriz jacobiana del sistema es

$$Df(v, w) = A(v, w) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}.$$

Multiplicando la primera ecuación de (2.24) por  $-p(v)$ , la segunda por  $w$ , y sumándolas, se obtiene

$$\left(\frac{1}{2}w^2 - P(v)\right)_t + (p(v)w)_x = 0.$$

Esta ecuación sugiere que el par  $(E, \Psi)$ , definido por

$$E(v, w) = \frac{1}{2}w^2 - P(v), \quad \Psi(v, w) = p(v)w,$$

es un par de entropía de (2.24). En efecto, si multiplicamos  $DE(v, w)^\top = (-p(v), w)^\top$  por la izquierda de la matriz jacobiana  $A(v, w)$  obtenemos  $D\Psi(v, w)^\top = (wp'(v), p(v))^\top$  y se satisface (2.85). Notamos que la matriz Hessiana de  $E$ ,

$$D^2E(v, w) = \begin{pmatrix} -p'(v) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

es diagonal con entradas positivas, y por lo tanto es definida positiva y la función  $E$  es estrictamente convexa.

## 2.7. Aproximación viscosa

En muchas situaciones de origen físico, los efectos debidos a disipación por viscosidad o conducción de calor son importantes. Dichos efectos se incorporan a las ecuaciones mediante términos de segundo orden que denominaremos *viscosos*. En el caso de un sistema genérico de leyes de conservación de la forma (2.4), el sistema viscoso asociado tiene la forma general

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = \sum_{i,k=1}^d (B^{ik}(\bar{\varepsilon}, u)u_{x_k})_{x_i}, \quad (2.92)$$

donde, para cierto  $m \geq 1$ ,

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m)^\top \in \mathbb{R}_+^m,$$

denota al vector de coeficientes de difusión e incluye a todos los parámetros de disipación,  $\varepsilon_i > 0$ , como pueden ser el coeficiente de viscosidad cinemática y el coeficiente de conducción de calor, entre otros. Las matrices de  $n \times n$ ,

$$B^{ik} \in C^2(\mathbb{R}^m \times \Omega; \mathbb{R}^{n \times n}), \quad i, k = 1, \dots, d,$$

son conocidas como *tensores de viscosidad*. Cuando los coeficientes de disipación tienen a cero,  $|\bar{\varepsilon}| \rightarrow 0^+$ , debemos obtener el sistema hiperbólico original (2.4), por lo cual generalmente se requiere que los tensores de viscosidad satisfagan la siguiente condición:

$$B^{ik}(0, u) = 0, \quad \forall u \in \Omega, \quad i, k = 1, \dots, d.$$

Un caso muy estudiado por su relevancia teórica, pero que no necesariamente tiene una interpretación física, es cuando

$$B^{ik}(\varepsilon, u) \equiv \varepsilon \delta_i^k I,$$

para todo par  $1 \leq i, k \leq d$ , para todo  $u \in \Omega$ , con  $\varepsilon > 0$  escalar, y donde  $I$  denota a la matriz identidad de  $n \times n$ . Este caso se conoce como modelo de *viscosidad idéntica o artificial*. Tras sustituir en (2.92) se obtiene el sistema

$$u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} = \varepsilon \Delta u, \quad (2.93)$$

es decir, el lado derecho del sistema (2.92) se convierte en el operador de Laplace. El sistema de ecuaciones es estrictamente parabólico o estrictamente disipativo, ya que el operador de Laplace es fuertemente elíptico. Asimismo, podemos generalizar este modelo si consideramos tensores de viscosidad que satisfacen la condición de elipticidad sobre el símbolo del operador, esto es, que el tensor

$$\sum_{i,k=1}^d \xi_i \xi_k B^{ik}(u, \bar{\varepsilon}) > 0 \quad (2.94)$$

sea definido positivo para todo  $u \in \Omega$  y para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ . A este caso se le conoce como modelo de *viscosidad estrictamente parabólica*. Claramente, el modelo con viscosidad idéntica es estrictamente parabólico. Si suponemos hiperbolicidad de los términos de primer orden, a los sistemas de la forma (2.92) donde los tensores de viscosidad satisfacen la condición (2.94) se les conoce como *sistemas hiperbólico-parabólicos o estrictamente disipativos*.

Existen, sin embargo, numerosos modelos de origen físico que no cumplen la condición de parabolicidad estricta, como, por ejemplo, el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido viscoso compresible que conduce calor:

$$\begin{aligned} \rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\ (\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p &= \operatorname{div}_x \left( \mu (\operatorname{div}_x v) I + \lambda (\nabla_x v + (\nabla_x v)^\top) \right), \\ \left( \rho \left( e + \frac{1}{2} |v|^2 \right) \right)_t + \operatorname{div} \left( \rho \left( e + \frac{1}{2} |v|^2 \right) v + p v \right) &= \operatorname{div}_x \left( \mu (\operatorname{div}_x v) v + \lambda (\nabla_x v + (\nabla_x v)^\top) v \right) + \kappa \Delta \theta, \end{aligned} \quad (2.95)$$

donde, al igual que en el caso de las ecuaciones de Euler (ver sección 2.2.1), las variables  $\rho$ ,  $v$ ,  $p$  y  $e$  denotan densidad de masa, campo de velocidades, presión y densidad de energía interna, respectivamente. Al considerar los efectos debidos a la viscosidad y la conducción de calor, se introducen los parámetros  $\mu > 0$  y  $\lambda > 0$  como coeficientes de viscosidad cinemática y volumétrica, respectivamente, y  $\kappa > 0$  es el coeficiente de conductividad térmica. La variable  $\theta = \theta(x, t)$  denota a la temperatura absoluta. Para una derivación completa de las ecuaciones de Navier-Stokes recomiendo consultar el libro de Dafermos [47].

El sistema de Navier-Stokes se puede escribir de la forma (2.92) (ver Zumbrun [234, 235]). Sin embargo, notamos que la primera ecuación (la de conservación de masa) no contiene términos disipativos. Es decir, esta ecuación es siempre hiperbólica. Esto implica que los tensores de viscosidad tienen un núcleo (ya que el primer renglón de cada uno de ellos debe

ser cero) y por lo tanto no satisfacen la condición de parabolicidad estricta. Para incluir este tipo de modelos se sustituye la condición (2.94) por la condición de que el tensor

$$\sum_{i,k=1}^d \xi_i \xi_k B^{ik}(u, \bar{\varepsilon}) \geq 0 \quad (2.96)$$

sea definido *semi*-positivo para todo  $u \in \Omega$  y para todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ . A este caso se le conoce como modelo con *viscosidad real o parcialmente parabólica* (también se les llama, en ocasiones, sistemas *incompletamente parabólicos* [91]). En la sección 2.7.2 discutiremos una condición adicional sobre los sistemas con viscosidad real, la cual es necesaria para garantizar que éstos sean disipativos en cierto sentido.

La motivación para el estudio de los sistemas de la forma (2.92) proviene de la mecánica de medios continuos y tiene un fuerte significado físico. En la naturaleza, todo material tiene una respuesta viscosa y conduce calor, en cierta medida. Los sistemas de leyes de conservación son modelos aproximados de sistemas con disipación. El lector se preguntará el porqué se dedica tanta atención a los sistemas hiperbólicos, los cuales, al final, son aproximaciones de sistemas con disipación más realistas. La respuesta radica, una vez más, en consideraciones de origen físico. Por ejemplo, en caso de la dinámica de un gas compresible los efectos por disipación son difíciles de cuantificar ya que los coeficientes de viscosidad son muy pequeños. Las soluciones (posiblemente discontinuas) a las ecuaciones de Euler aproximan bien las soluciones “reales” a las ecuaciones de Navier-Stokes en el caso compresible si los efectos de viscosidad son despreciables. Por lo tanto, en el límite de onda larga (es decir, lejos de una discontinuidad), la dinámica está gobernada por las soluciones al sistema hiperbólico. Entender la estructura hiperbólica de dichas soluciones es crucial. También existen razones de tipo práctico. En una implementación numérica de las soluciones a (2.92), por ejemplo, el término de disipación (usualmente muy pequeño) es incapaz de estabilizar el algoritmo numérico.

Las soluciones “viscosas” al sistema (2.92) dependen fuertemente de la elección de los tensores de viscosidad  $B^{ik}$ . ¿Hay más de una solución viscosa? ¿Cuál de ellas es la correcta? Determinar la forma de los tensores de viscosidad es, por ende, un asunto fundamental que está relacionado con la unicidad de soluciones débiles al sistema original de leyes de conservación. Al estudio de las soluciones viscosas cuando el coeficiente de viscosidad tiende a cero, y la relación de dicho límite (si existe) con soluciones débiles del sistema de leyes de conservación se le conoce como *método de aproximación viscosa*. Para ilustrarlo, primero estudiaremos el caso más simple posible: el de la ecuación de Burgers con viscosidad.

### 2.7.1. La ecuación de Burgers y la transformación de Hopf-Cole

La ecuación no lineal con difusión más simple que se conoce es la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx}, \quad (2.97)$$

donde  $\varepsilon > 0$  es constante, la cual se obtiene agregando un término lineal de difusión a la ecuación de transporte no lineal. En virtud de que las soluciones son regulares (ver la teoría de regularidad parabólica de Friedman [72]), (2.97) es equivalente a la ecuación

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = \varepsilon u_{xx},$$

que es la regularización con viscosidad artificial (laplaciano) de la ley de conservación (2.51) (ecuación de Burgers no viscosa). La ecuación (2.97) es también una versión simplificada del modelo para un fluido viscoso. Como en el caso de la ecuación del calor, el coeficiente de difusión  $\varepsilon > 0$  debe ser positivo para que el problema de valores iniciales esté bien planteado.

Las soluciones más simples a la ecuación (2.97) tienen forma de onda viajera  $u(x, t) = v(x - st)$ , donde  $s \in \mathbb{R}$  es la velocidad de propagación. Denotamos a la variable galileana como  $\xi = x - st$ , con  $' = d/d\xi$ . Sustituyendo en (2.97) obtenemos la ecuación diferencial

$$-sv' + vv' = \varepsilon v''.$$

Integrando en  $\xi$  obtenemos

$$k - sv + \frac{1}{2}v^2 = \varepsilon v', \quad (2.98)$$

donde  $k$  es una constante de integración. Dado que estamos interesados en soluciones acotadas, éstas deben aproximarse cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$  a las raíces  $v$  del polinomio del lado izquierdo de la ecuación (2.98). Para que dichas raíces sean reales se requiere que  $s^2 > 2k$ . Suponiendo que esto se cumple, escribimos la ecuación como

$$2\varepsilon v' = (v - u_L)(v - u_R), \quad (2.99)$$

donde  $u_L = s + \sqrt{s^2 - 2k} > u_R = s - \sqrt{s^2 - 2k}$ . Por lo tanto, buscamos soluciones acotadas de (2.99) con límites asintóticos  $v(\xi) \rightarrow u_R, u_L$  cuando  $\xi \rightarrow \pm\infty$ . Podemos suponer, por ende, que  $u_R < v < u_L$ . Es importante hacer notar que la velocidad de la onda viajera es el promedio de los límites asintóticos,

$$s = \frac{1}{2}(u_R + u_L),$$

la cual coincide con la velocidad determinada por las condiciones de Rankine-Hugoniot de la solución débil discontinua a la ecuación de Burgers no viscosa (ver expresión (2.59)), dada por la onda de choque:

$$\tilde{u}(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases} \quad (2.100)$$

con  $s = \frac{1}{2}(u_L + u_R)$ . Por lo tanto, la onda “viscosa”, solución de la ecuación de Burgers, viaja con la misma velocidad de propagación que la onda de choque (discontinua) de la ley de conservación (ecuación de Burgers no viscosa).

Integrando la ecuación (2.99) obtenemos

$$\frac{2\varepsilon}{u_L - u_R} \ln \left( \frac{u_L - v}{v - u_R} \right) = \xi - \alpha,$$

con  $\alpha \in \mathbb{R}$  una constante de integración que representa una traslación de la onda viajera ( $u(x,t) = v(x-st + \alpha)$  también es solución para cualquier  $\alpha \in \mathbb{R}$ ). Resolviendo para  $v$  obtenemos

$$\begin{aligned} v(\xi) &= u_R + \frac{u_L - u_R}{1 + \exp\left(\frac{(u_L - u_R)\xi}{2\varepsilon}\right)} \\ &= u_R + \frac{1}{2}(u_L - u_R)\left(1 - \tanh\left(\frac{(u_L - u_R)\xi}{2\varepsilon}\right)\right), \end{aligned}$$

que representa el perfil de la onda con límites  $v(\xi) \rightarrow u_L$  si  $\xi \rightarrow -\infty$ , y  $v(\xi) \rightarrow u_R$  si  $\xi \rightarrow +\infty$ . El resultado es una solución de tipo onda viajera con forma explícita

$$u(x,t) = u_R + \frac{1}{2}(u_L - u_R)\left(1 - \tanh\left(\frac{(u_L - u_R)(x-st)}{2\varepsilon}\right)\right), \quad (2.101)$$

monótona decreciente en la variable  $\xi = x - st$ , que viaja a la derecha con velocidad  $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$ , y que conecta a los estados  $u_L$  con  $u_R$  de izquierda a derecha.

En la figura 2.10 se muestran los distintos perfiles de  $v(\xi) = u(x-st)$ , tomando  $u_R = 0$ ,  $u_L = 1$ , para diferentes valores del coeficiente de difusión  $\varepsilon = 1, 0,5, 0,25, 0,05$ . Notamos que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la onda viajera tiende a la onda de choque no viscosa (2.100). A las soluciones (2.101) para cada  $\varepsilon > 0$  se les conoce como *perfiles viscosos de la onda de choque* (2.100).

La ecuación de Burgers (2.97) está dotada de una propiedad muy notable, a saber, la existencia de una transformación no lineal que la convierte en la ecuación del calor con difusión  $\varepsilon > 0$ . (Es decir, es una transformación que convierte una ecuación no lineal en una ecuación lineal.) Descubierta independientemente por Hopf [94] y Cole [37] dicha transformación se conoce como *la transformación de Hopf-Cole*, en su honor, y tiene la forma

$$u = -2\varepsilon \frac{w_x}{w}. \quad (2.102)$$

En efecto, es posible demostrar que  $w = w(x,t)$  satisface la ecuación del calor

$$w_t = \varepsilon w_{xx}. \quad (2.103)$$

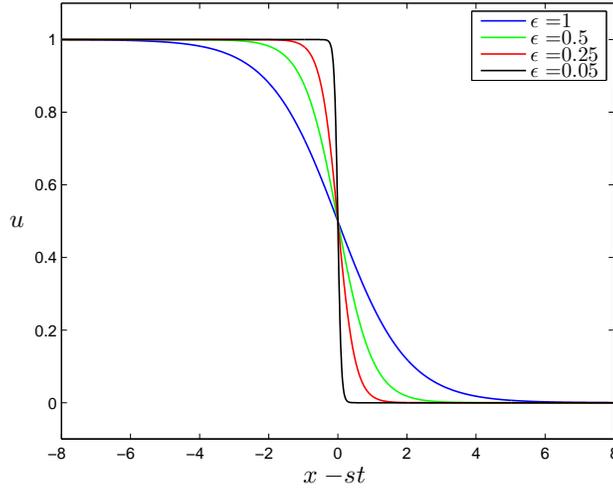
De esta forma tenemos el siguiente lema cuya demostración se deja al lector como ejercicio (ejercicio 2.11).

**Lema 2.45.** *Si  $w = w(x,t) > 0$  es una solución positiva de la ecuación del calor (2.103) entonces la función  $u = u(x,t)$ , definida por la transformación de Hopf-Cole (2.102), es solución de la ecuación de Burgers (2.97).*

El enunciado inverso del lema también es cierto, es decir, cada solución de la ecuación de Burgers proviene de una solución positiva de la ecuación del calor. Para confirmar esto, sea

$$\tilde{U}(x,t) = \int_0^x u(y,t) dy,$$

donde  $u = u(x,t)$  es solución de la ecuación de Burgers. Integrando esta última obtenemos



**Figura 2.10** Perfil de las soluciones de tipo onda viajera de la ecuación de Burgers, para diferentes valores del coeficiente de difusión  $\varepsilon > 0$ . Los estados asintóticos son  $u_L = 1$  y  $u_R = 0$ , por la izquierda y por la derecha, respectivamente. El eje de las abscisas corresponde a la variable galileana  $\xi = x - st$  mientras que el eje de las ordenadas representa al perfil  $u = u(x - st)$  determinado por la ecuación (2.101). Se observa que cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  el perfil se aproxima a la onda de choque (no viscosa)  $\tilde{u} = \tilde{u}(x, t)$ , dada por la ecuación (2.100), con  $u_R = 0$ ,  $u_L = 1$  y  $s = \frac{1}{2}$ .

$$\tilde{U}_t + \frac{1}{2}\tilde{U}_x^2 = \varepsilon\tilde{U}_{xx} + c(t),$$

donde  $c(t)$  es una constante de integración que depende de  $t$ . Definimos ahora

$$U(x, t) = \tilde{U}(x, t) - \int_0^t c(\tau) d\tau.$$

De este modo nos deshacemos de la constante de integración, ya que  $U_x = u$  y  $U$  satisface la ecuación

$$U_t = \varepsilon U_{xx} - \frac{1}{2}U_x^2.$$

Así, definiendo  $w = w(x, t) = \exp(-U(x, t)/2\varepsilon)$ , ésta es una solución positiva de la ecuación del calor, como el lector puede verificar fácilmente.

Consideremos ahora el problema de Cauchy para la ecuación de Burgers (2.97) con condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$  conocida. Gracias a la transformación de Hopf-Cole, este problema se reduce a resolver la ecuación de calor (2.103) con condición inicial

$$w(x, 0) = w_0(x) = \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon} \int_0^x u_0(y) dy\right). \quad (2.104)$$

Por el principio del máximo para la ecuación del calor, la solución  $w = w(x, t)$  es positiva para todo  $t > 0$  ya que la condición inicial es positiva. La solución está determinada por el

núcleo del calor mediante la fórmula

$$w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon t}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-y)^2/(4\epsilon t)} w_0(y) dy.$$

Aplicando nuevamente la transformación de Hopf-Cole obtenemos la solución al problema de Cauchy para (2.97) con condición inicial  $u(x, 0) = u_0(x)$ :

$$u(x, t) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-y}{t}\right) \exp(G(x, t, y)) dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp(G(x, t, y)) dy}, \quad (2.105)$$

donde

$$G(x, t, y) = -\frac{1}{2\epsilon} \int_0^y u_0(\zeta) d\zeta - \frac{(x-y)^2}{4\epsilon t}.$$

Para ilustrar la relación entre las soluciones de tipo onda viajera y la solución general al problema de Cauchy, consideremos como condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

con  $u_L > u_R$ . En este caso tenemos que

$$G(x, t, y) = -\frac{(x-y)^2}{4\epsilon t} - \begin{cases} -\frac{u_L y}{2\epsilon}, & y < 0, \\ -\frac{u_R y}{2\epsilon}, & y > 0. \end{cases}$$

La solución puede escribirse de la siguiente forma (ejercicio 2.12):

$$u(x, t) = u_R + \frac{u_L - u_R}{1 + h(x, t) \exp\left(\frac{(u_L - u_R)(x - st)}{2\epsilon}\right)}, \quad (2.106)$$

donde  $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$ , y

$$h(x, t) = \frac{\int_{-(x-u_R t)/\sqrt{4\epsilon t}}^{+\infty} e^{-\theta^2} d\theta}{\int_{(x-u_L t)/\sqrt{4\epsilon t}}^{+\infty} e^{-\theta^2} d\theta}.$$

Para  $x/t$  fijo, con  $u_R < x/t < u_L$ ,  $h(x, t) \rightarrow 1$  si  $t \rightarrow +\infty$ , por lo que la solución al problema de Cauchy con condición inicial de salto tiende a la onda viajera (2.101) que conecta a ambos estados con la misma velocidad de propagación.

## 2.7.2. La clase de Kawashima-Shizuta

La elección de los tensores de viscosidad  $B^{ik}$  que satisfacen la condición de parabolicidad estricta (2.94) está fuertemente motivada desde el punto de vista matemático, en virtud de que el término parabólico induce disipación estricta y el problema de Cauchy para el sistema (2.92) está bien planteado [47]. El sistema de Navier-Stokes en el caso compresible, sin embargo, es un ejemplo motivado por la física que nos obliga a prestar atención a sistemas con viscosidad real. En estos casos, establecer la existencia y unicidad de la solución al problema de Cauchy es más complicado, y la condición (2.96) de semi-positividad no es suficiente. Por lo tanto, es necesario caracterizar a los tensores de viscosidad que, a pesar de tener un núcleo, disipan en cierto sentido a las ondas hiperbólicas asociadas a los campos característicos del sistema no viscoso subyacente (2.4), mediante la incorporación de una *condición de acoplamiento genuino*. Los sistemas que satisfacen dicha condición, así como otras condiciones estructurales que detallaremos a continuación, se dice que pertenecen a *la clase de Kawashima-Shizuta* [107, 108, 206]. Las hipótesis que definen esta clase de sistemas son las siguientes:

**Hipótesis 1 (Regularidad).**  $f^j \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ,  $B^{ik} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ , para todo  $1 \leq j \leq d$ ,  $1 \leq i, k \leq d$ .

**Hipótesis 2 (Simetrizabilidad).** Existe un simetrizador  $S_0 \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ , simétrico, definido positivo, tal que  $S_0(u)A^j(u)$  y  $S_0(u)B^{ik}(u)$  son simétricas para todo  $u \in \Omega$  y para cualesquiera  $0 \leq j \leq d$ ,  $1 \leq i, k \leq d$ . Además, la matriz  $\sum_{i,k=1}^d S_0(u)B^{ik}(u)\xi_i\xi_k$  es definida semi-positiva para toda  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ ,  $u \in \Omega$ .

**Hipótesis 3 (Acoplamiento genuino).** Para todo  $u \in \Omega$  y todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ , no existe vector propio de  $\sum_{j=1}^d \xi_j A^j(u)$  en  $\ker(\sum_{i,k=1}^d \xi_i \xi_k B^{ik}(u))$ .

**Hipótesis 4 (Estructura de bloque).** Para todo  $u \in \Omega$  y todo  $\xi \in \mathbb{R}^d$ ,  $\xi \neq 0$ , el núcleo de  $\sum_{i,k=1}^d \xi_i \xi_k B^{ik}(u)$  es independiente de  $u$ .

La hipótesis 1 simplemente expresa que las funciones  $f^j, B^{ik}$  son suficientemente suaves. La hipótesis 2 garantiza, por un lado, que el sistema no viscoso subyacente (2.4) es simetrizable, y por ende, hiperbólico. También nos indica que los tensores de viscosidad son definidos semi-positivos. La hipótesis 3 es la más importante, pues implica que, al menos a nivel lineal, las ondas hiperbólicas del sistema (2.4) en cualquier dirección son apropiadamente atenuadas por los términos de viscosidad. La hipótesis 4 es una condición suficiente para que el sistema hiperbólico-parabólico se pueda escribir en forma *normal* (ver Kawashima y Shizuta [108] para mayor información); asimismo, constituye una hipótesis de tipo técnico que juega un rol importante en el análisis de estabilidad de los perfiles viscosos de ondas de choque (ver Zumbrun [234, 235], y Mascia y Zumbrun [169, 167, 168]).

En la literatura, es común que se refieran a la hipótesis 3 simplemente como la condición de Kawashima (ver Dafermos [47] y Villani [223]). Dicha condición apareció en la tesis doctoral de Kawashima [107] y fue posteriormente estudiada por Kawashima y Shizuta [108, 206]. Para ilustrar su significado físico, consideremos el sistema no viscoso (2.4). Por la discusión en la sección 2.5, ondas viajeras del sistema hiperbólico que se propagan en dirección  $N \in \mathbb{R}^d$ ,

$N \neq 0$ , están asociadas a los campos característicos de la matriz  $A(u, N) = \sum N_j A^j(u, N)$ . Sea  $u_* \in \Omega$  un estado constante fijo, y sea  $N$  cualquier dirección de propagación. Denotemos a un vector propio de  $A(u_*, N)$  como  $r_l(u_*, N) \in \mathbb{R}^n$ , para cierto  $1 \leq l \leq n$ , y a su valor propio como  $\lambda_l(u_*, N) \in \mathbb{R}$ . Entonces la onda plana

$$\Phi(x, t) = \varphi(x \cdot N - \lambda_l(u_*, N)t) r_l(u_*, N),$$

donde  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es cualquier función escalar suave, es solución del siguiente sistema linealizado alrededor del estado  $u_*$ ,

$$u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u_*) u_{x_j} = 0.$$

A esta solución le llamamos *onda hiperbólica*. Está asociada al campo característico  $1 \leq l \leq n$  y se propaga en dirección de  $N$ . Linealizamos el sistema viscoso (2.92) alrededor del estado  $u_* \in \Omega$ . El resultado es el sistema lineal

$$u_t + \sum_{j=1}^d A^j(u_*) u_{x_j} = \sum_{i,k=1}^d (B^{ik}(u_*, \bar{\epsilon}) u_{x_k})_{x_i}. \quad (2.107)$$

Sustituyendo la onda viajera obtenemos

$$\varphi'(\theta) \left( -\lambda_l(u_*, N) r_l(u_*, N) + A(u_*, N) r_l(u_*, N) \right) = \varphi''(\theta) \sum_{i,k=1}^d B^{ik}(u_*, \bar{\epsilon}) N_i N_k r_l(u_*, N),$$

donde  $\theta = \theta(x, t) = x \cdot N - \lambda_l(u_*, N)t$  es el tren de onda. Claramente el lado izquierdo es cero. Así, notamos que si la condición de acoplamiento genuino (hipótesis 3) es violada para cierto vector propio  $r_l(u_*, N)$ , entonces el sistema (2.107) admite soluciones de tipo onda viajera hiperbólicas que no son atenuadas por la difusión, ya que el lado derecho es cero en ese caso (independientemente de la función  $\varphi$ ). Si incluso a nivel lineal los tensores de viscosidad no disipan las ondas del sistema hiperbólico, no podemos esperar que el sistema no lineal sea efectivamente disipativo. Cabe mencionar que el sistema de Navier-Stokes para el caso compresible, así como otros sistemas de origen físico (magnetohidrodinámica con viscosidad o sistemas con relajación) pertenecen a la clase de Kawashima-Shizuta (ver [108, 206, 234] y las referencias que ahí se mencionan).

### 2.7.3. El límite de aproximación viscosa

A continuación vamos a explorar la relación entre las soluciones a un sistema viscoso (2.92) y a su límite (si existe) cuando los coeficientes de viscosidad tienden a cero. Demostraremos que si dicho límite existe entonces debe ser una solución débil al sistema de leyes de conservación que, además, satisface la desigualdad de entropía (2.87). En otras palabras, la condición de entropía y la existencia de una solución que sea el límite de una aproxima-

ción viscosa, son conceptos que están claramente relacionados entre sí. De esta manera, el límite de aproximación viscosa, si existe, nos permite seleccionar la solución débil de (2.38) y (2.39) físicamente admisible en cierto sentido.

### El límite con viscosidad idéntica

Para cada  $\varepsilon > 0$  consideremos el problema de Cauchy para el sistema parabólico con viscosidad idéntica,

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} &= \varepsilon \Delta u, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.108)$$

es decir, resolver el sistema (2.93) con la misma condición inicial (2.39) que el sistema hiperbólico subyacente de leyes de conservación (2.38). Por la teoría de regularidad parabólica (véase Friedman [72]), es un hecho conocido que si la condición inicial satisface  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d; \Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \Omega)$  entonces el problema de Cauchy (2.108) tiene, para cada  $\varepsilon > 0$ , una única solución clásica  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$ , con  $u^\varepsilon \in C^2(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R}^d \times [0, +\infty))$ , que satisface el principio del máximo,

$$\|u^\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, +\infty))} \leq C,$$

uniformemente en  $\varepsilon > 0$ , para cierta constante  $C > 0$ .

Adicionalmente, vamos a suponer que  $u^\varepsilon \rightarrow u$  c.d.s. en  $\mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Finalmente supondremos que el sistema hiperbólico subyacente (2.38) admite un par de entropía  $(E, \Psi)$ , con  $E$  de clase  $C^2$ , estrictamente convexa.

**Teorema 2.46.** *Bajo las hipótesis anteriores, el límite*

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x, t), \quad \text{c.d.s. en } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, +\infty),$$

es una solución débil del sistema hiperbólico (2.38) con condición inicial (2.39) que, además, satisface la desigualdad de entropía

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) E(u_0(x)) dx \geq 0, \quad (2.109)$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}_+ = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0\}$ .

*Demostración.* Sea una función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$ . Dado que  $u^\varepsilon$  es solución suave de (2.108), multiplicando por  $\phi$  e integrando obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \phi \cdot f^j(u^\varepsilon)_{x_j} dx dt = \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot \Delta u^\varepsilon dx dt.$$

Dado que  $\phi$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ , integrando por partes se tiene que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t \cdot u^\varepsilon + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \cdot f^j(u^\varepsilon) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u^\varepsilon(x,0) dx = -\varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \phi \cdot u^\varepsilon dxdt.$$

Como la condición inicial de la solución viscosa es  $u^\varepsilon(x,0) = u_0(x)$ , y por el lema A.3 (ver Apéndice A), tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se obtiene

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \phi_t \cdot u + \sum_{j=1}^d \phi_{x_j} \cdot f^j(u) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x,0) \cdot u_0(x) dx = 0.$$

Además, por el principio del máximo claramente se tiene que  $\|u\|_{L^\infty} \leq C$ . Esto demuestra que  $u$  es solución débil de (2.38) y (2.39).

Similarmente, sea  $(E, \Psi)$  un par de entropía de clase  $C^2$  con  $E$  estrictamente convexa. Multiplicando el sistema de ecuaciones en (2.108) por  $DE(u^\varepsilon)^\top$  y dado que  $u^\varepsilon$  es solución suave, tenemos que

$$DE(u^\varepsilon)^\top u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^d DE(u^\varepsilon)^\top f^j(u^\varepsilon)_{x_j} = E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} = \varepsilon DE(u^\varepsilon)^\top \Delta u^\varepsilon.$$

Escribiendo

$$\Delta E(u^\varepsilon) = (\nabla u^\varepsilon)^\top D^2 E(u^\varepsilon) \nabla u^\varepsilon + DE(u^\varepsilon)^\top \Delta u^\varepsilon,$$

y usando el hecho de que  $E$  es estrictamente convexa ( $D^2 E$  es definida positiva) llegamos a la desigualdad

$$E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} \leq \varepsilon \Delta E(u^\varepsilon).$$

Multiplicando por una función de prueba  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  con  $\varphi \geq 0$ , e integrando por partes en  $\mathbb{R}^d \times [0, +\infty)$ , obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t E(u^\varepsilon) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u^\varepsilon) dxdt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x,0) E(u_0(x)) dx \geq -\varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \Delta \varphi E(u^\varepsilon) dxdt.$$

Por el lema A.3, las integrales convergen en sentido de distribuciones cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , y de esta forma obtenemos la desigualdad (2.109). Esto concluye la prueba del teorema.  $\square$

### El límite con viscosidad real

Análogamente al caso con viscosidad idéntica, consideremos el problema de Cauchy para el sistema con viscosidad real (2.92) que pertenece a la clase de Kawashima-Shizuta (así aseguramos que el sistema es disipativo en cierto sentido), y nos planteamos el problema de convergencia de las soluciones viscosas cuando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Éste es un asunto delicado: si la sucesión viscosa converge fuertemente podríamos esperar, equivocadamente, que la familia es compacta. Asimismo, si la sucesión converge en un sentido muy débil entonces podríamos perder información, al tomar el límite, sobre la solución al sistema hiperbólico. Para rela-

cionar el límite (si existe) con la solución débil y entrópica del sistema no viscoso original debemos especificar un criterio suficiente bajo el cual los tensores de viscosidad disipan entropía. Para mayor información sobre condiciones necesarias (mínimas) que garantizan el establecimiento de dicha relación, remitimos al lector al artículo de Serre [201].

Por simplicidad, supongamos que los tensores de viscosidad tienen la forma

$$B^{ik}(\bar{\varepsilon}, u) = \varepsilon B^{ik}(u), \quad 1 \leq i, k \leq d, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0,$$

para todo  $u \in \Omega$ , donde los tensores  $B^{ik} \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$  son tales que el sistema pertenece a la clase de Kawashima-Shizuta. Notamos que  $\varepsilon > 0$  es un escalar, que contiene, en módulo, a las intensidades de todos los coeficientes de viscosidad del sistema. Así, consideremos el siguiente problema de Cauchy:

$$\begin{aligned} u_t + \sum_{j=1}^d f^j(u)_{x_j} &= \varepsilon \sum_{i,k=1}^d (B^{ik}(u)u_{x_k})_{x_i}, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \quad (2.110)$$

donde  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d; \Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \Omega)$ . También vamos a suponer que el dato inicial tiene un límite cuando  $|x| \rightarrow +\infty$ :

$$u_0(x) \rightarrow u_* \in \Omega, \quad \text{exponencialmente rápido si } |x| \rightarrow +\infty, \quad (2.111)$$

donde  $u_* \in \Omega$  es un estado constante.

A continuación observamos que, si  $(E, \psi)$  es un par de entropía asociado al sistema hiperbólico subyacente (2.38), con  $E$  de clase  $C^2$  estrictamente convexa, y si  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$  es una solución suave del problema de Cauchy (2.110), entonces

$$\begin{aligned} E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} &= DE(u^\varepsilon)^\top u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^d D\psi^j(u^\varepsilon)^\top u_{x_j}^\varepsilon \\ &= DE(u^\varepsilon)^\top \left( u_t^\varepsilon + \sum_{j=1}^d A^j(u^\varepsilon)u_{x_j}^\varepsilon \right) \\ &= \varepsilon DE(u^\varepsilon)^\top \sum_{i,k=1}^d (B^{ik}(u^\varepsilon)u_{x_k}^\varepsilon)_{x_i} \\ &= \varepsilon \sum_{i,k=1}^d \left( DE(u^\varepsilon)^\top B^{ik}(u^\varepsilon)u_{x_k}^\varepsilon \right)_{x_i} - \varepsilon \sum_{i,k=1}^d u_{x_i}^\varepsilon \top D^2 E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u_{x_k}^\varepsilon \end{aligned} \quad (2.112)$$

Para asegurar disipación, el segundo término de (2.112) debe ser no negativo, por lo cual requerimos que la forma cuadrática asociada a  $D^2 E B^{ik}$  sea definida semipositiva. Para que dicho término sea el término dominante, vamos a imponer la siguiente condición suficiente:

**Definición 2.47 (condición de disipación de entropía).** Para cualesquiera vectores  $\omega_i \in \mathbb{R}^d$ ,  $1 \leq i \leq d$ , y para todo  $u \in \Omega$ , se debe cumplir

$$\sum_{i,k=1}^d \omega_i^\top D^2 E(u) B^{ik}(u) \omega_k \geq \theta \sum_{i=1}^d \left| \sum_{k=1}^d B^{ik}(u) \omega_k \right|^2, \quad (2.113)$$

donde  $\theta > 0$  es una constante uniforme.

**Observación 2.48.** Nótese que, en el caso con viscosidad idéntica  $B^{ik} = \delta_i^k$ , la condición (2.113) se reduce a

$$\sum_{i=1}^d \omega_i^\top D^2 E(u) \omega_i \geq \theta \sum_{i=1}^d |\omega_i|^2,$$

es decir, a la condición de convexidad uniforme para la función de entropía  $E$ .

Finalmente y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que  $u_*$  es un mínimo global de  $E = E(u)$ :

$$E(u_*) = 0, \quad DE(u_*) = 0.$$

Esto es posible mediante la siguiente normalización, que dejamos al lector como ejercicio (véase ejercicio 2.13):

**Proposición 2.49.** Si  $(E, \Psi)$  es un par de entropía del sistema (2.38), con  $E$  uniformemente convexa, entonces el par normalizado

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u) &= E(u) - E(u_*) - DE(u_*)^\top (u - u_*), \\ \tilde{\Psi}^j(u) &= \Psi^j(u) - \Psi^j(u_*) - DE(u_*)^\top (f^j(u) - f^j(u_*)), \quad j = 1, \dots, d, \end{aligned}$$

con cualquier  $u_* \in \Omega$ , también es un par de entropía del sistema (2.38), con  $\tilde{E}$  uniformemente convexa

Bajo las anteriores consideraciones tenemos el siguiente

**Teorema 2.50.** Sea  $u^\varepsilon = u^\varepsilon(x, t)$  la solución suave al problema de Cauchy (2.110), con condición inicial  $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^d; \Omega) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d; \Omega)$  que satisface (2.111), para cada  $\varepsilon > 0$ . Suponiendo que:

- (i)  $\|u^\varepsilon\|_{L^\infty} \leq C$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , con  $C > 0$  uniforme (principio del máximo),
- (ii)  $u^\varepsilon \rightarrow u$  c.d.s. en  $(x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, +\infty)$ ,
- (iii) para cada  $t > 0$  fijo,

$$u^\varepsilon - u_*, \nabla u^\varepsilon \rightarrow 0, \quad \text{exponencialmente rápido si } |x| \rightarrow +\infty,$$

- (iv) el sistema viscoso satisface la condición de disipación de entropía (2.113) para un par de entropía  $(E, \Psi)$ ,

entonces el límite de aproximación viscosa

$$u(x, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u^\varepsilon(x, t), \quad \text{c.d.s. en } (x, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, +\infty),$$

es solución débil del sistema hiperbólico subyacente (2.38) con condición inicial (2.39) que, además, satisface la desigualdad de entropía

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi_t E(u) + \sum_{j=1}^d \varphi_{x_j} \Psi^j(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x, 0) E(u_0(x)) dx \geq 0,$$

para toda  $\varphi \in \mathcal{D}_+ = \{\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \varphi \geq 0\}$ .

*Demostración.* Integrando la ecuación (2.112) obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} E(u^\varepsilon)_t + \sum_{j=1}^d \Psi^j(u^\varepsilon)_{x_j} dx dt &= \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d \left( DE(u^\varepsilon)^\top B^{ik}(u^\varepsilon) u_{x_k}^\varepsilon \right)_{x_i} dx dt + \\ &- \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \sum_{i,k=1}^d u_{x_i}^\varepsilon \top D^2 E(u^\varepsilon) B^{ik}(u^\varepsilon) u_{x_k}^\varepsilon dx dt. \end{aligned}$$

En virtud de que  $u^\varepsilon \rightarrow u_*$  cuando  $|x| \rightarrow +\infty$  para cada  $t > 0$  fijo, y dado que  $E(u_*) = 0$ , obtenemos la siguiente identidad:

$$\int_{\mathbb{R}^d} E(u_0(x)) dx = \varepsilon \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \quad (2.114)$$

□

## Ejercicios

**2.1.** Demuestre que cada solución (2.57) es solución débil de (2.51) y (2.54) para cada valor de  $\alpha \in [0, 1]$  y que las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot (2.43) se cumplen en cada discontinuidad (en este caso, sólo en  $x = \alpha/2t$ ).

**2.2.** Pruebe que para cada  $\beta > 0$  la solución (2.58) es solución débil de la ecuación de Burgers no viscosa (2.51) con condición inicial  $u_0 = 0$ .

**2.3. Hiperbolicidad de las ecuaciones de Euler en varias dimensiones.** Considere las ecuaciones de Euler para un fluido compresible en varias dimensiones espaciales (2.8) y suponga que la ecuación de estado  $p = \hat{p}(\rho, e)$  satisface (2.69).

(a) Demuestre que si  $\rho > 0$  entonces es posible transformar el sistema a un sistema cuasi-lineal equivalente en las variables  $w := (\rho, v, e)^\top \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , de la forma

$$\begin{aligned} \rho_t + (\nabla_x \rho)^\top v + \rho \operatorname{div}_x v &= 0, \\ v_t + (\nabla_x v)^\top v + \frac{1}{\rho} \nabla_x p &= 0, \\ e_t + (\nabla_x e)^\top v + \frac{p}{\rho} \operatorname{div}_x v &= 0. \end{aligned} \quad (2.115)$$

(b) Pruebe que el determinar la hiperbolicidad del sistema se reduce a examinar la diagonalizabilidad sobre  $\mathbb{R}$  de la siguiente matriz de  $5 \times 5$ ,

$$A(w, \xi) = \begin{pmatrix} v \cdot \xi & \rho \xi^\top & 0 \\ \frac{\rho p}{\rho} \xi & (v \cdot \xi) I & \frac{\rho e}{\rho} \xi \\ 0 & \frac{p}{\rho} \xi^\top & v \cdot \xi \end{pmatrix}, \quad (2.116)$$

donde  $I$  es la matriz identidad de  $3 \times 3$ ,  $v = (v_1, v_2, v_3)^\top$  y  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ ,  $\xi \neq 0$ .

- (c) Demuestre que la matriz  $A(w, \xi)$  tiene como valores propios a  $v \cdot \xi$ , y a  $v \cdot \xi \pm c|\xi|$ , donde  $c > 0$  es la velocidad del sonido, definida por (2.71).
- (d) Verifique que cuando  $c^2 > 0$ , el valor propio  $v \cdot \xi$  es semi-simple con multiplicidad  $m = 3$  y con tres vectores linealmente independientes, y que los valores propios  $v \cdot \xi \pm c|\xi|$  son simples. Concluya que el sistema es hiperbólico si y sólo si  $c^2 > 0$ , mas no estrictamente hiperbólico.

**2.4.** Verifique que el sistema de ecuaciones para agua poco profunda en una dimensión espacial (2.17) es estrictamente hiperbólico si  $\eta > 0$ . Calcule las velocidades características del sistema.

**2.5.** Considere el sistema

$$\begin{aligned} \rho_t + (\rho v)_x &= 0, \\ v_t + \left(\frac{1}{2}v^2\right)_x &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\Omega = \{(\rho, v) \in \mathbb{R}^2 : \rho > 0\}$  es el conjunto admisible de variables de estado. ¿Es el sistema hiperbólico? Explique su respuesta.

**2.6.** Pruebe que si  $d = 1$  entonces todo sistema hiperbólico es simetrizable.

**2.7.** Demuestre que un sistema hiperbólico de la forma

$$u_t + \sum_{j=1}^2 A_j(u) u_{x_j} = 0,$$

donde  $x \in \mathbb{R}^2$ ,  $u \in \mathbb{R}^2$ , con dato inicial conocido,  $u(x, 0) = u_0(x)$ , es simetrizable. Para ello, siga los siguientes pasos:

- (a) Haciendo un cambio de variables  $v = Lu$  reduzca el sistema al caso donde  $A_1$  es diagonal.
- (b) Demuestre que: si  $A_1$  es de la forma  $aI$ , donde  $I$  es la matriz identidad de  $2 \times 2$ , con  $a \in \mathbb{R}$ , entonces el sistema se puede reducir al caso unidimensional con un dato inicial que depende de un parámetro.
- (c) Suponiendo ahora que  $A_1$  es diagonal pero no de la forma  $aI$ : calcule el polinomio característico de  $A_1 + \xi A_2$ ; pruebe que, o bien  $A_2$  es diagonal, o bien  $a_{12}a_{21} > 0$ , donde  $A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ .
- (d) Demuestre que el sistema es simetrizable.

**2.8.** Considere el sistema de ecuaciones para agua poco profunda en dos dimensiones (2.16).

- (a) Pruebe que las matrices jacobianas asociadas a las funciones de flujo del sistema son

$$A^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -u^2 + g\eta & 2u & 0 \\ -uv & v & u \end{pmatrix}, \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -uv & v & u \\ -v^2 + g\eta & 0 & 2v \end{pmatrix}.$$

- (b) Calcule los valores propios de  $A = \xi_1 A^1 + \xi_2 A^2$ , con  $\xi \in \mathbb{R}^2$ ,  $\xi \neq 0$ , y pruebe que el sistema es hiperbólico si  $\eta > 0$ .
- (c) Encuentre un simetrizador  $S$  del sistema (2.16).

**2.9.** Sea  $E$  una función de entropía para las ecuaciones de agua poco profunda en una dimensión espacial (2.17), con función de flujo de entropía  $\Psi$ , y suponga que ambas funciones son de clase  $C^2$  en  $\Omega = \{(\eta, \eta u) \in \mathbb{R}^2 : \eta > 0\}$ . Demuestre que  $E$  satisface la ecuación

$$E_{vv} = \frac{\eta}{g} E_{\eta\eta}.$$

Resuelva la ecuación anterior por separación de variables y encuentre una función de entropía estrictamente convexa y su correspondiente flujo de entropía para el sistema (2.17). ¿Se puede generalizar este método al sistema (2.16) en dos dimensiones espaciales?

**2.10.** Consideremos el sistema de ecuaciones de Euler en el caso barotrópico (2.79), donde  $\hat{p} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable que satisface  $\hat{p}'(\rho) > 0$ .

- (a) Muestre que el sistema (2.79) es estrictamente hiperbólico y calcule las velocidades características.
- (b) Pruebe que la función

$$E = \frac{1}{2} \rho v^2 + G(\rho) = E(u_1, u_2),$$

es una función de entropía para el sistema (2.79) si se cumple que  $G''(\rho) = \hat{p}'(\rho)/\rho$  para  $\rho > 0$ . Aquí  $(u_1, u_2) = (\rho, \rho v)$ . Verifique que  $E$  es convexa para toda  $\rho > 0$  en las variables  $(u_1, u_2)$ . ¿Cuál es el flujo de entropía  $\Psi$  correspondiente?

- (c) Encuentre  $E$  y  $\Psi$  en el caso de un gas ideal con  $\hat{p}(\rho) = k\rho^\gamma$ , donde  $k > 0$  y  $\gamma > 1$  son constantes.

**2.11.** Demuestre el lema 2.45.

**2.12.** Pruebe que la solución la ecuación de Burgers

$$u_t + uu_x = \varepsilon u_{xx},$$

con  $\varepsilon > 0$  y con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases}$$

con  $u_L > u_R \in \mathbb{R}$ , constantes, está determinada por la fórmula (2.106), donde  $s = \frac{1}{2}(u_R + u_L)$ .

**2.13.** Demuestre la proposición 2.49

## Nota bibliográfica

La ecuación de Burgers fue relacionada por vez primera con la dinámica de fluidos compresibles por H. Bateman en un artículo poco citado [15]. La ecuación reapareció (en su

versión viscosa) en el trabajo de J. M. Burgers [32] y desde entonces lleva su nombre. La transformación de Hopf-Cole apareció por vez primera como un ejercicio escondido en un tratado de ecuaciones diferenciales parciales de principios del siglo XX escrito por A. R. Forsyth [61]. Fue redescubierta independientemente por Hopf y Cole en los trabajos ya citados [94, 37]

El primer resultado sobre formación de ondas de choque se remonta al trabajo de Riemann [188]. El lector puede consultar una discusión más moderna en el caso de sistemas de  $2 \times 2$  en una dimensión en el artículo de Lax [126]; para el caso de sistemas generales véase DiPerna [51]. Finalmente, en el caso de fluidos en tres dimensiones, el primer resultado completo sobre la formación de ondas de choque se debe a Sideris [208] (véase también el reciente artículo de Chae y Ha [34]).

La noción de entropía matemática tal como se presenta en la sección 2.6 fue introducida por Lax [127].

La cuestión de convergencia de las soluciones viscosas es un problema abierto [201].

## Capítulo 3

# Ley de conservación escalar en una dimensión

Este capítulo está dedicado al estudio de una ley de conservación escalar en una dimensión espacial. En la primera sección se estudia la existencia local de soluciones clásicas al problema de Cauchy mediante el método de características. La sección 3.2 estudia con detalle la definición de función de entropía y la desigualdad distribucional de entropía introducidos en el primer capítulo. En particular, se prueba la equivalencia de la desigualdad de entropía con la desigualdad de entropía de Kružkov. En la clase de soluciones con derivadas continuas por pedazos, se establece la equivalencia del criterio de entropía con la condición de entropía generalizada, la cual, cuando la función de flujo no tiene cambios de convexidad, es equivalente a los criterios de Lax y Oleñnik vistos en la sección 2.4.4 del primer capítulo. Finalmente, se prueba que la condición de entropía generalizada garantiza la unicidad de la solución al problema de Cauchy en el conjunto de soluciones débiles de clase  $C^1$  por pedazos. La sección 3.3 contiene la demostración del teorema de Lax, el cual establece la existencia y la unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy cuando la función de flujo es estrictamente convexa. Notablemente, el teorema provee una fórmula explícita para la solución, la cual nos permite estudiar el comportamiento asintótico cuando  $t \rightarrow +\infty$  de manera directa. Se demuestra que la solución entrópica tiende asintóticamente en las normas  $L^1$  y  $L^\infty$  a una solución distribucional de la ley de conservación en forma de onda viajera, conocida como *onda N*. En la sección 3.4 se resuelve el problema de Riemann para una ley de conservación escalar. Se distinguen dos casos: cuando la función de flujo es estrictamente convexa (o estrictamente cóncava), y cuando ésta tiene cambios de convexidad. La estructura de la solución, así como el método de construcción, difieren considerablemente entre ambos casos. La sección 3.5 contiene el resultado de existencia y unicidad de la solución al problema de Cauchy para una función de flujo general. La demostración hace uso del método de aproximación viscosa. Los elementos esenciales son la prueba de existencia de Oleñnik [174] y la demostración de unicidad de Kružkov [116]. Finalmente, la sección 3.6 contiene algunos ejemplos resueltos del problema de Cauchy para la ecuación de Burgers; asimismo, se estudia el problema de Riemann para el modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards, y para la ecuación de Buckley-Leverett, la cual modela el flujo bifásico en un medio poroso.

### 3.1. Existencia local de soluciones clásicas

Consideremos una ley de conservación (o ley escalar) en una dimensión espacial, de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (3.1)$$

donde  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ ,  $u(x, t) \in \Omega$ , siendo  $\Omega \subset \mathbb{R}$  un intervalo abierto y acotado (espacio de variables de estado), y la función de flujo  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ , usualmente no lineal. Este capítulo presta especial atención a resolver el problema de Cauchy asociado a (3.1), con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2)$$

donde  $u_0$  pertenece a una clase específica de funciones, por ejemplo,  $L^\infty$  ó  $C^k$ , entre otras. Como hemos visto en el primer capítulo, en el caso de la ecuación de Burgers la no linealidad de la función de flujo da lugar a fenómenos interesantes, tales como no existencia de soluciones clásicas para todo tiempo y la formación de ondas de choque, los cuales no son predecibles por la teoría lineal. En esta primera sección demostraremos que la solución clásica al problema de Cauchy (3.1) - (3.2) existe localmente en el tiempo, es decir, que existe un tiempo  $T_*$  (que puede ser acotado o infinito) tal que la solución existe y es de clase  $C^1$  para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T_*)$ . Para tal efecto, se aplicará el método de características. Cuando  $T_* > 0$  es finito, se le denomina *tiempo de rompimiento*, y es el tiempo a partir del cual se generan discontinuidades en la solución (ondas de choque). Dicho tiempo de rompimiento se puede calcular explícitamente.

Consideremos, pues, el problema de Cauchy (3.1) y (3.2). Escribiremos, a partir de ahora y por el resto de este capítulo,

$$a(u) := f'(u), \quad (3.3)$$

como el jacobiano de la función de flujo  $f$  para toda  $u \in \Omega$ . Sea  $u \in C^1$  una solución clásica de (3.1) y (3.2). Definimos las *curvas características* en una banda  $\mathbb{R} \times [0, T]$ ,  $T > 0$ , como las curvas de la forma  $t \mapsto (\hat{x}(t), t)$ , donde  $\hat{x}$  resuelve la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = a(u(\hat{x}, t)). \quad (3.4)$$

Notamos que sobre una curva característica

$$\frac{d}{dt}u(\hat{x}(t), t) = u_x(\hat{x}(t), t)\frac{d\hat{x}}{dt} + u_t(\hat{x}(t), t) = (a(u)u_x + u_t)(\hat{x}(t), t) = 0,$$

ya que  $u$  es solución clásica de (3.1) y (3.2). Por lo tanto, toda solución clásica es constante a lo largo de las curvas características, y toma el valor  $u_0(y_0)$ , donde  $(y_0, 0)$  es la intersección de la curva con  $t = 0$ . Por lo tanto, la pendiente de la característica en todo punto es  $a(u_0(y_0))$  y las características son líneas rectas de la forma

$$\hat{x}(t) = y_0 + a(u_0(y_0))t. \quad (3.5)$$

Vamos a aplicar el método de características para demostrar el siguiente

**Teorema 3.1.** Sea  $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Supongamos que  $u_0 \in C^1(\mathbb{R})$  es acotada, con derivada  $u_0'$  acotada en  $\mathbb{R}$ . Definimos

$$T_* := \begin{cases} +\infty, & \text{si } a(u_0(x)) \text{ es creciente,} \\ -(\inf_{x \in \mathbb{R}} \frac{d}{dx}(a(u_0(x))))^{-1}, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.6)$$

Entonces el problema de Cauchy (3.1) - (3.2) tiene una única solución de clase  $C^1$  en  $\mathbb{R} \times [0, T_*)$ , y no tiene otra solución de clase  $C^1$  en una banda más grande, es decir, en  $\mathbb{R} \times [0, T]$  con  $T \geq T_*$ .

*Demostración.* Sea  $\alpha(x) := a(u_0(x))$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Aplicando el método de características, si  $u$  es solución de clase  $C^1$  de (3.1) y (3.2), entonces para  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  dado definimos a  $\Gamma$  como la característica que pasa por dicho punto, a saber,

$$\Gamma := \{(\hat{x}(t), t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : \hat{x}(t) = \bar{x} + a(u(\bar{x}, \bar{t}))(t - \bar{t})\}.$$

Dado que  $u$  es constante sobre  $\Gamma$ , sea  $y_0$  tal que  $(y_0, 0) \in \Gamma$  y por lo tanto  $u(\bar{x}, \bar{t}) = u(\hat{x}(t), t) = u(y_0, 0) = u_0(y_0)$ , para todo  $t$ . Por ende, para  $(\bar{x}, \bar{t})$  dado, resolver (3.1) y (3.2) consiste en hallar una solución  $y_0$  a la ecuación

$$y_0 + a(u_0(y_0))\bar{t} = \bar{x}. \quad (3.7)$$

Para  $\bar{t}$  fijo, sea la función  $F_{\bar{t}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $F_{\bar{t}}(y) := y + \alpha(y)\bar{t}$ . Dado que  $u_0$  es continua y  $f$  es  $C^2$ ,  $F_{\bar{t}}(y)$  es continua. Notemos también que como  $u_0$  es acotada, entonces

$$F_{\bar{t}}(\pm\infty) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (y + a(u_0(y))\bar{t}) = \pm\infty.$$

Así, por el teorema del valor intermedio, existe al menos un valor  $y_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $F_{\bar{t}}(y_0) = \bar{x}$ , y (3.7) tiene una solución. Sin embargo, puede existir más de una solución a esta ecuación no-lineal. Para garantizar que el valor de  $y_0$  encontrado es único, analicemos dos casos. Notamos que

$$\frac{dF_{\bar{t}}}{dy} = 1 + \alpha'(y)\bar{t},$$

donde  $\alpha'(y) = a'(u_0(y))u_0'(y)$ . Dado que  $f \in C^2$  y  $u_0 \in C^1$ , tenemos que  $\alpha$  es de clase  $C^1$ . En el primer caso, si  $\alpha$  es no decreciente, entonces  $\alpha'(y) \geq 0$  para toda  $y \in \mathbb{R}$  y por lo tanto  $(d/dy)F_{\bar{t}}(y) = 1 + \alpha'(y)\bar{t} > 0$  para todo  $\bar{t} \geq 0$ . Así,  $F_{\bar{t}}$  es estrictamente creciente y el valor encontrado de  $y_0$  es único, que denotamos como  $y_0(\bar{x}, \bar{t})$ , el cual existe para todo  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  dado. En este caso definimos  $T_* := +\infty$  y el valor de la solución clásica es

$$u(\bar{x}, \bar{t}) := u_0(y_0(\bar{x}, \bar{t})). \quad (3.8)$$

En cualquier otro caso, existen valores de  $y$  para los cuales  $\alpha'(y) < 0$  y claramente  $T_* := -(\inf_{x \in \mathbb{R}} \alpha'(x))^{-1} > 0$  es finito. Notamos también que

$$\frac{dF_{\bar{t}}}{dy} = 1 + \alpha'(y)\bar{t} \geq 1 - \frac{\bar{t}}{T_*} > 0,$$

para toda  $\bar{t} \in [0, T_*)$ , por lo cual  $F_{\bar{t}}$  es estrictamente creciente si  $\bar{t} \in [0, T_*)$  y el valor encontrado de  $y_0$  es único. La solución clásica se define igualmente mediante la fórmula (3.8) para  $\bar{t} \in [0, T_*)$ .

Para verificar que la solución construida es de clase  $C^1$ , notamos que la función  $G(\bar{x}, \bar{t}, y) := F_{\bar{t}}(y) - \bar{x}$  satisface  $G(\bar{x}, \bar{t}, y_0) = 0$ , y que su derivada

$$\frac{dG}{dy} = 1 + \alpha'(y)\bar{t} \geq 1 > 0,$$

es estrictamente positiva para valores de  $\bar{t} \in [0, T_*)$ . Por el teorema de la función implícita existe una función  $y = y(\bar{x}, \bar{t})$  de clase  $C^1$  en una vecindad de  $(\bar{x}, \bar{t})$  tal que  $G(\bar{x}, \bar{t}, y(\bar{x}, \bar{t})) = 0$  y, además,

$$y_{\bar{x}} = -\frac{G_{\bar{x}}}{G_y} = \frac{1}{1 + \alpha'(y)\bar{t}}, \quad y_{\bar{t}} = -\frac{G_{\bar{t}}}{G_y} = -\frac{\alpha(y)}{1 + \alpha'(y)\bar{t}}.$$

Por unicidad,  $y_0 = y(\bar{x}, \bar{t})$ , y es de clase  $C^1$  en una vecindad de  $(\bar{x}, \bar{t})$ . De esta forma la solución construida (3.8) es de clase  $C^1$  en una vecindad de  $(\bar{x}, \bar{t})$  para todo  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, T_*)$ . Para verificar que  $u$  es efectivamente solución del problema de Cauchy notamos que  $F_0(y(\bar{x}, 0)) = y(\bar{x}, 0) = \bar{x}$ , por lo que  $u(\bar{x}, 0) = u_0(y(\bar{x}, 0)) = u_0(\bar{x})$ , es decir, la condición inicial se satisface. Finalmente, dado que  $u$  es  $C^1$  y como  $u'_0$  es acotada tenemos que

$$\begin{aligned} u_{\bar{t}} + f(u)_{\bar{x}} &= u'_0(y(\bar{x}, \bar{t}))y_{\bar{t}} + a(u_0(y(\bar{x}, \bar{t})))u'_0(y(\bar{x}, \bar{t}))y_{\bar{x}} \\ &= u'_0(y(\bar{x}, \bar{t})) \left(1 + \alpha'(y)\bar{t}\right)^{-1} \left(-a(u_0(y(\bar{x}, \bar{t}))) + a(u_0(y(\bar{x}, \bar{t})))\right) = 0. \end{aligned}$$

La solución construida es solución clásica al problema de Cauchy en la banda  $\mathbb{R} \times [0, T_*)$ . Por construcción, dicha solución es única. Para finalizar la demostración, debemos probar la última aseveración y verificar que la solución no se puede extender más allá de  $T_*$ . Para ello supondremos, sin pérdida de generalidad, que  $f$  es de clase  $C^3$ .

Sea  $T > 0$  tal que existe una solución clásica  $u$  en la banda  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Si  $T_* = +\infty$  entonces claramente  $T < T_*$ . Supongamos, pues, que  $T_* < +\infty$ . En este caso, existen valores de  $y$  para los cuales  $\alpha'(y) < 0$ . Sea  $\tilde{y} \in \mathbb{R}$  uno de estos valores y fijémonos en la curva característica que pasa por  $(\tilde{y}, 0)$ , es decir,  $\hat{x}(t) = \tilde{y} + ta(u_0(\tilde{y}))$ . Dado que  $u$  es regular en  $\mathbb{R} \times [0, T]$ , para cada punto de la característica tal que  $t \leq T$  tenemos que  $u$  toma el valor constante  $u_0(\tilde{y})$  sobre la curva. Consideremos la variable  $v := a'(u)u_x$ . Derivando a  $v$  con respecto a  $t$  a lo largo de dicha característica tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{dv(\hat{x}(t), t)}{dt} &= a'(u)((d\hat{x}/dt)u_{xx} + u_{xt}) + a''(u)((d\hat{x}/dt)u_x + u_t)u_x \\ &= a'(u)a(u)u_{xx} + a'(u)u_{xt} + a''(u)a(u)u_x^2 + a''(u)u_x u_t, \end{aligned}$$

ya que  $d\hat{x}/dt = a(u)$ . Como  $u$  es solución de clase  $C^1$  de la ecuación tenemos que  $u_t + a(u)u_x = 0$ , lo cual implica, tras derivar con respecto a  $x$ , que

$$u_{xt} + a(u)u_{xx} + a'(u)u_x^2 = 0.$$

Sustituyendo la ecuación anterior en la expresión para  $dv/dt$  tenemos que

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(\hat{x}(t), t)} = -a'(u)^2 u_x^2 = -v^2.$$

Podemos resolver esta ecuación por separación de variables y concluir que  $1/v = t + k$ , donde  $k$  es una constante. El valor inicial de  $v$  es

$$v(\hat{x}(0), 0) = v(\tilde{y}, 0) = a'(u_0(\tilde{y}))u_x(\tilde{y}, 0) = a'(u_0(\tilde{y}))u'_0(\tilde{y}) = \alpha'(\tilde{y}) < 0,$$

por lo tanto,

$$v = \frac{1}{t + (\alpha'(\tilde{y}))^{-1}},$$

y  $v$  existe para tiempo  $t < -(\alpha'(\tilde{y}))^{-1} < T_*$ , es decir, necesariamente  $T < T_*$ .  $\square$

**Observación 3.2.** Notamos que el teorema se aplica también a ecuaciones lineales con  $a'(u) = f''(u) = 0$ , para las cuales tiempo de rompimiento es  $T_* = +\infty$ , por lo que tenemos un resultado de existencia global para ecuaciones lineales. El fenómeno de rompimiento de la solución a tiempo finito es exclusivo de ecuaciones no lineales, ya que  $T_* < +\infty$  implica que  $\alpha'(x) = a'(u_0(x))u'_0(x) < 0$ .

## 3.2. Condiciones de entropía

En esta sección estudiaremos soluciones débiles del problema de Cauchy para una ley de conservación escalar que satisfacen ciertas condiciones de entropía. A éstas soluciones se les conoce como *soluciones entrópicas*. Con el fin de establecer resultados de existencia y unicidad y de precisar los criterios de entropía, vamos a extender el concepto de desigualdad de entropía y de par de entropía estudiados en el capítulo 2.

### 3.2.1. Solución entrópica

Sea la ley de conservación escalar (3.1) en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , con condición inicial (3.2), donde  $u \in \Omega = (a, b)$ , abierto y acotado, y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ . Recordemos la definición de entropía vista anteriormente especializada al caso escalar. Si existe una función convexa  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , de clase  $C^2$ , tal que

$$E'(u)a(u) = \Psi'(u), \quad (3.9)$$

para toda  $u \in \Omega$  y para cierta función  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^1$ , entonces al par  $(E, \Psi)$  se le conoce como un par de entropía y a la función  $E$  función de entropía. Además, si  $u$  es solución clásica de (3.1), entonces se cumple la ley de conservación

$$E(u)_t + \Psi(u)_x = 0. \quad (3.10)$$

En el caso de sistemas, no siempre podemos hallar una función de entropía, excepto bajo ciertas condiciones (sistemas simétricos, por ejemplo). En el caso escalar, tenemos una gran variedad de funciones de entropía, como podemos reconocer en los siguientes ejemplos:

(a) La función convexa  $E = \frac{1}{2}u^2$  con flujo  $\Psi = uf(u) - \int_0^u f(v) dv$  es claramente una función de entropía para (3.1) ya que

$$\Psi'(u) = f(u) + uf'(u) - f(u) = ua(u) = E'(u)a(u).$$

(b) Si  $f$  es ella misma convexa,  $E = f$  es también una función de entropía asociada al flujo

$$\Psi(u) = \int_0^u a(v)^2 dv,$$

ya que  $\Psi'(u) = a(u)^2 = a(u)E'(u)$ .

(c) De hecho, *toda* función convexa  $E$  de clase  $C^2$  es función de entropía de (3.1), ya que podemos definir el flujo asociado como

$$\Psi(u) = \int_0^u E'(v)a(v) dv.$$

Como hemos visto en la sección 2.7, el concepto de entropía nos permite establecer un criterio para seleccionar la solución débil de (3.1) y (3.2) como el límite de una aproximación viscosa. Asumiendo que dicho límite existe, la condición sobre  $u$  tiene la forma de una desigualdad en el sentido de distribuciones,

$$E(u)_t + \Psi(u)_x \leq 0,$$

es decir,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) E(u_0(x)) dx \geq 0, \quad (3.11)$$

para toda función de prueba

$$\phi \in \mathcal{D}_+ := \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \phi \geq 0\}.$$

La condición (3.11) es conocida como la *condición de entropía* y establece un criterio adicional para la solución débil  $u$ . Al hacer la aproximación viscosa (véase el teorema 2.46), demostramos que el sentido de esta desigualdad se mantiene para cualquier par de entropía  $(E, \Psi)$ . Tal como en el caso de la definición de solución débil, notamos que la condición (3.11) no requiere que  $u$  sea solución clásica, y asimismo, no requiere que la función de entropía  $E$  ni su flujo de entropía asociado  $\Psi$  sean de clase  $C^2$ . Con el fin de establecer un criterio que permita garantizar existencia y unicidad, vamos a extender el concepto de función de entropía a funciones que sean convexas, no necesariamente diferenciables. Dado que en ese caso no contamos con la relación (3.9), ¿cómo podemos definir el flujo de entropía asociado a una función convexa  $E$ , no diferenciable? Para responder a esta pregunta, aproximaremos cada función convexa por funciones convexas suficientemente suaves. Los flujos correspondientes, a su vez, convergen a una función continua que resulta ser el flujo asociado a la función convexa original. Éste es el contenido del siguiente

**Lema 3.3.** *Sea  $E : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces  $E$  es localmente el límite uniforme de funciones convexas de clase  $C^\infty$ , es decir, existe una sucesión de funciones convexas  $\{E^\varepsilon\}$ , con  $\varepsilon > 0$ , de clase  $C^\infty$  tales que  $E^\varepsilon \rightarrow E$  uniformemente en compactos de  $\Omega$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Podemos también definir una única función de flujo  $\Psi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , continua, asociada a  $E$  como*

$$\Psi(u) = E(u)a(u) - E(0)a(0) - \int_0^u E(v)f''(v) dv, \quad (3.12)$$

en el sentido de que la desigualdad (3.11) se preserva. El par  $(E, \Psi)$  es un par de entropía generalizado.

*Demostración.* Para cada  $\varepsilon > 0$  definimos  $E^\varepsilon$  como el alisamiento de  $E$

$$E^\varepsilon(u) := (\eta_\varepsilon * E)(u) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(w)E(u-w) dw.$$

Si  $E$  es convexa, entonces es continua (ver [190]; pág. 61). Por la proposición A.5(c) tenemos convergencia uniforme en compactos de  $\Omega$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Falta probar que cada  $E^\varepsilon$  es convexa. Esto es inmediato ya que  $\eta_\varepsilon \geq 0$  y por lo tanto

$$\begin{aligned} E^\varepsilon((1-\lambda)u + \lambda v) &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \eta_\varepsilon(w)E((1-\lambda)u + \lambda v - w) dw \\ &= \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \eta_\varepsilon(w)E((1-\lambda)(u-w) + \lambda(v-w)) dw \\ &\leq \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \eta_\varepsilon(w)((1-\lambda)E(u-w) + \lambda E(v-w)) dw \\ &= (1-\lambda)E^\varepsilon(u) + \lambda E^\varepsilon(v), \end{aligned}$$

para todo  $u, v$  y toda  $\lambda \in [0, 1]$ , y por convexidad de  $E$ . De este modo, cada  $E$  convexa es el límite de funciones convexas de clase  $C_0^\infty$ .

Para cada  $\varepsilon > 0$  definimos el flujo

$$\Psi^\varepsilon(u) := \int_0^u (E^\varepsilon)'(v)a(v) dv,$$

de modo que cada  $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$  es un par de entropía suave para la ecuación (3.1) en el sentido de la definición 2.36, ya que satisface la relación  $(E^\varepsilon)'(u)a(u) = (\Psi^\varepsilon)'(u)$  para cada  $u$ . Así, integrando por partes, tenemos

$$\Psi^\varepsilon(u) = E^\varepsilon(u)a(u) - E^\varepsilon(0)a(0) - \int_0^u E^\varepsilon(v)f''(v) dv,$$

expresión que claramente converge a  $\Psi$ , uniformemente en compactos de  $\Omega$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Asumiendo que  $u$  es una solución débil que es el límite de soluciones viscosas al problema parabólico asociado, tal como vimos en el capítulo anterior, sabemos que para cada par de entropía  $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$  suave se satisface la desigualdad (3.11). Por convergencia uniforme, tenemos que

$$I(\varepsilon) := \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t(E(u) - E^\varepsilon(u)) + \phi_x(\Psi(u) - \Psi^\varepsilon(u)) dxdt + \\ + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0)(E(u_0(x)) - E^\varepsilon(u_0(x))) dx \longrightarrow 0,$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Esto implica que el sentido de la desigualdad se preserva y que (3.11) es válida para la solución débil  $u$  y el par  $(E, \Psi)$ .  $\square$

Gracias al lema anterior, podemos formular la siguiente definición.

**Definición 3.4 (Solución entrópica).** Una solución débil de (3.1) con condición inicial (3.2) es una *solución entrópica* (o *admisible*) si para toda función de entropía  $E$ , convexa, con flujo de entropía asociado  $\Psi$ , se cumple la desigualdad (3.11) para toda función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}_+ = C_0^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ .

**Observación 3.5.** (a) Si  $u$  es una solución clásica y el par  $(E, \Psi)$  es de clase  $C^1$ , sabemos que se satisface la ecuación (3.10), por lo que la desigualdad (3.11) se satisface trivialmente en forma de igualdad. Si  $(E, \Psi)$  son sólo continuas (par de entropía generalizado), y  $u$  es una solución clásica, la desigualdad (3.11) también se satisface trivialmente en forma de igualdad, tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  de las igualdades para los pares  $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ .

(b) En algunos textos (ver, por ejemplo, el libro de Smoller [213]) la definición de solución entrópica restringe la clase de funciones de prueba a  $C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); \mathbb{R}_+)$ , es decir, cada función de prueba  $\phi$  se anula en una vecindad de  $t = 0$ . De esta manera se puede, en principio, eliminar la última integral en (3.11) y la desigualdad se reduce a

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dxdt \geq 0.$$

Esta definición, sin embargo, pierde la propiedad de unicidad (véase Serre [197], ejercicio 2.12).

La definición de solución entrópica es uno de los conceptos fundamentales de la teoría de leyes de conservación. Provee el concepto de solución admisible, la cual debe ser compatible con principios físicos, y restringe la clase de soluciones débiles. El enunciado de esta definición no es, sin embargo, práctico, en el sentido de que para demostrar que una solución débil es admisible debemos verificar la desigualdad (3.11) para todo posible par de entropía. Dado que la función de entropía no es necesariamente diferenciable, podemos considerar en particular el siguiente par de entropía

$$E(u) := |u - k|, \quad \Psi(u) := (f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k), \quad (3.13)$$

con  $k \in \Omega = (a, b)$ , donde claramente  $E$  es continua y convexa, y la función  $\operatorname{sgn}(s)$  se define como

$$\operatorname{sgn}(s) := \begin{cases} 1, & \text{si } s > 0, \\ 0, & \text{si } s = 0, \\ -1, & \text{si } s < 0. \end{cases}$$

Es posible demostrar que la función  $\Psi$  definida en (3.13) es, en efecto, la función de entropía asociada a  $E$  en el sentido del lema 3.3 (ejercicio 3.2). El par de entropía (3.13) es conocido

como el par de Kružkov [115, 116]. Nótese que  $E$  es convexa pero no es de clase  $C^1$ . La importancia del par de Kružkov será aclarado a continuación.

Hemos supuesto que  $\Omega$  es un intervalo abierto y acotado. A continuación vamos a restringir nuestras observaciones al caso de  $\Omega = [a, b]$ , un intervalo cerrado y acotado (compacto).

**Proposición 3.6.** *Sea  $[a, b]$  un intervalo acotado, y sea  $E : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función convexa. Entonces para cada  $\alpha > 0$  existe una función convexa  $E_\alpha$ , con flujo de entropía asociado  $\Psi_\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , tales que*

- (i)  $E(u) \leq E_\alpha(u) \leq E(u) + \alpha$ , para todo  $u \in [a, b]$ , y
- (ii)  $E_\alpha$  tiene la forma

$$E_\alpha(u) = b_0 + b_1 u + \sum_{j=1}^M a_j |u - k_j|, \quad a_j > 0. \quad (3.14)$$

Aquí,  $\alpha = O(1/M)$ , con  $M \in \mathbb{Z}_+$ , y el flujo de entropía asociado  $\Psi_\alpha$  tiene la forma

$$\Psi_\alpha(u) = b_1 f(u) + \sum_{j=1}^M a_j (f(u) - f(k_j)) \operatorname{sgn}(u - k_j). \quad (3.15)$$

Finalmente, el par  $(E_\alpha, \Psi_\alpha)$  converge uniformemente a  $(E, \Psi)$  en  $[a, b]$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  (es decir, cuando  $M \rightarrow +\infty$ ).

*Demostración.* La demostración es una consecuencia directa del lema A.9 (ver apéndice A). La forma de  $\Psi_\alpha$  resulta de resolver (3.12) para cada función de entropía  $E_\alpha$  (ver ejercicio 3.2). La convergencia uniforme de  $\Psi_\alpha$  se deduce a partir de la convergencia uniforme de  $E_\alpha$ .  $\square$

Aplicaremos la proposición anterior para demostrar la siguiente equivalencia.

**Teorema 3.7.** *Una función  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); \Omega)$ , medible y acotada, con  $\Omega = [a, b]$ , es una solución entrópica de (3.1) y (3.2) si y sólo si satisface la desigualdad*

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t |u - k| + \phi_x (f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) |u_0(x) - k| dx \geq 0, \quad (3.16)$$

para toda  $k \in \Omega$ , y para toda función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}_+$ .

*Demostración.* Claramente, si  $u$  es solución entrópica, la desigualdad (3.16) se cumple al sustituir el par de Kružkov (3.13) en la desigualdad (3.11).

Inversamente, supongamos que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); \Omega)$  satisface (3.16). Dado que  $\Omega = [a, b]$  es cerrado y acotado, podemos tomar  $k = a$  en (3.16) y obtener

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t u + \phi_x f(u) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx \\ & \geq a \left( \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) dx \right) + f(a) \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_x dx dt = 0, \end{aligned}$$

con  $\phi \in \mathcal{D}_+$ , en virtud de que  $\text{sgn}(u - a) = \text{sgn}(u_0 - a) = 1$ . El lado derecho de la desigualdad anterior es cero tras integración directa, ya que  $\phi$  es de soporte compacto. Igualmente, tomando  $k = b$ , obtenemos

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t u + \phi_x f(u) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx \leq 0.$$

De este modo,

$$\int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_t u + \phi_x f(u) dx dt + \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0,$$

para toda  $\phi \in \mathcal{D}_+$ . Por linealidad, y usando  $-\phi$ , esta igualdad es cierta también para cada  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ , sin importar su signo; de este modo  $u$  es una solución débil de (3.1) y (3.2).

Sea una función de prueba  $\phi \in \mathcal{D}_+$ . Para cada  $\alpha > 0$ , definimos las integrales,

$$\begin{aligned} J_\alpha &:= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E_\alpha(u) + \phi_x \Psi_\alpha(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) E_\alpha(u_0) dx, \\ J &:= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) E(u_0) dx, \end{aligned}$$

donde el par  $(E_\alpha, \Psi_\alpha)$  está dado por (3.14) y (3.15). En virtud de que  $u$  satisface (3.16) para cada  $k_j \in [a, b]$ , que cada  $a_j$  es positiva,  $\phi$  tiene soporte compacto y de que  $u$  es solución débil, tenemos que

$$J_\alpha = \sum_{j=1}^M a_j \left( \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t |u - k_j| + \phi_x (f(u) - f(k_j)) \text{sgn}(u - k_j) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) |u_0 - k_j| dx \right) \geq 0,$$

para cada  $\alpha > 0$ . Por convergencia uniforme de  $(E_\alpha, \Psi_\alpha)$  y por ser  $\phi$  de soporte compacto, tenemos que  $J_\alpha \rightarrow J$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  y el signo se preserva al tomar el límite, es decir,  $J \geq 0$ . Esto implica que la desigualdad (3.11) se cumple para cada par de entropía  $(E, \Psi)$  y la solución es entrópica.  $\square$

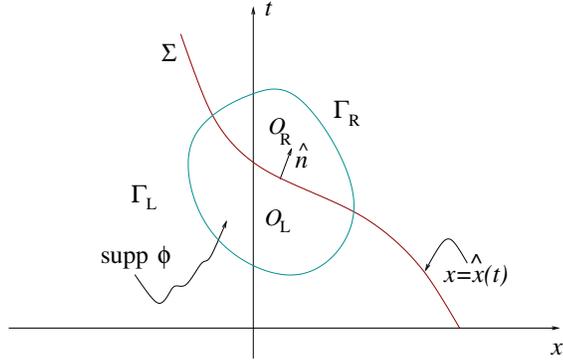
**Observación 3.8.** La conclusión del teorema 3.7 implica que cuando el conjunto de estados admisibles es compacto, basta con verificar la desigualdad de entropía para el par de Kružkov para garantizar que la solución es entrópica.

En la siguiente sección analizaremos algunas consecuencias de la definición de solución entrópica y daremos un criterio de admisibilidad para soluciones débiles que sean de clase  $C^1$  por pedazos con un número contable de discontinuidades.

### 3.2.2. Condición de entropía generalizada

Dentro del conjunto de soluciones débiles, una clase que nos interesa estudiar es el de las soluciones que son  $C^1$  por pedazos, es decir, que tienen un número contable de discon-

**Figura 3.1** Intersección del interior del soporte de  $\phi \in \mathcal{D}_+$ , uniformemente alejado de  $t = 0$ , con las regiones  $\Gamma_R$  y  $\Gamma_L$  definidas por la orientación de la discontinuidad  $\Sigma$  de la solución débil  $u$ . Dichos conjuntos se denotan por  $O_R$  y  $O_L$ , respectivamente.



tinuidades y que fuera de ellas, son soluciones clásicas a (3.1). Estudiemos algunas de las repercusiones de la definición 3.4. Sea  $u$  una de estas soluciones suaves por pedazos, con discontinuidades  $\Sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ , en el plano  $(x, t)$ , las cuales no se intersectan y tal que  $u$  es solución clásica fuera de la unión  $\cup \Sigma_j$ . Tomemos una de estas discontinuidades, que denotamos por  $\Sigma$ , y supongamos que acepta una parametrización en  $t$  de la forma

$$\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : t \in [t_1, t_2]\}.$$

Definimos los conjuntos

$$\begin{aligned} \Gamma_R &:= \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : x > \hat{x}(t)\} \\ \Gamma_L &:= \{(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : x < \hat{x}(t)\}, \end{aligned}$$

a ambos lados, derecho e izquierdo, de  $\Sigma$ . Por convención, la normal  $\hat{n}$  a  $\Sigma$  apunta en la dirección derecha de la curva (ver la figura 3.1).

Tomemos una función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times (0, +\infty); \mathbb{R}_+) \subset \mathcal{D}_+$ , es decir,  $\phi = 0$  cerca de  $t = 0$ . Sea  $(E, \Psi)$  cualquier par de entropía generalizado, y denotemos a su aproximación suave por  $(E^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ , con  $\varepsilon > 0$ , en el sentido del lema 3.3. Denotamos los conjuntos abiertos  $O_R = \Gamma_R \cap (\text{supp } \phi)^\circ$  y  $O_L := \Gamma_L \cap (\text{supp } \phi)^\circ$ , donde  $(\text{supp } \phi)^\circ$  denota el interior del soporte de  $\phi$ . Dado que  $u$  es solución clásica fuera de  $\Sigma$ , por la desigualdad (3.11), por convergencia uniforme, y aplicando el teorema de la divergencia en  $O_R$  y  $O_L$ , obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dx dt \\ &= \int_{O_L} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dx dt + \int_{O_R} \phi_t E(u) + \phi_x \Psi(u) dx dt \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( \int_{\partial O_L} (\phi E^\varepsilon(u) n_t + \phi \Psi^\varepsilon(u) n_x) ds - \int_{\partial O_R} (\phi E^\varepsilon(u) n_t + \phi \Psi^\varepsilon(u) n_x) ds + \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Gamma_R} \phi (E^\varepsilon(u)_t + \Psi^\varepsilon(u)_x) dx dt - \int_{\Gamma_L} \phi (E^\varepsilon(u)_t + \Psi^\varepsilon(u)_x) dx dt \right) \\ &= - \int_{\Sigma \cap \text{supp } \phi} \phi ([E(u)] n_t + [\Psi(u)] n_x) ds, \end{aligned}$$

ya que  $\phi = 0$  en  $\partial O_R, \partial O_L$ , excepto sobre  $\Sigma$ . Dado que  $\phi$  es arbitraria, esto implica que a lo largo de  $\Sigma$  se cumple la desigualdad de salto,

$$[E(u)]n_t + [\Psi(u)]n_x \leq 0,$$

es decir,

$$-\frac{d\hat{x}}{dt}[E(u)] + [\Psi(u)] \leq 0, \quad (3.17)$$

para todo par de entropía generalizado  $(E, \Psi)$ .

El argumento es, claramente, reversible. Si una solución débil de clase  $C^1$  por pedazos satisface la desigualdad (3.17) sobre toda discontinuidad  $\Sigma$  para cualquier par de entropía generalizado  $(E, \Psi)$ , entonces, por el principio de partición de unidad (ver Yosida [230], pág. 60), podemos rellenar el soporte compacto de cualquier  $\phi \in \mathcal{D}_+$  mediante un número finito de vecindades abiertas  $\mathcal{O}_{j,R} \cup \mathcal{O}_{j,L} = \mathcal{O}_j$ , con  $j = 1, \dots, N$ , que pueden intersectar a  $\{t = 0\}$ . Dado que  $u$  es solución clásica fuera de  $\Sigma$  con condición inicial  $u_0$ , integrando en todo el soporte de  $\phi$  y aproximando  $(E, \Phi)$  mediante la sucesión  $(E^\varepsilon, \Phi^\varepsilon)$  obtenemos la desigualdad (3.11). De este modo hemos probado el siguiente

**Lema 3.9.** *Sea  $u$  una solución débil de (3.1) y (3.2), de clase  $C^1$  por pedazos y con un número contable de discontinuidades  $\cup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma_j = \Sigma$ . Entonces  $u$  es solución entrópica si y sólo si*

$$[E(u)]n_t + [\Psi(u)]n_x \leq 0, \quad (3.18)$$

sobre  $\Sigma$ , donde  $\hat{n} = (n_t, n_x)$  es el vector normal a  $\Sigma$  que apunta a su lado derecho, y  $(E, \Psi)$  es cualquier par de entropía generalizado. Si, además,  $\Sigma$  admite una parametrización de la forma  $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) : t \in I\}$ , con  $I$  un intervalo y  $\hat{x} : I \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable, entonces la desigualdad (3.18) se escribe como

$$-\frac{d\hat{x}}{dt}[E(u)] + [\Psi(u)] \leq 0, \quad (3.19)$$

sobre  $\Sigma$ .

Sustituyendo el par de Kružkov (3.13) en la desigualdad (3.19), obtenemos

$$[(f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k)] \leq \frac{d\hat{x}}{dt} [|u - k|], \quad (3.20)$$

sobre  $\Sigma$  y para toda  $k \in \Omega$ . Esta desigualdad es conocida como la *desigualdad de entropía de Kružkov*. La importancia de la desigualdad (3.20) es difícil de subestimar: como veremos a continuación, es posible establecer la equivalencia entre la desigualdad (3.11) y la desigualdad de entropía (3.20) para la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos. Cabe señalar que el célebre resultado de existencia y unicidad de soluciones entrópicas de Kružkov [116] considera originalmente dicho par de entropía.

Por el lema 3.9 y la observación 2.9 (c)-(d), si  $u$  es una función  $C^1$  por pedazos en  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , con un número contable de discontinuidades,  $\Sigma = \cup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma_j$ , y si, además,  $u$  es solución entrópica de (3.1) y (3.2), entonces  $u$  es solución clásica fuera de  $\Sigma$ , y sobre cada  $\Sigma_j$  se satisface la desigualdad (3.20) para todo  $k \in \Omega$ . Esta observación y el teorema 3.7 sugieren

que el argumento es reversible y que la condición es también necesaria. En efecto, éste es el contenido del siguiente lema, que afirma la equivalencia entre (3.11) y (3.20) para soluciones  $C^1$  por pedazos.

**Lema 3.10.** *Sea  $u$  una función de clase  $C^1$  por pedazos en  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , con un número contable de discontinuidades  $\Sigma = \cup_{j \in \mathbb{N}} \Sigma_j$ . Entonces,  $u$  es una solución débil y entrópica de (3.1) y (3.2), si y sólo si  $u$  es solución clásica fuera de  $\Sigma$  que satisface la desigualdad (3.20) sobre cada  $\Sigma_j$  para todo  $k \in \Omega$ .*

*Demostración.* Si  $u$  es solución entrópica y débil, de clase  $C^1$  por pedazos, entonces es solución clásica fuera de  $\Sigma$  por la observación 2.9 (c). Sustituyendo el par de Kružkov en la desigualdad de entropía (3.18) obtenemos la desigualdad (3.20).

Inversamente, sea  $u$  una función de clase  $C^1$  por pedazos, que satisface (3.20) sobre  $\Sigma$  para todo  $k \in \Omega$  y que es solución clásica fuera de  $\Sigma$ . Si escogemos  $k = u_R \in \Omega$ , la desigualdad (3.20) toma la forma

$$\frac{d\hat{x}}{dt} |u_L - u_R| \leq [f(u)] \operatorname{sgn}[u]. \quad (3.21)$$

Análogamente, si tomamos  $k = u_L \in \Omega$ , la desigualdad (3.20) implica que

$$\frac{d\hat{x}}{dt} |u_L - u_R| \geq [f(u)] \operatorname{sgn}[u]. \quad (3.22)$$

Combinando (3.21) y (3.22), y dado que  $[u] \neq 0$ , llegamos a las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\frac{d\hat{x}}{dt} [u] = [f(u)]. \quad (3.23)$$

En virtud de que  $u$  es solución clásica fuera de  $\Sigma$  y que sobre  $\Sigma$  se cumplen las condiciones de salto de Rankine-Hugoniot,  $u$  es solución débil. Usando los argumentos de la prueba del lema 3.9 para el caso particular del par de Kružkov, se concluye que  $u$  satisface la desigualdad (3.16) para toda  $\phi \in \mathcal{D}_+$ . Aplicando el teorema 3.7, la solución es entrópica.  $\square$

Vamos a analizar algunas de las consecuencias de la desigualdad (3.20). En primer lugar, probaremos su equivalencia con la siguiente condición de entropía, conocida como la *condición de entropía generalizada* [128].

**Definición 3.11.** Una solución débil de (3.1), de clase  $C^1$  por pedazos, satisface la *condición de entropía generalizada* si en cada discontinuidad  $\Sigma$  se tiene que

$$\left( \alpha f(u_L) + (1 - \alpha) f(u_R) - f(\alpha u_L + (1 - \alpha) u_R) \right) \operatorname{sgn}[u] \leq 0, \quad \forall \alpha \in [0, 1]. \quad (3.24)$$

Notamos que la desigualdad (3.24) es cierta si tomamos  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = 1$ . Observamos también que en el caso  $u_R = u_L$  la desigualdad (3.24) se satisface trivialmente, por lo cual decimos simplemente que una solución de clase  $C^1$  por pedazos satisface la condición de entropía generalizada si se cumple (3.24) puntualmente sobre  $\Sigma$ .

**Lema 3.12.** *En la clase de soluciones débiles  $C^1$  por pedazos, las condiciones de entropía (3.20) y (3.24) son equivalentes.*

*Demostración.* Primero probaremos que la desigualdad (3.20) implica la condición (3.24). Fijemos un punto  $P \in \Sigma$  y supongamos que en  $P$ ,  $u_R \neq u_L$ . Sea  $I$  el intervalo abierto en  $\mathbb{R}$ ,  $I = (u_R, u_L)$  ó  $I = (u_L, u_R)$ , según el signo de  $[u]$ . Hemos probado que (3.20) implica (3.23), por lo que, en virtud de  $[u] \neq 0$ , la velocidad de  $\Sigma$  en  $P$  está dada por

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Tomemos  $\alpha \in (0, 1)$ . Entonces definiendo  $k := \alpha u_L + (1 - \alpha)u_R$ , tenemos que  $k \in I \subset [a, b]$ , con  $I$  abierto. De esta forma la desigualdad (3.20) implica que

$$(f(u_R) - f(k)) \operatorname{sgn}(u_R - k) - (f(u_L) - f(k)) \operatorname{sgn}(u_L - k) \leq \frac{d\hat{x}}{dt} (|u_R - k| - |u_L - k|).$$

Dado que  $0 < \alpha < 1$ , notamos que

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(u_R - k) &= \operatorname{sgn}(\alpha(u_R - u_L)) = \operatorname{sgn}(u_R - u_L) = \operatorname{sgn}[u] \\ \operatorname{sgn}(u_L - k) &= \operatorname{sgn}((1 - \alpha)(u_L - u_R)) = \operatorname{sgn}(u_L - u_R) = -\operatorname{sgn}[u]. \end{aligned}$$

Sustituyendo nuevamente, y usando la condición de Rankine-Hugoniot, obtenemos

$$\begin{aligned} (f(u_R) + f(u_L) - 2f(k)) \operatorname{sgn}[u] &\leq \frac{[f(u)]}{[u]} (|u_R - k| - |u_L - k|) \\ &= \frac{[f(u)]}{[u]} (|\alpha||u_R - u_L| - |1 - \alpha||u_R - u_L|) \\ &= \frac{[f(u)]}{[u]} |u_R - u_L| (\alpha - (1 - \alpha)) \\ &= [f(u)] \operatorname{sgn}[u] (2\alpha - 1), \end{aligned}$$

es decir,

$$(f(u_R) + f(u_L) - 2f(k) - [f(u)](2\alpha - 1)) \operatorname{sgn}[u] \leq 0.$$

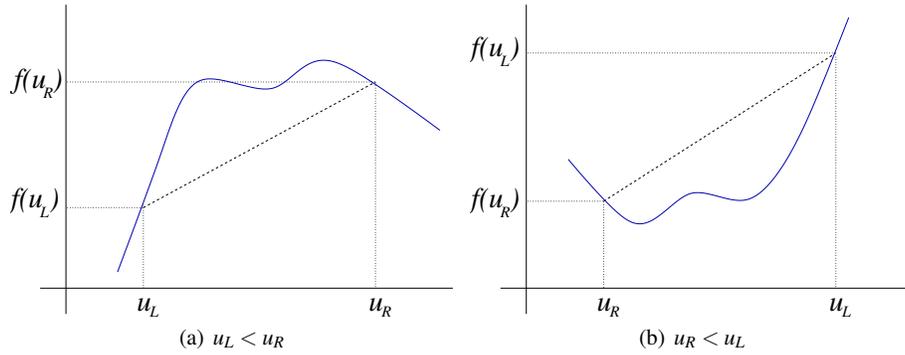
Simplificando la desigualdad anterior, llegamos a la condición de entropía generalizada (3.24) para  $\alpha \in (0, 1)$ . Si  $\alpha = 0$  ó  $\alpha = 1$  la desigualdad (3.24) se satisface trivialmente.

Inversamente, supongamos que (3.24) es válida en cada discontinuidad. Sea cualquier  $k \in \Omega = [a, b]$ . Si  $k \in I$  entonces se invierte el argumento anterior usando  $k = \alpha u_L + (1 - \alpha)u_R$ , con cierto  $\alpha \in (0, 1)$ , para obtener nuevamente la desigualdad (3.20). Si por el contrario  $k \notin I$  entonces tenemos dos casos:  $a \leq k \leq \min\{u_L, u_R\}$ , o bien,  $\max\{u_L, u_R\} \leq k \leq b$ . La desigualdad (3.20) toma la forma

$$f(u_R) - f(u_L) \leq \frac{d\hat{x}}{dt} (u_R - u_L),$$

en el primer caso, y

$$f(u_R) - f(u_L) \geq \frac{d\hat{x}}{dt} (u_R - u_L),$$



**Figura 3.2** La figura (a) muestra una discontinuidad admisible para el caso  $u_L < u_R$ , es decir, la gráfica de  $f$  restringida a  $(u_R, u_L)$  está situada por encima de su cuerda. La figura (b) respresenta el caso cuando  $u_R < u_L$ ; la discontinuidad es admisible si la gráfica de  $f$  restringida a  $(u_R, u_L)$  está situada por debajo de su cuerda.

en el segundo, las cuales se satisfacen en forma de igualdad gracias a la condición de Rankine-Hugoniot. Esto prueba (3.20) para cada  $k \in \Omega = [a, b]$ .  $\square$

La importancia de la desigualdad de entropía generalizada (3.24) radica en que constituye una relación geométrica muy simple sobre la función de flujo  $f$ , lo cual tiene muchas ventajas cuando consideramos aplicaciones concretas. Analicemos la interpretación geométrica de (3.24) dependiendo del signo de  $[u]$ .

#### Caso 1: $[u] > 0$

Si  $u_R > u_L$  entonces la desigualdad (3.24) toma la forma

$$\alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R) \leq f(\alpha u_L + (1 - \alpha)u_R), \quad (3.25)$$

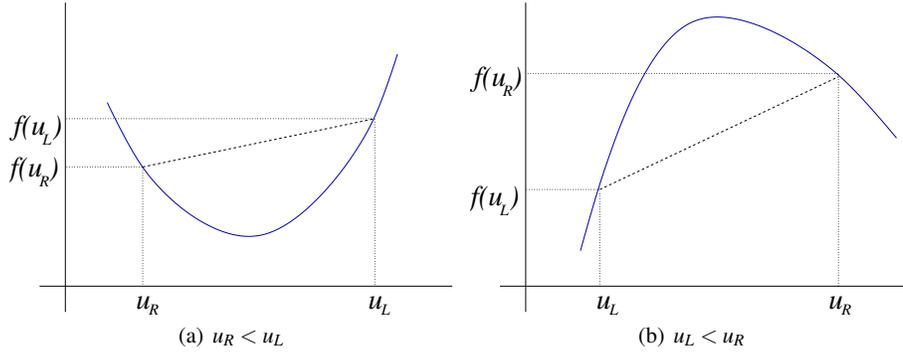
para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . Por lo tanto, la solución es entrópica (equivalentemente, toda posible discontinuidad es admisible) si y sólo si la gráfica de  $f$  restringida a  $(u_L, u_R)$  está situada por encima de su cuerda. Dicha cuerda tiene como ecuación

$$c(u) = \frac{[f(u)]}{[u]}(u - u_L) + f(u_L) = \alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R),$$

con

$$\alpha = -\frac{(u - u_R)}{[u]} \in [0, 1], \quad u \in [u_L, u_R].$$

Este caso se puede apreciar en la figura 3.2(a).



**Figura 3.3** Figura (a): si  $f$  es estrictamente convexa entonces la discontinuidad es admisible si y sólo si  $u_R < u_L$ . Figura (b): si  $f$  es estrictamente cóncava entonces la discontinuidad es admisible si y sólo si  $u_L < u_R$ .

**Caso 2:**  $[u] < 0$

Si  $u_R < u_L$  entonces la desigualdad (3.24) toma la forma

$$\alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R) \geq f(\alpha u_L + (1 - \alpha)u_R), \quad (3.26)$$

para todo  $\alpha \in [0, 1]$ . De este modo, en este caso la solución es entrópica (es decir, toda discontinuidad es admisible) si y sólo si la gráfica de  $f$  restringida a  $(u_R, u_L)$  está situada por debajo de su cuerda. Dicha cuerda tiene como ecuación

$$c(u) = \frac{[f(u)]}{[u]}(u - u_R) + f(u_R) = \alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R),$$

con

$$\alpha = -\frac{(u - u_R)}{[u]} \in [0, 1], \quad u \in [u_R, u_L].$$

Véase la figura 3.2(b).

**Ejemplo 3.13.** La condición (3.24) se simplifica considerablemente si la función  $f$  es estrictamente convexa o estrictamente cóncava.

- (a) Si  $f$  es estrictamente convexa (como ejemplo tenemos la ecuación de Burgers no viscosa, con  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ ), la gráfica está siempre bajo su cuerda. Por lo tanto, la discontinuidad es admisible si y sólo si  $u_R < u_L$  (ver figura 3.3(a)).
- (b) Si  $f$  es estrictamente cóncava, la gráfica de  $f$  siempre está por encima de su cuerda. Por lo tanto, la discontinuidad es admisible si y sólo si  $u_L < u_R$  (ver figura 3.3(b)).

### 3.2.3. Consecuencias de la condición de entropía generalizada

Las soluciones débiles de clase  $C^1$  por pedazos constituyen una clase especial de soluciones al problema de Cauchy, para las cuales la condición de entropía generalizada (3.24) y la desigualdad de entropía (3.11) son equivalentes. El lector habrá notado que la condición (3.24) tiene una interpretación geométrica muy simple y que es más fácil de verificar que (3.11). En esta sección vamos a analizar algunas consecuencias de la condición (3.24), entre las cuales destaca la unicidad de la solución entrópica en esta clase particular de soluciones. Motivados por la pérdida de unicidad de soluciones débiles, en la sección 2.4.4 introducimos tres condiciones de entropía que, por conveniencia del lector, escribimos aquí nuevamente.

#### La condición de entropía de Lax

Sea  $u$  una solución débil del problema de Cauchy y sea  $\Sigma$  una discontinuidad, parametrizada por  $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) : t \in I\}$ , con  $I \subset \mathbb{R}_+$  un intervalo. Si  $P \in \Sigma$  es cualquier punto sobre la discontinuidad, se definen los límites  $u_L$  y  $u_R$  a cada lado de  $\Sigma$  de la manera usual. Se dice que  $u$  satisface la *condición de entropía de Lax* sobre  $\Sigma$  si

$$f'(u_R) \leq s \leq f'(u_L), \quad (3.27)$$

para todo punto  $P$  de  $\Sigma$ , y donde  $s = d\hat{x}/dt$  es la velocidad de la discontinuidad en ese punto; por la condición de Rankine-Hugoniot,  $s = [f(u)]/[u]$ . La condición de Lax muestra que las características inciden en la discontinuidad de ambos lados, tal y como sucede en el caso de la onda de choque (2.53) para la ecuación de Burgers no viscosa (ver figura 2.6). Observamos también que en el caso estrictamente convexo,  $f'' > 0$  (equivalentemente, estrictamente cóncavo,  $f'' < 0$ ), las desigualdades en (3.27) son estrictas:

$$f'(u_R) < s < f'(u_L). \quad (3.28)$$

Cabe mencionar que, para el caso estrictamente convexo, la condición de entropía de Lax se reduce a  $u_R < u_L$ , como puede ser verificado sin dificultad.

#### La condición de Lax-Oleñnik

Claramente, la condición de entropía de Lax se deduce de la siguiente condición, conocida como la *condición de entropía de Lax-Oleñnik*:

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq s \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}, \quad (3.29)$$

para toda  $u$  entre  $u_L$  y  $u_R$ , límites izquierdo y derecho, respectivamente, en cada punto  $P$  de  $\Sigma$ . Esta condición tiene la misma interpretación geométrica que la condición de Lax.

**Lema 3.14.** *En el caso general, con  $f \in C^2$ , la condición de entropía generalizada (3.24) implica las condiciones de entropía de Lax (3.27), y de Lax-Oleñnik (3.29).*

*Demostración.* Suponiendo que  $u_R \neq u_L$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , y dividiendo (3.24) entre  $\alpha|u_R - u_L|$ , obtenemos

$$\frac{f(u_R) - f(\alpha u_L + (1 - \alpha)u_R)}{\alpha[u]} \leq \frac{[f(u)]}{[u]}.$$

Toda  $u$  entre  $u_L$  y  $u_R$  se puede escribir como  $u = \alpha u_L + (1 - \alpha)u_R$ , para cierta  $\alpha \in [0, 1]$ . Así,  $u - u_R = \alpha u_L + (1 - \alpha)u_R - u_R = -\alpha[u]$  y la desigualdad anterior implica (usando la condición de Rankine-Hugoniot) que

$$\frac{f(u) - f(u_R)}{u - u_R} \leq \frac{d\hat{x}}{dt}.$$

De la misma manera, pero ahora dividiendo (3.24) entre  $(1 - \alpha)|u_R - u_L|$ , podemos demostrar que

$$\frac{[f(u)]}{[u]} \leq \frac{f(u) - f(u_L)}{u - u_L}.$$

De este modo obtenemos la condición de entropía de Lax-Oleñnik (3.29) para toda  $u$  entre  $u_R$  y  $u_L$ . Claramente, la condición de Lax se deduce de la condición de Lax-Oleñnik cuando tomamos los límites cuando  $u \rightarrow u_R$ , y cuando  $u \rightarrow u_L$ , del lado izquierdo y derecho de la desigualdad, respectivamente.  $\square$

### La condición de Oleñnik (caso convexo)

En el caso estrictamente convexo se definió también (ver sección 3.2) lo que se conoce como la *condición de Oleñnik*: si  $f$  es estrictamente convexa, una solución débil es entrópica si existe una constante  $C > 0$  tal que para toda  $a \geq 0$  y todo  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$ , se tiene que

$$u(x + a, t) - u(x, t) < \frac{Ca}{t}. \quad (3.30)$$

Esta condición, introducida por Oleñnik en [176], tiene ventajas cuando se estudian métodos numéricos, ya que está formulada en términos de diferencias finitas.

**Lema 3.15.** *Cuando la función de flujo es estrictamente convexa,  $f'' > 0$ , la condiciones de entropía generalizada (3.24), de Lax (3.27), de Lax-Oleñnik (3.29), y de Oleñnik (3.30), son equivalentes.*

*Demostración.* En virtud del lema 3.14 y de que la condición de entropía generalizada se reduce a la condición de Lax en el caso convexo, es decir,  $u_R < u_L$ , basta con demostrar que las condiciones de Lax y de Oleñnik son equivalentes. Suponiendo que  $u$  es solución débil que cumple la condición (3.30), sea  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  un punto de discontinuidad de  $u$ . En ese caso, para todo  $\varepsilon > 0$

$$u(x + \varepsilon, t) - u(x - \varepsilon, t) < \frac{2C\varepsilon}{t}.$$

Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  obtenemos  $u_R - u_L < 0$ , que es la condición de Lax. Inversamente, supongamos que la condición de Lax se cumple en toda discontinuidad. Si  $(x, t)$  es un punto de continuidad de  $u$  entonces se tiene que

$$u(x + \varepsilon, t) - u(x - \varepsilon, t) < C(t)\varepsilon,$$

para todo  $\varepsilon > 0$ , donde  $C = C(t) > 0$  es una constante para  $t > 0$  fijo. Es posible demostrar que si  $f'' \geq \delta > 0$  entonces la constante es  $C(t) = 1/\delta t$  (ver ejercicio 3.1). Si  $(x, t)$  es un punto de discontinuidad de  $u$  entonces el salto debe ser negativo por la condición de Lax. Esto implica que  $u(x + \varepsilon, t) - u(x - \varepsilon, t) < 0 < C\varepsilon/t$ , para  $\varepsilon \sim 0^+$ . La desigualdad para todo  $\varepsilon > 0$  resulta de aplicar la condición de Oleñik en los puntos de continuidad de  $u$  a lo largo de la recta para  $t > 0$  fijo, hasta encontrar una discontinuidad a la derecha o a la izquierda. El valor de  $u = u_R$  en la discontinuidad a la izquierda debe ser mayor que el valor de  $u = u_L$  en la discontinuidad; asimismo, el valor de  $u = u_L$  en la discontinuidad a la derecha debe ser menor que el valor de  $u = u_R$  en la discontinuidad. De esta forma todos los posibles saltos de  $u$  (un conjunto numerable) a lo largo de la recta real con  $t > 0$  fijo tienen el mismo signo, y (3.30) es válida para todo  $a > 0$ .  $\square$

### Contracción en la norma $L^1$ : Unicidad

A continuación vamos a demostrar que la condición de entropía generalizada garantiza la unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy en la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos con un conjunto numerable de discontinuidades.

**Proposición 3.16.** *Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de clase  $C^2$  y sea  $u_0 \in L^\infty$  (acotada). Si el problema de Cauchy (3.1) - (3.2), tiene una solución débil de clase  $C^1$  por pedazos que satisface la condición de entropía generalizada, entonces es única.*

Esta proposición es consecuencia de un resultado más general.

**Teorema 3.17 (Contracción en la norma  $L^1$ ).** *Sea  $f$  de clase  $C^2$ , y sean  $u$  y  $v$  dos soluciones débiles en la clase de funciones  $C^1$  por pedazos, para las cuales todas sus discontinuidades satisfacen la condición de entropía generalizada. Entonces  $\|u(t) - v(t)\|_{L^1}$  es una función no creciente de  $t \geq 0$ .*

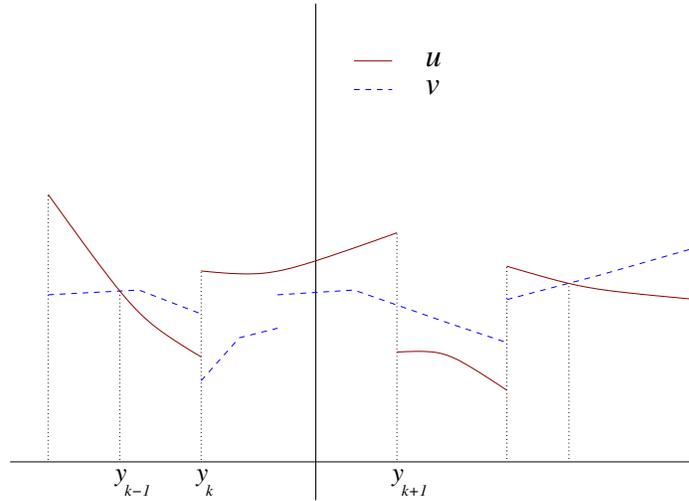
*Demostración.* Sean  $u$  y  $v$  dos soluciones entrópicas de la ley de conservación (3.1), que satisfacen, en toda discontinuidad, la condición de entropía generalizada (3.24). Denotamos

$$w := u - v,$$

Asimismo, denotamos la norma  $L^1$  de  $w$  como

$$r(t) := \|w(\cdot, t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |w(x, t)| dx = \sum (-1)^k \int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u - v)(x, t) dx, \quad (3.31)$$

donde los puntos  $y_k(t)$  son escogidos para cada  $t$  fijo de modo que



**Figura 3.4** Elección de los puntos  $y_k(t)$  para  $t$  fijo, tales que  $\text{sgn}(u(x,t) - v(x,t)) = (-1)^k$  para  $x \in (y_k(t), y_{k+1}(t))$ . La gráfica de  $u$  está representada por la línea continua (en rojo), y la de  $v$  por la línea punteada (en azul). Nótese que para cada  $k$  tenemos que, o bien  $u(\cdot, t)$  y  $v(\cdot, t)$  son continuas en  $y_k(t)$  (punto donde  $u = v$ ), o bien  $y_k(t)$  es un punto de discontinuidad de  $u$  o de  $v$ .

$$\text{sgn}(u(x,t) - v(x,t)) = (-1)^k, \quad \text{para cada } x \in (y_k(t), y_{k+1}(t)).$$

Los puntos  $y_k$  son funciones de  $t$  y la suma puede ser finita o infinita. La figura 3.4 muestra la forma de elegir los puntos  $y_k$ . Para cada  $k$  tenemos dos casos:

(i)  $y_k(t)$  es un punto de continuidad, tanto de  $u(\cdot, t)$  como de  $v(\cdot, t)$ . En estos puntos

$$u(y_k(t), t) = v(y_k(t), t).$$

(ii)  $y_k(t)$  es un punto de discontinuidad de  $u(\cdot, t)$  o de  $v(\cdot, t)$ . En este caso  $y_k(t)$  denota una curva de discontinuidad que satisface la condición de entropía.

Dado que  $u$  y  $v$  satisfacen la ley de conservación en sentido débil, si son continuas en el intervalo  $(a, b)$  entonces satisfacen el principio de conservación en forma integral (observación 2.9 (e)):

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x,t) dx = f(u(a,t)) - f(u(b,t)) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (f(u(a+\varepsilon,t)) - f(u(b-\varepsilon,t))). \quad (3.32)$$

Por lo tanto, derivando (3.31) con respecto a  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{dr}{dt} &= \sum (-1)^k \frac{d}{dt} \int_{y_k(t)}^{y_{k+1}(t)} (u-v)(x,t) dx \\
&= \sum (-1)^k \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( (u-v)(y_{k+1}(t) - \varepsilon, t) \frac{dy_{k+1}}{dt} - (u-v)(y_k(t) + \varepsilon, t) \frac{dy_k}{dt} + \right. \\
&\quad \left. + f(u(y_k(t) + \varepsilon, t)) - f(u(y_{k+1}(t) - \varepsilon, t)) + \right. \\
&\quad \left. + f(v(y_{k+1}(t) - \varepsilon, t)) - f(v(y_k(t) + \varepsilon, t)) \right), \quad (3.33) \\
&=: \sum (-1)^k (\rho_{k+1} - \rho_k),
\end{aligned}$$

donde  $\rho_j$  representa al sumando que involucra a  $y_j$ , con  $j = k+1$  o  $j = k$ . En el caso (i),  $u$  y  $v$  son continuas en  $y_k$  y además  $u(y_k, t) = v(y_k, t)$ , por lo que el sumando  $k$  en (3.33) es cero, y basta con sumar en la fórmula las contribuciones de los puntos de discontinuidad  $y_{k+1}$  de  $u$ , de  $v$ , o de ambos; es decir, es suficiente considerar el caso (ii). Supongamos, por ejemplo, que  $u$  es discontinua en  $y_{k+1}$ , el cual podría ser también un punto de discontinuidad de  $v$ . Si definimos

$$\begin{aligned}
u_R &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(y_{k+1} + \varepsilon), & v_R &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(y_{k+1} + \varepsilon), \\
u_L &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} u(y_{k+1} - \varepsilon), & v_L &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(y_{k+1} - \varepsilon),
\end{aligned}$$

entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $u_R < u_L$  (el caso contrario se analiza de manera análoga). Tenemos dos casos posibles:

- (a)  $v_L \in (u_R, u_L)$ ,
- (b)  $v_L \notin (u_R, u_L)$ .

En el caso (a) el signo de  $u - v$  es positivo en  $(y_k, y_{k+1})$ ; por ende  $(-1)^k = 1$  y  $k$  es par. Por la condición de Rankine-Hugoniot en la discontinuidad  $y_{k+1}(t)$  de  $u$ ,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L}.$$

Por inspección de los términos de la suma en (3.33), el sumando  $(-1)^k \rho_{k+1}$  tiene la forma

$$\begin{aligned}
(-1)^k \rho_{k+1} &= \rho_{k+1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left( (u-v)(y_{k+1} - \varepsilon) \frac{dy_{k+1}}{dt} + f(v(y_{k+1} - \varepsilon)) - f(u(y_{k+1} - \varepsilon)) \right) \\
&= (u_L - v_L) \left( \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} \right) + f(v_L) - f(u_L).
\end{aligned}$$

Notamos, sin embargo, que existe  $\alpha = (v_L - u_R)/(u_L - u_R) \in (0, 1)$ , tal que  $v_L = \alpha u_L + (1 - \alpha)u_R$ . Así, por la condición de entropía generalizada,

$$\begin{aligned}
\rho_{k+1} &= f(v_L) - (\alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R)) \\
&= \operatorname{sgn}(u_R - u_L) (\alpha f(u_L) + (1 - \alpha)f(u_R) - f(\alpha u_L + (1 - \alpha)u_R)) \leq 0.
\end{aligned}$$

La contribución del sumando  $(-1)^k \rho_{k+1}$  es no positiva.

En el caso (b) tenemos dos subcasos:

- (b<sub>1</sub>)  $v_L \geq u_L$ ,  
 (b<sub>2</sub>)  $v_L \leq u_R$ .

En el caso (b<sub>1</sub>) tenemos que si  $v_L = u_L$  entonces el sumando es cero,  $\rho_{k+1} = 0$ . Así, supongamos que  $v_L > u_L$ . Entonces  $u - v$  es negativo en  $(y_k, y_{k+1})$  y  $(-1)^k = -1$ , es decir,  $k$  es impar. Notamos también que, necesariamente,  $v_R \leq u_R < u_L < v_L$ , ya que de otro modo el signo de  $u - v$  seguiría siendo negativo a la derecha de  $y_{k+1}$ , contradiciendo la definición de los puntos  $y_k$ . Esto implica que  $y_{k+1}$  es también punto de discontinuidad de  $v$ , y la velocidad de la onda de choque se puede expresar también en términos de los valores de  $v$ , esto es,

$$\frac{dy_{k+1}}{dt} = \frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L}.$$

Dado que  $u_L \in [v_R, v_L)$ , entonces existe  $\alpha = (u_L - v_R)/(v_L - v_R) \in [0, 1)$ , tal que  $u_L = \alpha v_L + (1 - \alpha)v_R$ . De esta manera, usando la condición de entropía generalizada, obtenemos que

$$\begin{aligned} (-1)^k \rho_{k+1} &= -\rho_{k+1} = f(u_L) - f(v_L) + (v_L - u_L) \left( \frac{f(v_R) - f(v_L)}{v_R - v_L} \right) \\ &= \operatorname{sgn}(v_R - v_L) (f(\alpha v_L + (1 - \alpha)v_R) - (\alpha f(v_L) + (1 - \alpha)f(v_R))) \leq 0, \end{aligned}$$

y el sumando contribuye negativamente o cero. Similarmente se puede probar que la contribución del sumando es no positiva en el caso (b<sub>2</sub>).

De este modo, hemos demostrado que la suma en (3.33) es no positiva, y por lo tanto,

$$\frac{dr(t)}{dt} \leq 0,$$

para todo  $t > 0$ . □

*Demostración la proposición 3.16.* Sean  $u$  y  $v$  dos soluciones del problema de Cauchy. Entonces  $w = u - v$  tiene como condición inicial  $w(0) = 0$  c.d.s. Por el teorema 3.17

$$0 \leq \|u(\cdot, t) - v(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \|u(\cdot, 0) - v(\cdot, 0)\|_{L^1} = 0,$$

para todo  $t \geq 0$ , es decir,  $w = 0$ , c.d.s., y la solución es única. □

### 3.3. Solución entrópica para $f$ convexa: la fórmula de Lax-Hopf

En esta sección vamos a demostrar un teorema debido a Lax [124], el cual asegura existencia y unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy con condición inicial acotada, en el caso en el que la función de flujo  $f$  es estrictamente convexa. Notablemente, la solución está determinada por una fórmula explícita que se conoce como la *fórmula de Lax-Hopf* [124, 128]. A pesar de que la demostración no se puede extender al caso general no convexo, el método usado en esta sección es de gran interés pues revela rasgos importantes de las soluciones entrópicas, tales como el comportamiento asintótico para  $t$  grande.

### 3.3.1. El teorema de Lax

Consideremos la ley de conservación escalar

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (3.34)$$

en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.35)$$

donde  $u \in \mathbb{R}$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$ .

**Teorema 3.18 (Lax).** Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  estrictamente convexa, de clase  $C^2$  que satisface

$$f''(u) \geq \alpha > 0, \quad \text{para toda } u \in \mathbb{R},$$

$$f'(u) = a(u) \rightarrow \pm\infty, \quad \text{cuando } u \rightarrow \pm\infty.$$

Sea la condición inicial  $u_0 \in L^\infty$  (acotada). Entonces el problema de Cauchy (3.34), (3.35) admite una única solución entrópica  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); \mathbb{R})$ , que satisface la desigualdad

$$f'(u(x_2, t)) - f'(u(x_1, t)) \leq \frac{x_2 - x_1}{t} \quad (3.36)$$

para toda  $x_2 \geq x_1$  y toda  $t > 0$ . La solución entrópica está dada por la fórmula explícita

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - y(x, t)}{t}\right), \quad (3.37)$$

donde  $g = a^{-1}$  y  $y(x, t)$  es el valor único que minimiza la función

$$y \mapsto G(x, t, y) = t f^*\left(\frac{x - y}{t}\right) + \int_0^y u_0(x) dx. \quad (3.38)$$

Aquí,  $f^*$  denota la transformada de Legendre de  $f$  (véase apéndice A.3.2).

**Observación 3.19.** La desigualdad (3.36) es una condición más general que la desigualdad de entropía de Oleñnik, ya que esta última se deduce a partir de (3.36). Si tomamos  $2C = 1/\min f'' > 0$ , por el teorema del valor medio tenemos que

$$\frac{a(u(x_2, t)) - a(u(x_1, t))}{x_2 - x_1} = \frac{f''(u_0)(u(x_2, t) - u(x_1, t))}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{t},$$

para cierto  $u_0$  entre  $u(x_1, t)$  y  $u(x_2, t)$ , y para todo  $x_2 > x_1$ ; esto implica que

$$u(x + \varepsilon, t) - u(x, t) < \frac{C\varepsilon}{t}, \quad (3.39)$$

para todo  $(x, t)$ , con  $t > 0$ , y todo  $\varepsilon > 0$ , es decir, obtenemos la condición de entropía de Oleñnik.

**Observación 3.20.** En el caso de la ecuación de Burgers no viscosa tenemos  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$  y por lo tanto  $a(u) = u$  con inversa  $g(v) = v$ . De este modo  $f^*(u) = \frac{1}{2}u^2$  y la función (3.38) está dada por

$$G(x, t, y) = \frac{1}{2} \frac{(x-y)^2}{t} + \int_0^y u_0(x) dx.$$

La fórmula explícita (3.37) fue expresada por primera vez en el caso particular de flujo de Burgers por E. Hopf [94], razón por la cual la solución (3.37) recibe el nombre de *fórmula de Lax-Hopf* (o simplemente, *fórmula de Lax*).

**Observación 3.21.** La fórmula explícita de Lax-Hopf es posible gracias a que cuando la función de flujo es convexa, todas las características emanan de algún punto en el eje real cuando  $t = 0$ . En el caso general esto no es posible, ya que las características se pueden originar en una onda de choque *sónica*, es decir, cuando la velocidad coincide con una de las velocidades características,  $s = f'(u_L)$  o  $s = f'(u_R)$  (también llamada onda de choque característica). Existe, sin embargo, un caso en el que esto no ocurre para  $f$  arbitraria, que consiste en suponer que la condición inicial es monótona, lo cual implica que su primitiva es convexa. Esta notable observación se debe a Kunik [118] (para la demostración, véase Serre [196]):

**Proposición 3.22 (Kunik).** Sea  $u_0 \in L^\infty$  monótonamente creciente, y sea  $f \in C^2$ . Entonces la solución entrópica al problema de Cauchy (3.34) - (3.35) está dada por  $u(x, t) = \partial_x H(x, t)$ , donde

$$H(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}} (yx - tf(y) - U_0^*(y)),$$

$U_0$  es la primitiva (convexa) de  $u_0$ , y  $U_0^*$  denota a su transformada de Legendre.

### 3.3.2. Demostración del teorema de Lax

La demostración del teorema 3.18 que presentamos aquí está dividida en tres partes. La primera parte consiste en verificar que la fórmula de Lax-Hopf es correcta en el caso particular de una solución de clase  $C^1$  por pedazos que, además, tiene soporte compacto en el espacio-tiempo. Aunque no es propiamente parte de la demostración, este paso es muy ilustrativo ya que nos permite entender desde un punto de vista geométrico (mediante una construcción con el método de características) de dónde proviene la fórmula (3.37). La segunda parte consiste en la demostración de la existencia de la solución de Lax-Hopf y la verificación de la condición de entropía. La tercera y última parte es la prueba de unicidad. Hacemos notar que esta demostración es esencialmente diferente al principio de contracción en la norma  $L^1$  presentado en la sección 3.2.3, el cual se aplica solamente a soluciones entrópicas de clase  $C^1$  por pedazos. La conclusión del teorema garantiza la unicidad de la solución de Lax-Hopf en la clase de todas las soluciones entrópicas de la ley de conservación.

### Representación para una solución $u$ de clase $C^1$ por pedazos

Primero vamos a verificar que la fórmula de Lax (3.37) - (3.38) es válida en el caso de una solución de clase  $C^1$  por pedazos con soporte compacto, y que satisface, en cada una de sus discontinuidades, la desigualdad de Lax (3.27). Asumiendo que  $u(x, t)$  es una solución de este tipo, definimos

$$U(x, t) := \int_{-\infty}^x u(\zeta, t) d\zeta,$$

$$U_0(x) := U(x, 0).$$

Es posible normalizar la función de flujo<sup>1</sup>  $f$  tal que, sin pérdida de generalidad,  $f(0) = 0$ .

De este modo integramos la ecuación (3.34) (ya que  $u$  es de clase  $C^1$  por pedazos y la ley de conservación (3.34) se satisface c.d.s.), de tal manera que

$$0 = \int_{-\infty}^x u_t(y, t) + f(u)_y dy = \partial_t \int_{-\infty}^x u(y, t) dy + f(u(x, t)) - f(u(-\infty, t)).$$

Nótese que  $u(-\infty, t) \equiv 0$  para toda  $t \geq 0$ , ya que  $u$  es de soporte compacto y  $f(0) = 0$ ; por lo tanto,

$$U_t + f(U_x) = 0, \quad \text{c.d.s.} \quad (3.40)$$

En virtud de que  $f$  es estrictamente convexa, tenemos que para toda  $v \in \mathbb{R}$  se cumple la siguiente desigualdad  $f(U_x) \geq a(v)(U_x - v) + f(v)$ , y por ende,

$$U_t + a(v)U_x \leq va(v) - f(v), \quad \text{para toda } v \in \mathbb{R}. \quad (3.41)$$

Fijemos  $v \in \mathbb{R}$ . Para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  dados, consideremos la característica que pasa por  $(x, t)$  con pendiente  $a(v)$  y que intersecta al eje  $t = 0$  en el punto  $y(x, t) = x - a(v)t$ . Esta característica se puede parametrizar de la siguiente manera,

$$\Gamma_{(x,t)} = \{(\xi(\sigma), \sigma) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) : \xi(\sigma) = a(v)\sigma + y(x, t) = a(v)(\sigma - t) + x\}.$$

Integremos (3.41) a lo largo de  $\Gamma_{(x,t)}$  para  $\sigma \in (0, t)$ ; obtenemos,

$$\int_0^t U_t(a(v)(\sigma - t) + x, \sigma) + a(v)U_x(a(v)(\sigma - t) + x, \sigma) d\sigma \leq t(va(v) - f(v)).$$

Derivando  $U$  con respecto a  $\sigma$  a lo largo de la característica, se tiene que

$$\frac{d}{d\sigma} U(\xi(\sigma), \sigma) = U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(v)U_x(\xi(\sigma), \sigma),$$

y, por lo tanto,

$$U(x, t) \leq U(y, 0) + t(va(v) - f(v)). \quad (3.42)$$

Sea  $g$  la función inversa de  $a$ . Dado que  $(x - y)/t = a(v)$  obtenemos

<sup>1</sup> Basta con redefinir  $f(u) \rightarrow f(u) - f(0)$ , conservando convexidad y regularidad.

$$v = g\left(\frac{x-y}{t}\right).$$

Sustituyendo en (3.42) llegamos a la desigualdad

$$\begin{aligned} U(x,t) &\leq U(y,0) + t \left( \left( \frac{x-y}{t} \right) g\left(\frac{x-y}{t}\right) - f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) \right) \\ &= U(y,0) + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right). \end{aligned}$$

Esta desigualdad se cumple para todo  $v \in \mathbb{R}$ , y dado que  $y(x,t) = x - a(v)t$ , también es cierta para toda  $y \in \mathbb{R}$ . De este modo hemos probado que

$$U(x,t) \leq U_0(y) + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right), \quad (3.43)$$

para toda  $y \in \mathbb{R}$ . En particular, para  $(x,t)$  dados, la desigualdad (3.43) se cumple para el valor  $\hat{y}(x,t)$  tal que

$$g\left(\frac{x-\hat{y}(x,t)}{t}\right) = u(x,t). \quad (3.44)$$

Este valor  $\hat{y}$  existe ya que  $g = a^{-1}$  y  $a$  es sobre. Otra manera de escribir (3.44) es

$$a(u(x,t))t = x - \hat{y}(x,t). \quad (3.45)$$

A continuación vamos a demostrar que dicho valor de  $\hat{y}$  minimiza el lado derecho de la desigualdad (3.43), la cual se cumple en forma de igualdad. La fórmula (3.45) nos sugiere considerar la característica con pendiente  $a(u(x,t))$  que pasa por  $(x,t)$ . Así, para  $(x,t)$  dado y fuera de una discontinuidad  $\Sigma$  de  $u$ , consideramos la característica

$$\xi(\sigma) = a(u(x,t))(\sigma - t) + x, \quad \sigma \in (0,t). \quad (3.46)$$

Dicha característica intersecta el eje  $t = 0$  en el punto  $\xi(0) = \hat{y}(x,t)$  siempre y cuando no intersecte a otra discontinuidad  $\Sigma'$  para tiempos menores a  $t > 0$ . Podemos garantizar esto ya que, por hipótesis,  $u$  es solución de clase  $C^1$  por pedazos que satisface la condición de entropía de Lax. En efecto, supongamos que  $(x,t)$  está fuera de una discontinuidad  $\Sigma$  y argumentando por contradicción, supongamos que si trazamos la característica hacia atrás en el tiempo, ésta intersecta a una segunda discontinuidad  $\Sigma'$  (ver figura 3.5).

De este modo,  $u$  permanece constante a lo largo de la característica, la cual intersecta al eje  $t = 0$  en el único punto  $\hat{y}(x,t)$ . Dado que  $U_x = u$ , tenemos para todo  $\sigma \in (0,t)$ ,

$$U_t(\xi(\sigma), \sigma) = -f(u(\xi(\sigma), \sigma)),$$

y  $u(x,t) = u(\xi(\sigma), \sigma)$ . En consecuencia,

$$\begin{aligned} U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(u(\xi(\sigma), \sigma))U_x(\xi(\sigma), \sigma) &= a(u(\xi(\sigma), \sigma))u(\xi(\sigma), \sigma) - f(u(\xi(\sigma), \sigma)) \\ &= a(u(x,t))u(x,t) - f(u(x,t)), \end{aligned}$$

para toda  $\sigma \in (0, t)$ . Integrando esta igualdad en  $\sigma \in (0, t)$  obtenemos

$$\begin{aligned} U(x, t) - U(\hat{y}(x, t), 0) &= \int_0^t \frac{d}{d\sigma} U(\xi(\sigma), \sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t U_t(\xi(\sigma), \sigma) + a(u(\xi(\sigma), \sigma))U_x(\xi(\sigma), \sigma) d\sigma \\ &= \int_0^t a(u(x, t))u(x, t) - f(u(x, t)) d\sigma \\ &= t(a(u(x, t))u(x, t) - f(u(x, t))) \\ &= t f^* \left( \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} \right). \end{aligned}$$

Hemos probado que la desigualdad (3.43) se cumple en forma de igualdad para  $y = \hat{y}(x, t)$ , valor para el cual el lado derecho alcanza su mínimo, y adicionalmente tenemos la representación (3.44) para la solución  $u$ . Podemos concluir que la fórmula de Lax (3.37) - (3.38) es, por lo tanto, válida para una solución  $u$  de clase  $C^1$  por pedazos y con soporte compacto que satisface la condición de Lax en cada discontinuidad.

**Existencia**

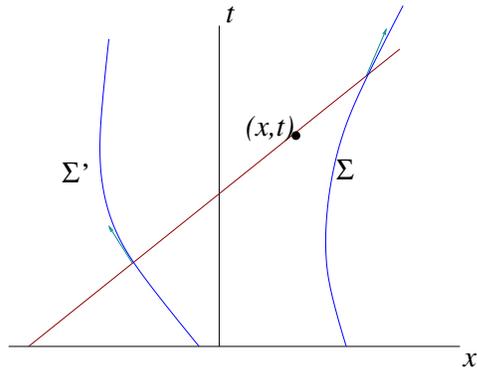
El siguiente paso consiste en demostrar la parte de existencia del teorema de Lax. Dado que la condición inicial es acotada,  $u_0 \in L^\infty$ , podemos definir

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x) dx. \tag{3.47}$$

Nuevamente normalizamos  $f$  de modo que  $f(0) = 0$ . Dado que  $f$  es estrictamente convexa y  $\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \pm\infty$ , podemos definir, para todo  $(x, t)$  con  $t > 0$ , y  $y \in \mathbb{R}$ , la función

$$G(x, t, y) := U_0(y) + t f^* \left( \frac{x - y}{t} \right). \tag{3.48}$$

**Figura 3.5** Si la solución  $u$  satisface la condición de Lax, entonces una característica con pendiente  $a(u(x, t))$  para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  fijo y fuera de una discontinuidad  $\Sigma$ , no intersecta a otra discontinuidad  $\Sigma'$  para tiempos menores a  $t > 0$ . En la gráfica, la discontinuidad viola la condición de Lax, pues la característica que “entra” en  $\Sigma$  aparenta “salir” de  $\Sigma'$ .



Notamos que la transformada de Legendre de  $f$  satisface

$$f^*(a(0)) = a(0)g(a(0)) - f(g(a(0))) = -f(0) = 0,$$

ya que  $g = a^{-1}$  y habiendo usado (A.8). Asimismo, en virtud de que  $df^*/dv = g(v)$  y de que  $f^*$  es estrictamente convexa, concluimos que  $f^*$  tiene un mínimo global en  $v = a(0)$  y por lo tanto

$$f^*(v) \geq 0, \quad f^*(v) \rightarrow +\infty \text{ cuando } |v| \rightarrow +\infty.$$

Más aún,  $f^*$  crece más rápido que cualquier función lineal ya que

$$\lim_{v \rightarrow \pm\infty} df^*/dv = \lim_{v \rightarrow \pm\infty} g(v) = \pm\infty.$$

Por otro lado, el término  $\int_0^y u_0 dx$  crece, a lo más, linealmente, en virtud de que  $u_0$  es acotada. Por continuidad de  $G$  y las observaciones anteriores concluimos que para  $(x, t)$  fijo,

$$G(x, t, y) \rightarrow +\infty \text{ cuando } y \rightarrow \pm\infty.$$

Esto implica que para  $(x, t)$  fijo  $G$  alcanza su mínimo en algún punto  $y = y(x, t)$ , el cual puede no ser único. Sea  $y(x, t)$  cualquiera de esos puntos que minimizan a  $G$ . Vamos a demostrar que el mapeo  $x \mapsto y(x, t)$  es no decreciente para todo  $t > 0$  fijo, lo cual es un corolario del siguiente

**Lema 3.23.** *Para  $x_1, x_2, y$  y  $t > 0$  dados, sean  $y_1$  y  $y_2$  dos valores para los cuales las funciones  $G(x_1, t, y)$  y  $G(x_2, t, y)$  alcanzan su mínimo, respectivamente. Si  $x_2 > x_1$  entonces  $y_2 \geq y_1$ .*

*Demostración.* Sea

$$H(s) := f^*(\sigma + s) - f^*(\sigma) + f^*(\tau - s) - f^*(\tau),$$

para  $\sigma < \tau$  fijos y cualquier  $s \in (0, \tau - \sigma)$ . Dado que  $f^*$  es estrictamente convexa tenemos que

$$\frac{f^*(\sigma + s) - f^*(\sigma)}{s} < \frac{f^*(\tau) - f^*(\tau - s)}{s}, \quad s \in (0, \tau - \sigma)$$

(ver figura 3.6). Esto implica que  $H(s) < 0$ . Notamos también que  $H(0) = 0$ , y que  $H(\tau - \sigma) = 0$ . Por lo tanto, bajo estas hipótesis  $H$  es negativa entre 0 y  $\tau - \sigma$  y  $H(0) = H(\tau - \sigma) = 0$ .

Sean  $x_1 < x_2$  y definamos

$$s := \frac{x_2 - x_1}{t} > 0, \quad \tau := \frac{x_2 - y_2}{t}, \quad \sigma := \frac{x_1 - y_1}{t}.$$

Argumentando por contradicción, supongamos que  $y_2 < y_1$ . En este caso tenemos que

$$s + \sigma = \frac{x_2 - y_1}{t} < \frac{x_2 - y_2}{t} = \tau,$$

es decir,  $s \in (0, \tau - \sigma)$ , con  $\tau > \sigma$ . Por convexidad tenemos, por lo tanto, que  $H(s) < 0$ , lo cual implica la desigualdad

$$f^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) + f^* \left( \frac{x_1 - y_2}{t} \right) < f^* \left( \frac{x_2 - y_2}{t} \right) + f^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right). \quad (3.49)$$

Por hipótesis,  $y_1$  minimiza a  $G(x_1, t, y)$ , por lo que

$$\begin{aligned} G(x_2, t, y_1) &= G(x_1, t, y_1) + t f^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) - t f^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) \\ &\leq G(x_1, t, y_2) + t f^* \left( \frac{x_2 - y_1}{t} \right) - t f^* \left( \frac{x_1 - y_1}{t} \right) \\ &< G(x_1, t, y_2) + t f^* \left( \frac{x_2 - y_2}{t} \right) - t f^* \left( \frac{x_1 - y_2}{t} \right) \\ &= U_0(y_2) + t f^* \left( \frac{x_2 - y_2}{t} \right) \\ &= G(x_2, t, y_2), \end{aligned}$$

tras haber usado la desigualdad (3.49). Sin embargo, esta última desigualdad contradice el hecho de que  $y_2$  minimiza a  $G(x_2, t, y)$ .  $\square$

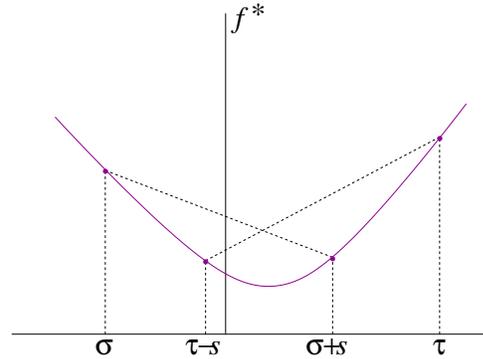
**Corolario 3.24.** *El mapeo  $x \mapsto y(x, t)$ , donde  $y(x, t)$  es cualquier mínimo de  $G(x, t, y)$ , es no decreciente.*

La monotonicidad nos garantiza, a su vez, continuidad casi donde sea (ver [13], teorema 5.6.4, pág. 151):

**Proposición 3.25.** *Si para  $t$  fijo,  $y(x, t)$  es una función no decreciente de  $x$ , entonces  $y(x, t)$  es continua en  $x$  excepto en un conjunto numerable de puntos.*

En un punto de continuidad de  $y(\cdot, t)$ , éste es el único valor de  $y$  que minimiza a  $G$ . Para probar esto, sean  $y_-(x, t)$  y  $y_+(x, t)$  los valores más pequeño y más grande, respectivamente, que minimizan a  $G(x, t, y)$  para cada  $(x, t)$  fijo. Por definición,  $y_-(x, t) \leq y(x, t) \leq y_+(x, t)$ . Por otro lado, si  $x_2 > x_1$ , por el lema 3.23 tenemos que  $y(x_1, t) \leq y_-(x_2, t)$ , y  $y_+(x_1, t) \leq y(x_2, t)$ . Si  $x_0$  es un punto de continuidad de  $y(x, t)$ , tomando  $x_2 = x_0 + \varepsilon$  y  $x_1 = x_0 - \varepsilon$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, obtenemos

**Figura 3.6** Dado que  $f^*$  es estrictamente convexa tenemos que  $f^*(\sigma + s) + f^*(\tau - s) < f^*(\tau) + f^*(\sigma)$  para  $\sigma < \tau$  fijos y cualquier  $s \in (0, \tau - \sigma)$ .



$$\begin{aligned}
y_-(x_0, t) - y_+(x_0, t) &= (y_-(x_0, t) - y(x_0 - \varepsilon, t)) + (y(x_0 + \varepsilon, t) - y_+(x_0, t)) + \\
&\quad + (y(x_0 - \varepsilon, t) - y(x_0 + \varepsilon, t)) \\
&\geq -|y(x_0 + \varepsilon, t) - y(x_0 - \varepsilon, t)| \rightarrow 0,
\end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , ya que los primeros sumandos de lado derecho son no negativos. Como el lado izquierdo es independiente de  $\varepsilon$ , concluimos que  $y_-(x_0, t) \geq y_+(x_0, t)$ . De este modo,  $y_+(x, t) = y_-(x, t)$  para toda  $(x, t)$  excepto en valores de  $x$  donde  $y(x, t)$  es discontinua. En consecuencia, para todo  $t > 0$ , excluyendo a lo sumo un conjunto numerable de puntos en  $x$ , el valor  $y(x, t)$  que minimiza a  $G(x, t, y)$  está determinado de manera única. Denotamos a este valor como  $y = \hat{y}(x, t)$ .

En consecuencia, definimos para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  c.d.s.

$$u(x, t) := g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right), \quad (3.50)$$

donde  $g = a^{-1}$ ,  $a(u) = f'(u)$  y  $\hat{y}(x, t)$  es el único mínimo continuo de (3.48) salvo en un conjunto de medida cero. Para probar que (3.50) es solución débil del problema de Cauchy (3.34)-(3.35), definimos para cada  $n \in \mathbb{N}$  las siguientes aproximaciones

$$u_n(x, t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy}, \quad (3.51)$$

$$f_n(x, t) := \frac{\int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy}, \quad (3.52)$$

$$v_n(x, t) := \log \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy, \quad (3.53)$$

para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , c.d.s. Debemos verificar que las integrales en (3.51) - (3.53) existen.

**Lema 3.26.**  $G(x, t, y)$  es Lipschitz en  $y$ .

*Demostración.* Dado que  $f, g$  son  $C^1$  y  $u_0 \in L^\infty$  es acotada, estimamos

$$\begin{aligned}
|G(x, t, y_1) - G(x, t, y_2)| &\leq \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(x) dx \right| + \left| t f^*\left(\frac{x-y_1}{t}\right) - t f^*\left(\frac{x-y_2}{t}\right) \right| \\
&= \left| \int_{y_2}^{y_1} u_0(x) dx \right| + \\
&\quad + \left| t \left( \left(\frac{x-y_1}{t}\right) g\left(\frac{x-y_1}{t}\right) - f\left(g\left(\frac{x-y_1}{t}\right)\right) - \left(\frac{x-y_2}{t}\right) g\left(\frac{x-y_2}{t}\right) + f\left(g\left(\frac{x-y_2}{t}\right)\right) \right) \right| \\
&\leq C|y_2 - y_1| + \tilde{C}(x, t)|y_2 - y_1|.
\end{aligned}$$

Es decir, existe  $C(x, t) > 0$  tal que

$$|G(x, t, y_1) - G(x, t, y_2)| \leq C(x, t) |y_2 - y_1|.$$

□

Hemos observado que  $G(x, t, y) \rightarrow +\infty$  cuando  $|y| \rightarrow +\infty$ , siendo  $\hat{y}(x, t)$  el único mínimo de  $G$  (para  $(x, t)$  fijo). Por lo tanto para  $\delta > 0$ , tenemos que en  $|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta$ ,  $G$  es distinta de cero. Así, existe una constante  $\bar{C} = \bar{C}(x, t, \delta) > 0$  tal que

$$G(x, t, y) \geq \bar{C} |y - \hat{y}(x, t)| \geq \bar{C} \delta. \quad (3.54)$$

De este modo tenemos que

$$e^{-nG(x, t, y)} \leq e^{-n\bar{C}|y - \hat{y}(x, t)|},$$

para  $|y - \hat{y}(x, t)| > \delta$ . Así,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy &= \int_{|y - \hat{y}(x, t)| \leq \delta} e^{-nG(x, y, t)} dy + \int_{|y - \hat{y}(x, t)| > \delta} e^{-nG(x, y, t)} dy \\ &\leq C(n, x, t, \delta) + \int_{\mathbb{R}} e^{-n\bar{C}|y - \hat{y}(x, t)|} dy < +\infty. \end{aligned}$$

Como  $f$  y  $g$  son de clase  $C^1$ , las integrales en (3.51) - (3.53) existen, y  $u_n, f_n$  y  $v_n$  están bien definidas. Ahora bien, por la forma de  $G$  (3.48) y recordando que  $df^*/dv = g(v)$ , reconocemos que

$$\begin{aligned} G_t(x, t, y) &= f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) - \left(\frac{x-y}{t}\right)g\left(\frac{x-y}{t}\right) = -f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right), \\ G_x(x, y, t) &= g\left(\frac{x-y}{t}\right). \end{aligned}$$

De este modo diferenciando  $v_n$  obtenemos

$$\begin{aligned} (v_n)_x &= -\frac{n \int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} = -nu_n, \\ (v_n)_t &= \frac{n \int_{\mathbb{R}} f\left(g\left(\frac{x-y}{t}\right)\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, t, y)} dy} = nf_n. \end{aligned}$$

Dado que  $(v_n)_{xt} = (v_n)_{tx}$ , se tiene que  $(-nu_n)_t = (nf_n)_x$ , es decir,

$$(u_n)_t + (f_n)_x = 0. \quad (3.55)$$

Sin pérdida de generalidad podemos normalizar  $G$  y suponer que el único mínimo de  $G$  ocurre en  $y = \hat{y}(x, t)$  y que toma el valor

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) = 0.$$

El mínimo es único y la normalización no afecta la definición de  $u$  o de las aproximaciones  $u_n, f_n$ , salvo la de  $v_n$  por una constante. Tomemos  $\delta > 0$  arbitrario. Dado que  $G$  es Lipschitz en  $y$ , existe  $C_1 = C_1(x, t, \delta) > 0$  tal que

$$|G(x, t, y)| \leq C_1 |y - \hat{y}(x, t)|,$$

para todo  $|y - \hat{y}(x, t)| < \delta$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy &\geq \int_{\hat{y}(x, t) - \delta}^{\hat{y}(x, t) + \delta} e^{-nG(x, y, t)} dy \geq \int_{\hat{y}(x, t) - \delta}^{\hat{y}(x, t) + \delta} e^{-nC_1 |y - \hat{y}(x, t)|} dy \\ &= 2 \int_0^{\delta} e^{-nC_1 y} dy = \frac{2}{nC_1} (1 - e^{-nC_1 \delta}) \geq \frac{C_2}{n}, \end{aligned} \quad (3.56)$$

para todo  $n > 1/\delta$  y con  $C_2 > 0$  independiente de  $n$ .

Dado que  $g$  es de clase  $C^1$ , sea  $\tilde{C}(t) > 0$  la constante de Lipschitz de  $g(\cdot/t)$ . Usando la estimación (3.54) para  $|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta$  y (3.56) para  $|y - \hat{y}(x, t)| < \delta$  obtenemos

$$\begin{aligned} |u_n(x, t) - u(x, t)| &= \left| \frac{\int_{\mathbb{R}} g\left(\frac{x-y}{t}\right) e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy} - g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) \right| \\ &\leq \frac{\int_{\mathbb{R}} \left| g\left(\frac{x-y}{t}\right) - g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) \right| e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy} \\ &\leq \tilde{C}(t) \frac{\int_{\mathbb{R}} |y - \hat{y}(x, t)| e^{-nG(x, y, t)} dy}{\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(x, y, t)} dy} \\ &\leq \tilde{C}(t) \delta + \frac{n\tilde{C}(t)}{C_2} \int_{|y - \hat{y}(x, t)| \geq \delta} |y - \hat{y}(x, t)| e^{-nC_1 |y - \hat{y}(x, t)|} dy \\ &\leq \tilde{C}(t) \delta + 2n\tilde{C}(t) \int_0^{+\infty} ye^{-\tilde{C}ny} dy \\ &= \tilde{C}(t) \delta + \frac{C_3(t)}{n}. \end{aligned}$$

Tomando el límite cuando  $n \rightarrow +\infty$  obtenemos para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  fijo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n(x, t) - u(x, t)| \leq \tilde{C}(t) \delta.$$

Dado que  $\delta > 0$  es arbitrario, hemos probado que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n(x, t) = u(x, t),$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  c.d.s. Análogamente es posible demostrar<sup>2</sup> que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x, t) = f(u(x, t)).$$

<sup>2</sup> Se trata de la misma demostración, tomando  $\tilde{C}$  como la constante de Lipschitz de la composición  $(f \circ g)(\cdot/t)$ .

De este modo, podemos tomar el límite de la ley de conservación (3.55) en sentido distribucional. Multiplicando (3.55) por una función de prueba  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  e integrando por partes, llegamos a

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_t u_n + \phi_x f_n dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_n(x, 0) dx = 0. \quad (3.57)$$

Tenemos que definir  $u_n(x, 0)$ . Para ello recordamos que  $G_x = g\left(\frac{x-y}{t}\right)$ ; por lo tanto

$$G_x(x, t, \hat{y}(x, t)) = g\left(\frac{x - \hat{y}(x, t)}{t}\right) = u(x, t).$$

Sabemos que  $y = \hat{y}(x, t)$  minimiza a  $G(x, t, y)$ ; así,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) \leq G(x, t, x) = \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + t f^*(0),$$

es decir,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \leq Ct. \quad (3.58)$$

Por otra parte, por definición de  $\hat{y}(x, t)$ ,

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) = \min_{y \in \mathbb{R}} \left( \int_0^y u_0(\zeta) d\zeta + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right).$$

En consecuencia, podemos estimar

$$\begin{aligned} G(x, t, \hat{y}(x, t)) &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + \min_{y \in \mathbb{R}} \left( \int_x^y u_0(\zeta) d\zeta + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right) \\ &\geq \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + \min_{y \in \mathbb{R}} \left( -C|x-y| + t f^*\left(\frac{x-y}{t}\right) \right) \\ &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta + t \min_{z \in \mathbb{R}} \left( -C|z| + f^*(z) \right) \\ &= \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta - t \max_{z \in \mathbb{R}} \left( C|z| - f^*(z) \right). \end{aligned}$$

Por el lema A.8 sabemos que  $(f^*)^* = f$ , por lo cual,

$$\max_{z \in \mathbb{R}} (C|z| - f^*(z)) \leq \max_{v \in (0, C)} \max_{z \in \mathbb{R}} (vz - f^*(z)) = \max_{v \in (0, C)} (f^*)^*(v) = \max_{v \in (0, C)} f(v) =: C_0,$$

con  $C_0 > 0$  (por la normalización de  $f$  y por convexidad estricta). De esta forma hemos probado que

$$G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \geq -C_0 t. \quad (3.59)$$

Combinando con (3.58) obtenemos

$$\left| G(x, t, \hat{y}(x, t)) - \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta \right| \leq Ct,$$

y en consecuencia,

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} G(x, t, \hat{y}(x, t)) = \int_0^x u_0(\zeta) d\zeta.$$

Esto implica que  $G(x, 0, \hat{y}(x, 0)) = \int_0^x u_0 d\zeta$  c.d.s. y por lo tanto  $G_x(x, 0, \hat{y}(x, 0)) = u_0(x)$  c.d.s. De esta forma tomamos  $u_n(x, 0) = u_0(x)$  c.d.s., para obtener

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_t u_n + \phi_x f_n dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0. \quad (3.60)$$

Dado que  $\phi$  es de soporte compacto podemos tomar el límite cuando  $n \rightarrow +\infty$  dentro de la integral; por lo tanto,

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi_t u + \phi_x f(u) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0, \quad (3.61)$$

es decir,  $u$  es solución débil al problema de Cauchy (3.34) - (3.35). Esto prueba la existencia de la solución.

Finalmente, para verificar que es una solución entrópica, recordemos que el mapeo  $x \mapsto \hat{y}(x, t)$  es no decreciente. Por lo tanto, para todo  $x_1 \leq x_2$  y todo  $t > 0$ ,

$$\begin{aligned} f'(u(x_2, t)) - f'(u(x_1, t)) &= a(u(x_2, t)) - a(u(x_1, t)) \\ &= a\left(g\left(\frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t}\right)\right) - a\left(g\left(\frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t}\right)\right) \\ &= \frac{x_2 - \hat{y}(x_2, t)}{t} - \frac{x_1 - \hat{y}(x_1, t)}{t} \\ &\leq \frac{x_2 - x_1}{t}. \end{aligned}$$

Esto demuestra que la solución de Lax (3.50) satisface la condición (3.36) y por lo tanto es una solución entrópica. Para terminar la demostración del teorema 3.18 sólo basta probar unicidad.

### Unicidad

Sean  $u_1$  y  $u_2$  dos soluciones entrópicas. Definimos la variable  $w := u_2 - u_1$ , que satisface la ecuación lineal

$$w_t + (bw)_x = 0, \quad (3.62)$$

donde el coeficiente  $b = b(x, t)$  se define mediante

$$\begin{aligned} bw &:= f(u_2) - f(u_1) = \int_0^1 \frac{d}{d\theta} f(\theta u_2 + (1-\theta)u_1) d\theta \\ &= (u_2 - u_1) \int_0^1 a(\theta u_2 + (1-\theta)u_1) d\theta. \end{aligned}$$

En efecto, la ecuación (3.62) se satisface en sentido débil, ya que para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$

$$0 = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w\phi_t + bw\phi_x dxdt, \quad (3.63)$$

habiendo notado que  $w(x,0) = w_0(x) \equiv 0$  c.d.s. Para cada  $\varepsilon > 0$  definimos los alisamientos de  $u_2$  y  $u_1$  como  $u_2^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_2$ , y  $u_1^\varepsilon := \eta_\varepsilon * u_1$ , donde  $\eta_\varepsilon$  denota el alisador de Friedrichs en las variables  $x$  y  $t$ . Por propiedades del alisador de Friedrichs (ver Apéndice A) se tiene que

$$\|u_1^\varepsilon\|_\infty \leq \|u_1\|_\infty, \quad \|u_2^\varepsilon\|_\infty \leq \|u_2\|_\infty,$$

y, además,

$$u_1^\varepsilon \rightarrow u_1, \quad u_2^\varepsilon \rightarrow u_2, \quad \text{c.d.s.}, \quad \varepsilon \rightarrow 0^+.$$

Por la observación 3.19, las soluciones satisfacen la condición de Oleñik. Aplicando la definición del alisador

$$\frac{u^\varepsilon(x_2) - u^\varepsilon(x_1)}{x_2 - x_1} = \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \eta_\varepsilon(y) \frac{u(x_2 - y) - u(x_1 - y)}{x_2 - x_1} dy \leq \frac{C}{t} \int_{-\varepsilon}^\varepsilon \eta_\varepsilon = \frac{C}{t},$$

es decir,  $u_1^\varepsilon$  y  $u_2^\varepsilon$  satisfacen la condición de Oleñik. Dado que, además, son de clase  $C^\infty$ , obtenemos

$$\partial_x u_1^\varepsilon, \partial_x u_2^\varepsilon \leq \frac{C}{t}. \quad (3.64)$$

Definimos

$$b^\varepsilon(x, t) := \int_0^1 a(\theta u_2^\varepsilon + (1-\theta)u_1^\varepsilon) d\theta.$$

Por ende, la expresión (3.63) se puede escribir como

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w\phi_t + b^\varepsilon w\phi_x dxdt + \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} (b - b^\varepsilon)w\phi_x dxdt = 0. \quad (3.65)$$

Sea  $T > 0$  fijo, y sea  $\Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0, T]; \mathbb{R})$  una función suave de soporte compacto. Consideremos el siguiente problema de valores finales

$$\begin{aligned} v_t^\varepsilon + b^\varepsilon v_x^\varepsilon &= \Phi, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < t < T, \\ v^\varepsilon(x, T) &= 0, \quad x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (3.66)$$

La ecuación es lineal y se puede resolver mediante el método de características. Así, para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  fijo consideremos la solución  $\hat{x} = \hat{x}(s; x, t)$  a la ecuación de la característica,

$$\begin{aligned}\frac{d\hat{x}}{ds} &= b^\varepsilon(\hat{x}, s), \quad s \geq t, \\ \hat{x}(t) &= x,\end{aligned}$$

de modo que,

$$\frac{dv^\varepsilon}{ds}(\hat{x}(s), s) = v_s^\varepsilon + b^\varepsilon v_x^\varepsilon = \Phi(\hat{x}(s), s).$$

Integrando, la solución al problema (3.66) es

$$v^\varepsilon(x, t) := - \int_t^T \Phi(\hat{x}(s; x, t), s) ds. \quad (3.67)$$

La solución  $v^\varepsilon$  es única y suave. Dado que  $v^\varepsilon$  es acotada y que  $\Phi$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, T)$ , concluimos que  $v^\varepsilon$  tiene soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, T)$ . Por otra parte, para todo  $0 < \tilde{s} \leq t \leq T$  se tiene que

$$\begin{aligned}b_x^\varepsilon(x, t) &= \partial_x \int_0^1 a(\theta u_2^\varepsilon + (1-\theta)u_1^\varepsilon) d\theta \\ &= \int_0^1 f''(\theta u_2^\varepsilon + (1-\theta)u_1^\varepsilon) (\theta \partial_x u_2^\varepsilon + (1-\theta) \partial_x u_1^\varepsilon) d\theta \\ &\leq \frac{C}{t} \int_0^1 f''(\theta u_2^\varepsilon + (1-\theta)u_1^\varepsilon) d\theta \\ &\leq \frac{\tilde{C}}{t} \leq \frac{\tilde{C}}{\tilde{s}},\end{aligned} \quad (3.68)$$

en virtud de que  $f$  es convexa (y por ende, acotada en un dominio compacto), y habiendo aplicado (3.64). Definimos ahora

$$y^\varepsilon(s) := \frac{\partial}{\partial x_0} \hat{x}^\varepsilon(s; x_0, t_0), \quad s \geq t_0,$$

donde  $(x_0, t_0)$  es un punto fijo en  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$  con  $t_0 \leq T$ . Observamos que  $\hat{x}^\varepsilon(t_0; x_0, t_0) = x_0$ , por lo que  $y^\varepsilon(t_0) = 1$ . De esta manera,

$$\frac{\partial y^\varepsilon}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial \hat{x}^\varepsilon}{\partial x_0} = \frac{\partial}{\partial x_0} b^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon(s; x_0, t_0), s) = b_x^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon(s; x_0, t_0), s) \frac{\partial \hat{x}^\varepsilon}{\partial x_0} = b_x^\varepsilon y^\varepsilon.$$

Integrando y usando  $y^\varepsilon(t_0) = 1$  obtenemos

$$y^\varepsilon(s) = \exp\left(\int_{t_0}^s b_x^\varepsilon(\hat{x}^\varepsilon(s; x_0, t_0), s) ds\right).$$

Tomando  $\tilde{s} \leq t_0 \leq s \leq T$  y usando (3.68), se obtiene la cota

$$|y^\varepsilon(s)| = y^\varepsilon(s) \leq e^{\tilde{C}(-1+T/\tilde{s})}. \quad (3.69)$$

Por otra parte, derivando la solución  $v^\varepsilon$  con respecto a la variable espacial tenemos,

$$\begin{aligned}
v_x^\varepsilon &= -\partial_x \int_t^T \Phi(\hat{x}^\varepsilon(\sigma; x, t), \sigma) d\sigma \\
&= \int_T^t \Phi_x(\hat{x}^\varepsilon(\sigma; x, t), \sigma) \frac{\partial \hat{x}^\varepsilon}{\partial x} d\sigma \\
&= \int_T^t \Phi_x(\hat{x}^\varepsilon(\sigma; x, t), \sigma) y^\varepsilon(\sigma) d\sigma.
\end{aligned}$$

Así, usando la cota (3.69), concluimos que para toda  $s > 0$  existe una constante  $C_s > 0$ , independiente de  $\varepsilon$ , tal que

$$|v_x^\varepsilon| \leq C_s, \quad \text{en } \mathbb{R} \times [s, T]. \quad (3.70)$$

Finalmente se probará que

$$\int_{\mathbb{R}} |v_x^\varepsilon(x, t)| dx \leq M, \quad (3.71)$$

con cota uniforme  $M > 0$ , y para todo  $0 \leq t \leq \delta$  si  $\delta > 0$  es suficientemente pequeño. Para ello, escojamos  $0 < \delta \ll 1$  tal que  $\Phi \equiv 0$  en  $\mathbb{R} \times [0, \delta]$ , lo cual es posible ya que  $\Phi$  tiene soporte compacto para tiempos no negativos. De esta manera garantizamos que para todo  $t \in [0, \delta]$ ,  $v^\varepsilon$  es constante a lo largo de la curva característica  $\hat{x}^\varepsilon(s; x, t)$  con  $s \in [t, \delta]$ . Consideremos una partición finita en  $x$ , de la forma,

$$x_0 < x_1 < \dots < x_N,$$

y tomemos los puntos

$$y_0 < y_1 < \dots < y_N,$$

donde cada  $y_j$  se define como  $y_j(s) := \hat{x}_j^\varepsilon(s)$  para  $t \leq s < \delta$ , y  $\hat{x}_j^\varepsilon$  es la curva característica con condición inicial en  $x_j$ , es decir, es la solución al sistema

$$\begin{aligned}
\frac{d\hat{x}_j^\varepsilon}{ds} &= b^\varepsilon(\hat{x}_j^\varepsilon(s), s), \\
\hat{x}_j^\varepsilon(t) &= x_j.
\end{aligned}$$

En vista de que  $v^\varepsilon$  es constante a lo largo de la característica,

$$\sum_{j=1}^N |v^\varepsilon(x_j, t) - v^\varepsilon(x_{j-1}, t)| = \sum_{j=1}^N |v^\varepsilon(y_j(s), t) - v^\varepsilon(y_{j-1}(s), t)| \leq \text{var } v^\varepsilon(\cdot, \delta),$$

donde “var” denota la variación con respecto a  $x$  (ver apéndice A, sección A.4). Tomando el supremo sobre el conjunto de todas las posibles particiones finitas obtenemos la variación total, que para una función diferenciable  $h$  es simplemente  $\int |h'| dx$ . En consecuencia,

$$\int_{\mathbb{R}} |v_x^\varepsilon(x, t)| dx = \text{T.V. } v^\varepsilon(\cdot, t) \leq \text{T.V. } v^\varepsilon(\cdot, \delta) = \int_{\mathbb{R}} |v_x^\varepsilon(x, \delta)| dx.$$

Gracias a que  $v^\varepsilon$  es suave con soporte compacto, obtenemos inmediatamente (3.71). De esta forma, podemos sustituir  $\phi = v^\varepsilon$  en (3.65) y obtener

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt + \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b - b^\varepsilon) w v_x^\varepsilon \, dx dt + \int_\delta^T \int_{\mathbb{R}} (b - b^\varepsilon) w v_x^\varepsilon \, dx dt \\
&=: \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt + I_1^\varepsilon(\delta) + I_2^\varepsilon(\delta).
\end{aligned}$$

En vista de que  $u_1^\varepsilon \rightarrow u_1$  y  $u_2^\varepsilon \rightarrow u_2$  c.d.s., y usando la cota (3.70), por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, tenemos que  $I_2^\varepsilon(\delta) \rightarrow 0$  si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , para toda  $\delta > 0$ . Por otro lado, si  $0 < \delta < T$ , usando (3.71) se obtiene

$$|I_1^\varepsilon(\delta)| = \left| \int_0^\delta \int_{\mathbb{R}} (b - b^\varepsilon) w v_x^\varepsilon \, dx dt \right| \leq \delta C \max_{0 \leq t \leq \delta} \int_{\mathbb{R}} |v_x^\varepsilon(x, t)| \, dx \leq \delta CM.$$

Finalmente, tomando el límite cuando  $\delta \rightarrow 0^+$ , obtenemos

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} w \Phi \, dx dt = 0,$$

para toda función arbitraria  $\Phi$  de soporte compacto en  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Por lo tanto,

$$w = 0, \quad \text{c.d.s. en } \mathbb{R} \times [0, +\infty).$$

Hemos demostrado unicidad de la solución entrópica y concluimos así la prueba del teorema 3.18. □

**Ejemplo 3.27.** Consideremos la ecuación de Burgers no viscosa

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0, \quad (3.72)$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.73)$$

Nos interesa encontrar la única solución entrópica al problema de Cauchy. Observemos que la condición inicial es continua, aunque no de clase  $C^1$ . Sin embargo, es posible aplicar el método de características empleado en la demostración del lema 3.1 para hallar la solución clásica a este problema para tiempos cortos. La derivada de  $u_0$  es una función continua por pedazos,

$$u_0'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ -1, & 0 < x < 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

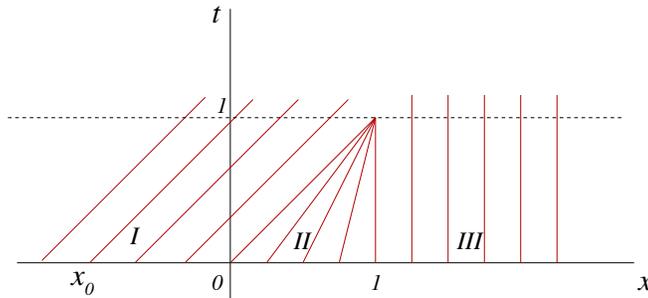
Usando los argumentos del lema 3.1, es fácil verificar que el tiempo de rompimiento (3.6) para esta ecuación está dado por

$$T_* = -\frac{1}{\inf_{\mathbb{R}} u_0'} = 1.$$

La curva característica que pasa por cualquier punto  $(x_0, 0)$  es

$$\bar{x}(t) = x_0 + tu_0(x_0) = \begin{cases} x_0 + t, & x_0 \leq 0 \\ x_0 + t(1 - x_0), & 0 \leq x_0 \leq 1 \\ x_0, & x_0 \geq 1 \end{cases}$$

Para tiempos cortos, más precisamente, para todo  $t < T_* = 1$ , las características no se intersectan; de este modo, para cada  $(x, t)$  fijo con  $t < 1$  existe un único punto  $x_0(x, t)$  tal que la característica pasa por  $(x_0(x, t), 0)$  (ver figura 3.7).



**Figura 3.7** Características para el problema de Cauchy (3.72) con condición inicial (3.73) para tiempos cortos. A partir del tiempo de rompimiento  $T_* = 1$  las características se intersectan. Nótese que las características que pasan por puntos de la forma  $(x_0, 0)$  con  $0 < x_0 < 1$  se intersectan en  $(1, 1)$ .

Las características se intersectan a tiempo  $t = 1$  y únicamente en el punto  $x = 1$  como se puede apreciar en la figura. Claramente si  $x < t$  (región I) entonces  $x_0 = x - t < 0$ . Si  $t < x < 1$  (región II) entonces  $x_0 = \frac{x-t}{1-t} \in (0, 1)$ . Si  $x > 1$  (región III) entonces  $x_0 = x$ . Así, la solución clásica para  $0 \leq t < 1$  está determinada por

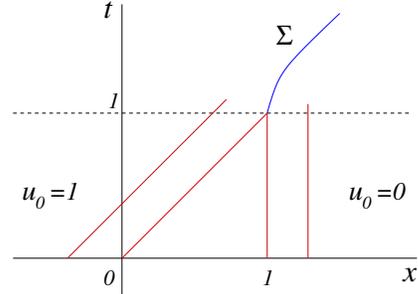
$$u(x, t) = u_0(x_0(x, t)) = \begin{cases} 1, & x \leq t \\ \frac{1-x}{1-t}, & t \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases} \quad 0 \leq t < 1. \quad (3.74)$$

La solución es continua en todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1)$ , como el lector puede fácilmente verificar, y la condición inicial se satisface de manera trivial. Notamos que  $u$  es diferenciable en el interior de las regiones I, II y III, y que satisface (3.72).

El teorema de Lax (teorema 3.18) garantiza la existencia y unicidad de la solución entrópica a este problema. Para extender la solución clásica mas allá del tiempo de rompimiento de manera entrópica vamos a suponer que  $u$  es  $C^1$  por pedazos, con una discontinuidad para  $t \geq 1$  dada por  $\Sigma = \{(\hat{x}(t), t) : t \in [1, +\infty)\}$ . Observemos que las características que pasan por puntos  $(x_0, 0)$  con  $x_0 < 0$  ó  $x_0 > 1$  no intersectan otras características antes de  $t \leq 1$ . Esto justifica que consideremos una sola discontinuidad  $\Sigma$  que “emana” del punto de intersección

(1, 1). Así, para puntos cerca de  $\Sigma$  la solución es constante y toma los valores  $u = 1$  ó  $u = 0$ , pues la característica que pasa por ellos intersecta a  $x_0 < 0$  ó a  $x_0 > 1$  (ver figura 3.8).

**Figura 3.8** Posible discontinuidad  $\Sigma$  para  $t > 1$  que “emana” del punto (1, 1). Para puntos  $(x, t)$  a la derecha o izquierda de  $\Sigma$  la solución es constante pues la característica intersecta a  $x < 0$  y la condición inicial es  $u_0 = 1$ , o bien intersecta a  $x > 1$  y la condición inicial es  $u_0 = 0$ .



En consecuencia, definimos la solución  $u$  para  $t \geq 1$  como  $u = 1$  a la izquierda de  $\Sigma$ , es decir, para  $x < \hat{x}(t)$ , y como  $u = 0$  a la derecha de  $\Sigma$ , con  $x > \hat{x}(t)$ . Por las condiciones de Rankine-Hugoniot, para todo punto sobre  $\Sigma$ , con  $u_R = 0$  y  $u_L = 1$  se tiene que

$$-\frac{d\hat{x}}{dt} = \frac{d\hat{x}}{dt}[u] = [\tfrac{1}{2}u^2] = -\frac{1}{2},$$

por lo que la discontinuidad  $\Sigma$  es una onda de choque con velocidad  $s = \frac{1}{2}$  que pasa por (1, 1),

$$\Sigma = \{(\hat{x}, t) : \hat{x}(t) = \tfrac{1}{2}(t + 1), t \in [1, +\infty)\},$$

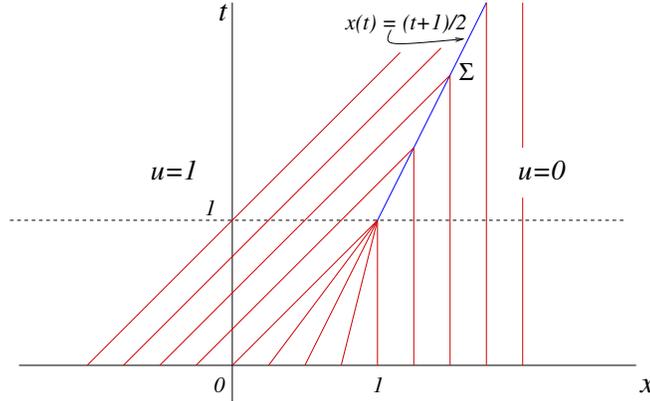
y la solución es

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < \tfrac{1}{2}(t + 1) \\ 0, & x > \tfrac{1}{2}(t + 1) \end{cases}, \quad 1 \leq t < +\infty. \quad (3.75)$$

La solución al problema está determinada por las fórmulas (3.74) y (3.75), y es de clase  $C^1$  por pedazos, con una discontinuidad en  $\Sigma$  (ver figura 3.9). La solución es entrópica pues sabemos que  $\Sigma$  es admisible en el caso convexo si y sólo si  $u_R < u_L$ . Por el teorema 3.18 la solución construída es la única solución entrópica.

### 3.3.3. Comportamiento asintótico de la solución de Lax. Ondas $N$ .

Una ventaja de contar con una fórmula explícita para la solución entrópica es que podemos estudiar directamente el comportamiento asintótico de dicha solución cuando  $t \rightarrow +\infty$ . En esta sección supondremos, como anteriormente, que  $f$  es de clase  $C^2$ , estrictamente convexa ( $f'' > 0$ ), normalizada de manera que  $f(0) = 0$ , y que la condición inicial es acotada  $u_0 \in L^\infty$ . Adicionalmente supondremos que  $u_0$  es integrable,



**Figura 3.9** Única solución entrópica para el problema de Cauchy (3.72), (3.73), definida por (3.74) for  $t > 1$ , y por (3.75) for  $t \geq 1$ . La solución es continua fuera de la onda de choque  $\Sigma = \{x = \frac{1}{2}(t+1) : t \geq 1\}$  que se propaga con velocidad  $s = 1/2$ .

$$\int_{\mathbb{R}} u_0 dx \in \mathbb{R}. \quad (3.76)$$

**Lema 3.28 (Comportamiento asintótico en la norma  $L^\infty$ ).** Existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (3.77)$$

para toda  $t > 0$ .

*Demostración.* Sea  $a_0 := a(0) = f'(0)$ . Por lo tanto  $g(a_0) = 0$  y  $f^*(a_0) = a_0 g(a_0) - f(g(a_0)) = 0$ , gracias a la normalización. Usando (A.9) tenemos también que  $(f^*)'(a_0) = g(a_0) = 0$ . Expandiendo  $f^*$  en serie de Taylor tenemos, para todo  $(x, t, y)$ ,

$$\begin{aligned} t f^* \left( \frac{x-y}{t} \right) &= t f^* \left( \frac{x-y-a_0 t}{t} + a_0 \right) \\ &= t \left( f^*(a_0) + (f^*)'(a_0) \left( \frac{x-y-a_0 t}{t} \right) + \theta \left( \frac{x-y-a_0 t}{t} \right)^2 \right) \\ &= \theta \frac{|x-y-a_0 t|^2}{t}, \end{aligned} \quad (3.78)$$

para cierto  $\theta > 0$ , ya que  $f^*$  es uniformemente convexa, y por lo tanto  $(f^*)'' > 0$ . Dado que  $u_0$  es integrable,

$$\left| \int_0^y u_0(x) dx \right| \leq \|u_0\|_{L^1} =: M,$$

y, por ende,

$$G(x, t, y) = \int_0^y u_0(x) dx + t f^* \left( \frac{x-y}{t} \right) \geq -M + \frac{\theta}{t} |x-y-a_0 t|^2.$$

Por otro lado,

$$G(x, t, x-a_0 t) = t f^*(a_0) + \int_0^{x-a_0 t} u_0(\zeta) d\zeta = \int_0^{x-a_0 t} u_0(\zeta) d\zeta \leq M,$$

y en el mínimo  $y = \hat{y}(x, t)$  de  $G(x, t, y)$  para  $(x, t)$  fijo tenemos la estimación

$$M \geq G(x, t, x-a_0 t) \geq G(x, t, \hat{y}(x, t)) \geq -M + \frac{\theta}{t} |x - \hat{y}(x, t) - a_0 t|^2,$$

es decir,

$$|x - \hat{y}(x, t) - a_0 t| \leq \frac{\sqrt{2M}}{\sqrt{\theta}} \sqrt{t}.$$

Esto implica que existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\frac{|x - \hat{y}(x, t) - a_0 t|}{t} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \quad (3.79)$$

Finalmente, dado que  $g$  es Lipschitz y  $g(a_0) = 0$ , para cada  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  obtenemos,

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \left| g \left( \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} \right) \right| = \left| g \left( \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} - a_0 + a_0 \right) - g(a_0) \right| \\ &\leq \tilde{C} \left| \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} - a_0 \right| \leq \frac{C}{\sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Esto demuestra (3.77).  $\square$

**Observación 3.29.** (a) La estimación (3.77) indica que la solución decae a cero cuando  $t \rightarrow +\infty$ , a orden  $O(t^{-1/2})$ , en la norma  $L^\infty$ .

(b) Supongamos que la condición inicial tiene soporte compacto, y que vale cero fuera del intervalo  $(-R, R)$  con  $R > 0$ . En este caso tenemos que la antiderivada

$$U_0(y) := \int_0^y u_0(x) dx,$$

es constante cuando  $|y| \geq R$ . De acuerdo con la estimación (3.79), el valor de  $y = \hat{y}(x, t)$  que minimiza  $G$  para  $(x, t)$  fijo está localizado dentro del intervalo

$$x - a_0 t - C\sqrt{t} \leq y \leq x - a_0 t + C\sqrt{t}.$$

Si  $x < a_0 t - C\sqrt{t} - R$  entonces  $\hat{y} < -R$  donde el valor de  $U_0$  es constante en  $y$ , y el mínimo de  $G(x, t, y)$  se alcanza en el mínimo de  $t f^*((x-y)/t)$ , que es  $\hat{y} = x - a_0 t$  (ya que  $g(a_0) = 0$ ). Análogamente, si  $x > a_0 t + C\sqrt{t} + R$  entonces el valor de  $y$  que minimiza  $G$  es  $\hat{y} = x - a_0 t$ . De este modo concluimos que  $u(x, t) = 0$  si

$$|x - a_0 t| > C\sqrt{t} + R.$$

Gracias a la estimación (3.79) podemos decir que cada solución, cuyo dato inicial  $u_0$  tiene soporte compacto, es, a tiempo  $t > 0$ , cero fuera de un intervalo con longitud de orden  $O(\sqrt{t})$ , mientras que dentro del intervalo  $u$  es de orden  $O(1/\sqrt{t})$ .

Vamos a dar un resultado más preciso del comportamiento asintótico de la fórmula de Lax, que involucra a la topología  $L^1$ . En virtud de la observación (3.29)(b), supongamos además que

$$u_0 \text{ tiene soporte compacto.} \quad (3.80)$$

Definimos entonces los parámetros

$$d := f''(0) > 0, \quad p := -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx, \quad q := 2 \max_{y \in \mathbb{R}} \int_y^{+\infty} u_0(x) dx.$$

Observamos que como  $u_0$  tiene soporte compacto, entonces

$$\int_{-\infty}^y u_0(x) dx \geq - \int_{\mathbb{R}} |u_0| dx > -\infty,$$

para toda  $y$ , es decir, el lado izquierdo está acotado inferiormente. Para  $y_0 < 0$ , con  $|y_0|$  suficientemente grande (esto es,  $(-\infty, y_0)$  fuera del soporte de  $u_0$ ), se tiene que

$$\int_{-\infty}^{y_0} u_0(x) dx = 0.$$

Por lo tanto

$$-\infty < \inf_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx \leq 0.$$

Como la integral es continua en  $y$  tenemos un mínimo no positivo, por lo cual  $p \geq 0$ . Del mismo modo se puede verificar que  $q \geq 0$ . Finalmente,

$$g'(a_0) = \frac{1}{f''(0)} = \frac{1}{d} > 0.$$

La observación 3.29(b) motiva directamente la siguiente definición.

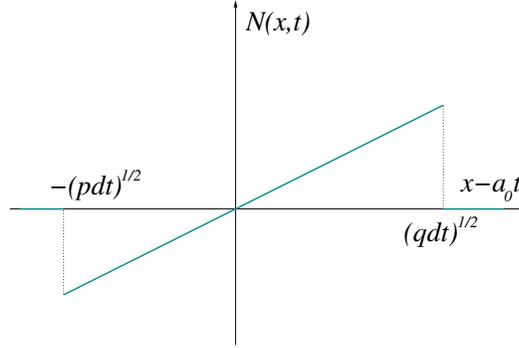
**Definición 3.30 (Onda  $N$ ).** Dados los parámetros  $p, q \geq 0$ ,  $d > 0$  y  $a_0$ , definimos la *onda  $N$*  como

$$N(x, t) := \begin{cases} \frac{1}{d} \left( \frac{x}{t} - a_0 \right), & -\sqrt{pdt} < x - a_0 t < \sqrt{qdt}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (3.81)$$

Para  $t$  fijo, la onda (3.81) luce tal y como se muestra en la figura 3.10. Notamos que la onda  $N$  se propaga con velocidad constante  $a_0$  y que, en el eje de referencia móvil  $\xi := x - a_0 t$ , ésta tiene la forma de una “ $N$ ” invertida; de ahí el nombre de onda  $N$ .

**Ejemplo 3.31.** (*Onda  $N$  para la ecuación de Burgers.*) Consideremos la ecuación de Burgers no viscosa

**Figura 3.10** Forma de la onda  $N$  definida en (3.81), que se propaga con velocidad constante  $a_0 = f'(0)$ . La figura muestra la gráfica de  $N(x, t)$  en el eje vertical, mientras que el eje horizontal corresponde a la coordenada móvil  $x - a_0 t$ . Nótese que la gráfica tiene la forma de una  $N$  invertida.



$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0,$$

con condición inicial

$$u_0(x) = \begin{cases} -1, & -1/2 < x < 0, \\ 1, & 0 < x < 1/2, \\ 0, & \text{otro caso.} \end{cases} \quad (3.82)$$

Claramente  $u_0$  tiene soporte compacto, es acotada y además es integrable con  $\int_{\mathbb{R}} u_0(x) dx = 0$ . Dado que la función de flujo es  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , los parámetros en cuestión están dados por  $a_0 = f'(0) = 0$  y  $d = f''(0) = 1$ . Además, claramente tenemos que

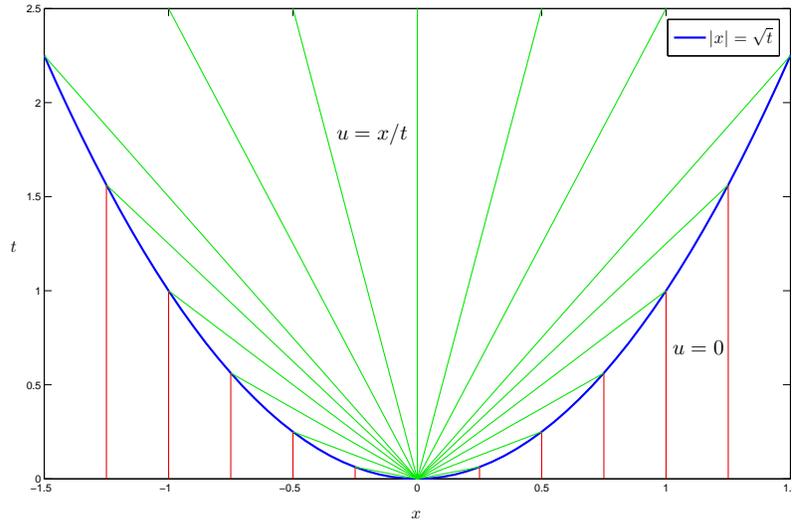
$$\int_{-\infty}^y u_0(x) dx = \begin{cases} -y - 1/2, & -1/2 \leq y \leq 0, \\ y - 1/2, & 0 \leq y \leq 1/2, \\ 0, & \text{otro caso,} \end{cases}$$

por lo cual  $p = -2 \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx = 1 > 0$ . Análogamente  $q = 1 > 0$ . De este modo, la onda  $N$  asociada a la ecuación de Burgers con condición inicial (3.82) tiene la forma

$$N(x, t) = \begin{cases} x/t, & |x| < \sqrt{t}, \\ 0, & |x| > \sqrt{t}. \end{cases} \quad (3.83)$$

Notamos que en la región  $|x| < \sqrt{t}$  la onda  $N$  es una onda de rarefacción, la cual está flanqueada en ambos lados por ondas de choque cuyas amplitudes decaen como  $O(1/\sqrt{t})$  y que se propagan con velocidades  $\pm 1/2\sqrt{t}$ . La onda de choque que se propaga a la derecha tiene como estados derecho e izquierdo a  $u_R = 0$  y a  $u_L = 1/\sqrt{t}$ , respectivamente, de modo que la condición de Rankine-Hugoniot se satisface. Lo mismo sucede con la onda de choque que se propaga a la izquierda. Un esquema de la solución (3.83) se puede apreciar en la figura 3.11.

**Observación 3.32.** Notamos que si se cumple que  $p = q = 0$  para los invariantes de la condición inicial (lo cual ocurre, por ejemplo, cuando la condición inicial es  $u_0 = 0$ ), claramente la onda  $N$  asociada y definida en (3.81) es la solución idénticamente cero. Por esta razón, para estudiar el comportamiento asintótico de la solución entrópica, supondremos que  $p > 0$  y  $q > 0$ .



**Figura 3.11** Esquema de la onda  $N = N(x, t)$  en el plano  $(x, t)$ , definida en (3.83) para la ecuación de Burgers  $u_t + (\frac{1}{2}u^2)_x = 0$ , con condición inicial (3.82). La solución autosimilar  $u = x/t$  está limitada por las curvas  $x = \pm\sqrt{t}$ .

**Teorema 3.33.** Si  $p > 0$  y  $q > 0$  entonces existe una constante  $C > 0$  tal que

$$\|u(\cdot, t) - N(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \frac{C}{\sqrt{t}}, \quad (3.84)$$

para todo  $t > 0$  suficientemente grande.

*Demostración.* Dado que  $g$  es de clase  $C^1$ , podemos hacer la expansión

$$u(x, t) = g\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t} + a_0\right) = g'(a_0)\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right) + O\left(\left|\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right|^2\right),$$

ya que  $g(a_0) = 0$ . En virtud de que  $g'(a_0) = 1/d$ , y por la estimación (3.79), obtenemos

$$\left|u(x, t) - \frac{1}{d}\left(\frac{x - a_0 t - \hat{y}(x, t)}{t}\right)\right| \leq \frac{C}{t}. \quad (3.85)$$

Por hipótesis,  $u_0$  tiene soporte compacto; por lo tanto existe  $R > 0$  tal que  $u_0 = 0$  fuera de  $|x| \leq R$ . Así,

$$\int_0^y u_0(x) dx = \begin{cases} W_+, & y \geq R, \\ W_-, & y \leq -R, \end{cases}$$

para valores constantes  $W_{\pm}$ , dados por

$$W_- := - \int_{-R}^0 u_0(x) dx, \quad W_+ := \int_0^R u_0(x) dx.$$

Denotemos

$$W(y) := \int_0^y u_0(x) dx.$$

De esta manera,

$$W(y) = \int_{-\infty}^y u_0(x) dx + \int_0^{-R} u_0(x) dx,$$

ya que  $u_0 = 0$  para  $y \leq -R$ . Por lo tanto,

$$\min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = \min_{y \in \mathbb{R}} \int_{-\infty}^y u_0(x) dx + W_- = -\frac{1}{2}p + W_-. \quad (3.86)$$

Igualmente es posible verificar que  $\min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = -\frac{1}{2}q + W_+$ . Definimos ahora la razón de decaimiento  $\mathcal{E}(t)$  como

$$\mathcal{E}(t) := \frac{A}{\sqrt{t}}, \quad (3.87)$$

para  $t > 0$ , siendo  $A > 0$  una constante que definiremos más adelante. Vamos a demostrar que para una  $A > 0$  apropiada:

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x - a_0 t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}, \quad (3.88)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{si} \quad x - a_0 t > R + (qd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (3.89)$$

Dado que  $d = f''(0) > 0$ , notamos que  $(f^*)''(a_0) = 1/d'(0) = 1/f''(0) = 1/d > 0$ . De este modo, usando las estimaciones (3.78) y (3.79) obtenemos

$$tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) = \theta \frac{|x-y-a_0t|^2}{t} = \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + O(1/\sqrt{t}).$$

para todo  $(x, t, y)$ . Así,

$$G(x, t, y) = \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}). \quad (3.90)$$

Consideremos el caso  $x - a_0 t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$ . Entonces  $W(x - a_0 t) = W_-$ , ya que  $x - a_0 t < -R$ , y por lo tanto

$$tf^*\left(\frac{x - (x - a_0 t)}{t}\right) + W(x - a_0 t) = tf^*(a_0) + W_- = W_-.$$

Si  $y \leq -R$  entonces

$$tf^*\left(\frac{x-y}{t}\right) + W(y) \geq W_-, \quad (3.91)$$

ya que  $W(y) = W_-$  si  $y \leq -R$  y  $f^* \geq 0$ . (Recordemos que, por la normalización,  $f^*(u) = ug(u) - f(g(u))$  tiene un mínimo global en  $u = a_0$  y  $f^*(a_0) = 0$ .) Por otra parte, si  $y \geq -R$ ,

usamos (3.90) y (3.86) para estimar

$$\begin{aligned} t f^* \left( \frac{x-y}{t} \right) + W(y) &\geq \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0 t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}) \\ &\geq \frac{1}{2} p (1 + \mathcal{E}(t)) + W_- - \frac{1}{2} p + O(1/\sqrt{t}) \\ &\geq \frac{1}{2} p \frac{A}{\sqrt{t}} + W_- + O(1/\sqrt{t}). \end{aligned}$$

Tomando  $A > 0$  suficientemente grande se obtiene  $\frac{1}{2} p A / \sqrt{t} + O(1/\sqrt{t}) \geq 0$ , por lo cual hemos probado que si se cumple  $x - a_0 t < -R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$  entonces tenemos la cota

$$t f^* \left( \frac{x-y}{t} \right) + W(y) \geq W_-, \quad (3.92)$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Esto implica, a su vez, que vamos a alcanzar el mínimo sólo cuando  $y = \hat{y}(x, t) = x - a_0 t$  ya que  $W(x - a_0 t) = W_-$  y  $f^*(a_0) = 0$ . De esta forma

$$u(x, t) = g \left( \frac{x - \hat{y}(x, t)}{t} \right) = g(a_0) = 0,$$

lo cual demuestra (3.88). La demostración de (3.89) es análoga.

Ahora probaremos que, para  $A$  y  $t$  suficientemente grandes,

$$\hat{y}(x, t) \geq -R \quad \text{si} \quad x - a_0 t = R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (3.93)$$

Sabemos que si  $y \leq -R$  la desigualdad (3.91) se cumple. Sea  $z \in \mathbb{R}$  tal que  $W(z) = \min_{y \in \mathbb{R}} W(y) = -\frac{1}{2} p + W_-$ , con  $|z| \leq R$ . Sustituyendo  $y = z$  en (3.90) obtenemos,

$$\begin{aligned} G(x, t, z) &= t f^* \left( \frac{x-z}{t} \right) + W(z) \\ &= \frac{1}{d} \frac{|x-y-a_0 t|^2}{2t} + W(y) + O(1/\sqrt{t}) \\ &\leq \frac{1}{d} \frac{pd(1 - \mathcal{E}(t))t}{2t} + W_- - \frac{1}{2} p + O(1/\sqrt{t}) \\ &\leq -\frac{p}{2} \frac{A}{\sqrt{t}} + W_- + O(1/\sqrt{t}) \\ &< W_-, \end{aligned}$$

si  $A$  es suficientemente grande. Por lo tanto, si  $x - a_0 t = R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$ , el mínimo  $\hat{y}(x, t)$  debe encontrarse en  $\hat{y}(x, t) \geq -R$ . Un argumento similar nos permite demostrar que

$$\hat{y}(x, t) \leq R \quad \text{si} \quad x - a_0 t = -R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}. \quad (3.94)$$

Sabemos que el mapeo  $x \mapsto \hat{y}(x, t)$  es no decreciente para  $t > 0$  fijo. Por lo tanto, usando (3.93) y (3.94), obtenemos la siguiente cota para  $\hat{y}(x, t)$ ,

$$|\hat{y}(x,t)| \leq R \quad \text{si} \quad R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} < x - a_0t < -R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}, \quad (3.95)$$

para  $t > 0$  suficientemente grande. Usando la estimación (3.85) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{C}{t} &\geq \left| u(x,t) - \frac{1}{d} \left( \frac{x - a_0t - \hat{y}(x,t)}{t} \right) \right| \\ &\geq \left| u(x,t) - \frac{1}{d} \left( \frac{x}{t} - a_0 \right) \right| - \left| \frac{\hat{y}(x,t)}{td} \right| \\ &\geq \left| u(x,t) - \frac{1}{d} \left( \frac{x}{t} - a_0 \right) \right| - \frac{R}{td}. \end{aligned}$$

Esto implica que

$$\left| u(x,t) - \frac{1}{d} \left( \frac{x}{t} - a_0 \right) \right| \leq \frac{\tilde{C}}{t}, \quad (3.96)$$

para  $R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} < x - a_0t < -R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}$ .

Finalmente vamos a descomponer la norma  $L^1$  de  $u - N$  en integrales en distintos intervalos sobre los cuales usaremos las estimaciones anteriores. Escribimos,

$$\|u(\cdot, t) - N(\cdot, t)\|_{L^1} = \int_{-\infty}^{+\infty} |u(x,t) - N(x,t)| dx = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

donde

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{-R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t} |N(x,t)| dx, \\ I_2 &= \int_{-R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t}^{R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t} |u(x,t) - N(x,t)| dx, \\ I_3 &= \int_{R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t}^{-R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t} |u(x,t) - N(x,t)| dx, \\ I_4 &= \int_{-R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t}^{R + (qd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t} |u(x,t) - N(x,t)| dx, \\ I_5 &= \int_{R + (qd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + a_0t}^{+\infty} |N(x,t)| dx, \end{aligned}$$

para  $t > 0$  suficientemente grande y en vista de (3.88) y (3.89). Notamos inmediatamente que  $I_1 = I_5 = 0$  ya que, por definición,  $N(x,t) = 0$  para  $x < -(pdt)^{1/2}$  y  $x > (qdt)^{1/2}$ . Usando la estimación (3.96), obtenemos

$$I_3 \leq \frac{C}{t} (2R + (qd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2}) \leq \frac{\tilde{C}}{\sqrt{t}}.$$

Dado que  $N = 0$  si  $x < -(pdt)^{1/2} + a_0t$ , descomponemos  $I_2$  de la siguiente manera,

$$I_2 = \int_{-R-(pd(1+\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t}^{-(pdt)^{1/2}+a_0t} |u(x,t)| dx + \int_{-(pdt)^{1/2}+a_0t}^{R-(pd(1-\mathcal{E}(t))t)^{1/2}+a_0t} |u(x,t) - N(x,t)| dx.$$

Observamos también que, por definición de la onda  $N$ , tenemos la razón de decaimiento  $|N(x,t)| \leq C/\sqrt{t}$ , en virtud de que  $N = (1/d)(x/t - a_0)$  para  $x - a_0t \leq O(t^{1/2})$ . Por lo tanto, usando la estimación (3.77), podemos acotar  $I_2$  de la siguiente forma

$$I_2 \leq \frac{C}{\sqrt{t}} (-(pdt)^{1/2} + R - (pd(1 + \mathcal{E}(t))t)^{1/2}) + \frac{\tilde{C}}{\sqrt{t}} (R - (pd(1 - \mathcal{E}(t))t)^{1/2} + (pdt)^{1/2}).$$

Expandiendo en serie de Taylor,

$$\begin{aligned} (t(1 \pm \mathcal{E}(t)))^{1/2} - t^{1/2} &= (t \pm At^{1/2})^{1/2} - t^{1/2} \approx \frac{1}{2}t^{-1/2}(\pm At^{1/2}) + O(t^{-1/2}) \\ &= O(1) + O(t^{-1/2}) = O(1), \end{aligned}$$

para  $t > 0$  suficientemente grande; así, concluimos que  $I_2 \leq C/\sqrt{t}$ . La integral  $I_4$  se estima de manera análoga. Esto prueba (3.84) y concluimos la demostración del teorema.  $\square$

### 3.4. El problema de Riemann

Como ya mencionamos en la sección 2.4.3, el problema de Riemann asociado a una ley de conservación escalar consiste en resolver la ecuación (3.34) con condición inicial de la forma

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases} \quad (3.97)$$

donde  $u_R \neq u_L$  son estados constantes. El problema de Riemann es un caso particular del problema de Cauchy donde la condición inicial toma dos valores constantes y distintos para  $x > 0$  y para  $x < 0$ .

#### 3.4.1. Soluciones autosimilares

Supongamos que  $u$  es una solución entrópica a (3.34) con condición inicial (3.97). Entonces,

$$u^\alpha(x,t) := u(\alpha x, \alpha t), \quad \alpha > 0,$$

es también solución entrópica de (3.34) con condición inicial  $u_0^\alpha(x) = u_0(\alpha x) = u_0(x)$ . Por unicidad de la solución entrópica (ver proposición 3.16), tenemos que  $u \equiv u^\alpha$  para todo  $\alpha > 0$ . Escogiendo  $\alpha = t^{-1}$  tenemos que  $u(x,t) = u(x/t, 1)$ , es decir,  $u$  es una solución *autosimilar* de la forma

$$u(x,t) = v(x/t).$$

La ecuación (3.34) se reduce en este caso a una ecuación ordinaria; sea  $\xi := x/t$ , de modo que la ley de conservación

$$u_t + f(u)_x = -\frac{\xi}{t}v'(\xi) + \frac{1}{t}f(v(\xi))_\xi = 0,$$

se convierte, informalmente, en el sistema

$$\begin{aligned} f(v(\xi))_\xi &= \xi v'(\xi), \\ v(-\infty) &= u_L, \\ v(+\infty) &= u_R. \end{aligned} \tag{3.98}$$

Este sistema se satisface en el sentido de distribuciones para soluciones discontinuas. Supongamos por el momento que  $v$  es de clase  $C^1$  y que  $u$  es solución clásica. Diferenciando tenemos

$$\frac{d}{d\xi}f(v(\xi)) = f'(v(\xi))v'(\xi) = a(v(\xi))v'(\xi) = \xi v'(\xi).$$

Así, la ecuación en (3.98) se satisface siempre que  $a(v(\xi)) = \xi$ . Por ejemplo, si  $f$  es convexa, esto es equivalente a  $v(\xi) = g(\xi)$ , donde  $g = a^{-1}$ . Gracias a la hiperbolicidad (y por ende, a la velocidad finita de propagación), si denotamos

$$\begin{aligned} M &:= \max_{u \in I[u_L, u_R]} |f'(u)|, \\ I[u_L, u_R] &:= \begin{cases} [u_L, u_R], & \text{si } u_L < u_R, \\ [u_R, u_L], & \text{si } u_L > u_R, \end{cases} \end{aligned} \tag{3.99}$$

entonces la solución toma los valores

$$u = \begin{cases} u_L, & x < -Mt, \\ u_R, & x > Mt. \end{cases}$$

De este modo introducimos la siguiente

**Definición 3.34.** Una *onda de rarefacción* centrada en  $(x_0, t_0)$ , con  $t_0 \geq 0$ , es una solución autosimilar de la forma

$$u(x, t) = v\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right),$$

definida en el sector  $-M(t - t_0) < x - x_0 < M(t - t_0)$ , para  $t > t_0$ , donde  $v$  es una función de clase  $C^1$  que satisface

$$a(v(\xi)) = \xi, \quad \xi \in [-M, M].$$

**Ejemplo 3.35.** Como vimos en la sección 2.4.3, para la ecuación de Burgers no viscosa (2.34) con  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , tenemos que  $a(u) = u$  y la onda de rarefacción centrada en  $(x_0, t_0) = (0, 0)$  tiene la forma (2.56).

### 3.4.2. El caso estrictamente convexo

En esta sección se demostrará que, si la función de flujo es estrictamente convexa, entonces la solución entrópica al problema de Riemann es siempre una onda de rarefacción ó una onda de choque.

**Teorema 3.36 (Solución al problema de Riemann: Caso estrictamente convexo).** *Sea  $f$  de clase  $C^2$  y estrictamente convexa. Si  $u_L > u_R$  entonces la única solución entrópica al problema de Riemann (3.34) y (3.97) en  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  es la onda de choque*

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases} \quad (3.100)$$

donde  $s$  está determinada por

$$s = \frac{[f(u)]}{[u]}. \quad (3.101)$$

Si  $u_R > u_L$  entonces la única solución entrópica del problema de Riemann es la onda de rarefacción

$$u(x,t) = \begin{cases} u_L, & x < a(u_L)t, \\ g(x/t), & a(u_L)t \leq x \leq a(u_R)t, \\ u_R, & x > a(u_R)t, \end{cases} \quad (3.102)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > 0$  y donde  $g = a^{-1}$ .

*Demostración.* Sea  $u_L > u_R$ . Claramente la onda de choque (3.100) es una solución débil de (3.34) y (3.97). Como  $s$  está dada por (3.101), la solución satisface la condición de salto de Rankine-Hugoniot a lo largo de la discontinuidad  $\{x - st = 0\}$ . Mas aún, notamos que

$$a(u_R) = f'(u_R) < s < f'(u_L) = a(u_L),$$

ya que, por convexidad de  $f$ , (3.101) implica la desigualdad de Lax. Por lo tanto la solución es entrópica, coincide con la fórmula de Lax y es, en consecuencia, única.

Sea  $u_R > u_L$ . En la región  $a(u_L) < x/t < a(u_R)$ , la solución (3.102) satisface claramente la ecuación diferencial,

$$u_t + f(u)_x = -g'(x/t)\frac{x}{t^2} + a(g(x/t))g'(x/t)\frac{1}{t} \equiv 0,$$

ya que  $a^{-1} = g$ . Notamos que (3.102) es una solución continua en todo  $\mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Es fácil demostrar, tal y como se demostró la proposición 2.11, que la onda de rarefacción (3.102) es una solución débil de (3.34) y (3.97). Dado que  $g$  es Lipschitz, tenemos,

$$u(x + \varepsilon, t) - u(x, t) = g\left(\frac{x + \varepsilon}{t}\right) - g\left(\frac{x}{t}\right) \leq \frac{C\varepsilon}{t},$$

para  $a(u_L)t < x < a(u_R)t$ . Esto implica que la onda de rarefacción satisface la condición de entropía. Fuera de este dominio, la condición de entropía se satisface trivialmente. Por

unicidad de la fórmula de Lax en el caso convexo, ésta es la única solución entrópica al problema de Riemann.  $\square$

**Observación 3.37.** El caso en el que la función de flujo es estrictamente cóncava se resuelve de manera análoga

Gracias al teorema anterior, sabemos que cuando la función es estrictamente convexa (o estrictamente cóncava) la solución al problema de Riemann es una onda de choque o una onda de rarefacción. En el caso general en el que  $f$  tiene cambios de convexidad, la solución puede involucrar ambos tipos de soluciones. Notablemente, la solución también es única, se expresa exclusivamente en términos de dichas soluciones autosimilares, y no hace uso de ninguna otra, como veremos a continuación.

### 3.4.3. El caso general

Para ilustrar los efectos del cambio en convexidad analicemos un ejemplo concreto. Sea la función de flujo

$$f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u,$$

la cual tiene un sólo punto de inflexión en  $u = 0$ . Así, supongamos que  $u_L < 0 < u_R$ . Derivando la función de flujo obtenemos  $f'(u) = u^2 - 1$ , y  $f''(u) = 2u$ , por lo que  $f$  tiene un máximo en  $u = -1$  y un mínimo en  $u = 1$ . En consecuencia, bajo estas hipótesis, para cada  $u \in [u_L, u_R]$ ,  $u \neq 0$ , existe una única recta que es tangente a la gráfica de  $f$  en el punto  $(\zeta(u), f(\zeta(u)))$ , con  $\zeta(u) \neq u$ . Si  $u = 0$ , se define  $\zeta = 0$ . En efecto, sea  $u \in [u_L, u_R]$ ,  $u \neq 0$ . Resolviendo la ecuación

$$\frac{f(\zeta(u)) - f(u)}{\zeta(u) - u} = f'(\zeta(u)),$$

se obtiene  $\frac{1}{3}(2\zeta^2 - \zeta u - u^2) = 0$ , en vista de que  $\zeta \neq u$ . Resolviendo para  $\zeta$ , se tiene que  $\zeta(u) = \frac{1}{4}u \pm \frac{3}{4}|u|$ . Como  $\zeta \neq u$ , si  $u > 0$  entonces  $\zeta = -\frac{1}{2}u < 0$ . Si  $u < 0$  entonces  $\zeta = -\frac{1}{2}u > 0$ . De esta forma tenemos que

$$\zeta(u) = \begin{cases} -\frac{1}{2}u, & u \in [u_L, u_R], u \neq 0, \\ 0, & u = 0. \end{cases}$$

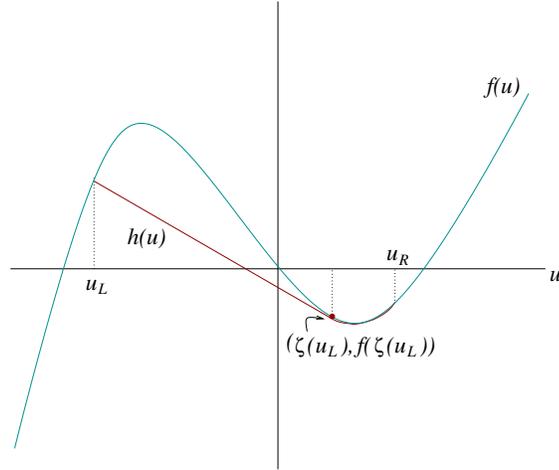
Notamos que  $u\zeta(u) \leq 0$  para todo  $u \in [u_L, u_R]$ . Definimos así la función  $h : [u_L, u_R] \rightarrow \mathbb{R}$ , como

$$h(u) := \begin{cases} \frac{f(u_L) - f(\zeta(u_L))}{u_L - \zeta(u_L)}u + f(u_L), & u \in [u_L, \zeta(u_L)], \\ f(u), & u \in [\zeta(u_L), u_R]. \end{cases} \quad (3.103)$$

Observamos que  $h$  es continua en su dominio y que es convexa. La función  $h$  se conoce como la *envolvente convexa* de la función  $f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$  en el intervalo  $[u_L, u_R]$  (véase la figura 3.12).

Tenemos dos casos posibles:

**Figura 3.12** Gráfica de la función  $f = \frac{1}{3}u^3 - u$  y de su envolvente convexa  $h$  (en rojo) en un intervalo arbitrario  $[u_L, u_R]$  que incluye a  $u = 0$ . En la figura se muestra el caso  $\zeta(u_L) < u_R$ . La envolvente convexa es una recta (onda de choque) que conecta a los puntos  $(u_L, f(u_L))$  y  $(\zeta(u_L), f(\zeta(u_L)))$  y está unida continuamente con la gráfica de  $f$  en el intervalo  $\zeta(u_L) \leq u \leq u_R$  (onda de rarefacción).



- (i)  $u_R \in (u_L, \zeta(u_L))$ ,
- (ii)  $\zeta(u_L) < u_R$ .

En el caso (i), la solución al problema de Riemann (3.34) y (3.97), con función de flujo  $f = \frac{1}{3}u^3 - u$ , es la onda de choque

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases}$$

con velocidad

$$s = \frac{f(u_R) - f(u_L)}{u_R - u_L} = \frac{1}{3}(u_L^2 + u_L u_R + u_R^2) - 1.$$

Se trata de la única solución entrópica en la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos ya que la gráfica de  $f$  se localiza por encima de su cuerda en  $[u_L, u_R]$ .

El caso interesante es, sin duda, el caso (ii). La envolvente convexa  $h$  tiene una derivada continua c.d.s. dada por

$$d(u) := h'(u) = \begin{cases} m_L, & u \in [u_L, \zeta(u_L)], \\ f'(u) = u^2 - 1, & u \in (\zeta(u_L), u_R], \end{cases} \quad (3.104)$$

donde  $m_L = f'(\zeta(u_L))$  es la pendiente (constante) de la cuerda  $h$  para  $u < \zeta(u_L)$  como se ve en la figura 3.12. Notamos que en el intervalo  $u \in (\zeta(u_L), u_R]$ ,  $d(u)$  es monótona creciente ya que  $f$  es estrictamente convexa en dicho intervalo. De este modo podemos definir  $v$  mediante

$$d(v(\xi)) = \xi, \quad \text{para todo } \xi \in [d(\zeta(u_L)), d(u_R)].$$

Por monotonía estricta de  $d$ , la función  $v$  está definida de manera única. La función inversa  $d^{-1} : [d(\zeta(u_L)), d(u_R)] \rightarrow [\zeta(u_L), u_R]$  está bien definida en su dominio. De esta forma

$$v(\xi) = d^{-1}(\xi), \quad \xi \in [d(\zeta(u_L)), d(u_R)]. \quad (3.105)$$

Para extender  $v$  a todo el eje real, si  $\xi > d(u_R)$  entonces definimos  $v(\xi) \equiv u_R$ . Si  $\xi < d(\zeta(u_L))$  se define  $v(\xi) \equiv u_L$ . Análogamente al caso convexo, podemos considerar la siguiente solución autosimilar, definida para  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < td(\zeta(u_L)), \\ d^{-1}(x/t), & td(\zeta(u_L)) < x < td(u_R), \\ u_R, & x \geq td(u_R). \end{cases} \quad (3.106)$$

El lector podrá notar la semejanza de ésta solución con la onda de rarefacción (o ventilador) (3.102). Observemos que  $\lim_{\xi \rightarrow d(u_R)^-} d^{-1}(\xi) = u_R$ , pero que, sin embargo,

$$\lim_{\xi \rightarrow d(\zeta(u_L))^+} d^{-1}(\xi) = \zeta(u_L) \neq u_L,$$

por lo que la solución en forma de ventilador  $d^{-1}(x/t)$  no conecta a  $u_R$  con  $u_L$ , sino a  $u_R$  con  $\zeta(u_L)$ . Más importante aún, la solución (3.106) *no es continua*, y tiene un salto en  $x = td(\zeta(u_L))$ . Es decir, la solución al problema de Riemann en el caso (ii) consiste en una onda de rarefacción “montada” sobre una onda de choque. Para verificar que (3.106) es una solución entrópica del problema de Riemann, hay que probar que dicha discontinuidad satisface la condición de salto de Rankine-Hugoniot y la condición de entropía generalizada.

En primer lugar, el valor de  $u$  a la derecha de la discontinuidad  $x = td(\zeta(u_L))$  es  $\tilde{u}_R = \zeta(u_L)$ , mientras que a la izquierda es  $\tilde{u}_L = u_L$ . De esta manera, se cumple la condición de Rankine-Hugoniot; en efecto,

$$\frac{f(\tilde{u}_R) - f(\tilde{u}_L)}{\tilde{u}_R - \tilde{u}_L} = \frac{f(\zeta(u_L)) - f(u_L)}{\zeta(u_L) - u_L} = f'(\zeta(u_L)) = m_L = d(\zeta(u_L)),$$

es la velocidad de la discontinuidad. Dado que en  $[u_L, \zeta(u_L)]$  la gráfica de  $f$  está localizada por encima de su cuerda y  $\zeta(u_L) = \tilde{u}_R > u_L$ , dicha discontinuidad satisface la condición de entropía generalizada. Finalmente, notamos que  $h$  y  $f$  coinciden en el tramo donde  $f$  es convexa, es decir, en  $[\zeta(u_L), u_R]$ . Así, para cada  $\xi \in [d(\zeta(u_L)), d(u_R)] = [f'(\zeta(u_L)), f'(u_R)]$ , la función  $v$  se define mediante  $d(v(\xi)) = f'(v(\xi)) = \xi$ , y por lo tanto se cumple la ecuación  $f(v(\xi))_\xi = \xi v'(\xi)$ , esto es, la solución en ese intervalo es una onda de rarefacción.

Concluimos que la solución (3.106) es la única<sup>3</sup> solución entrópica al problema de Riemann para  $f = \frac{1}{3}u^3 - u$ . Para ilustrar esta solución, tomemos los valores

$$u_L = -\sqrt{2} < 0 < u_R = \sqrt{2},$$

de modo que,

<sup>3</sup> La unicidad es consecuencia de la unicidad de la solución entrópica en la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos (proposición 3.16).

$$\begin{aligned}\zeta(u_L) &= -\frac{1}{2}u_L = \frac{1}{\sqrt{2}}, & f'(u_L) &= u_L^2 - 1 = 1, \\ d(\zeta(u_L)) &= f'(\zeta(u_L)) = -\frac{1}{2}, & d(u_R) &= f'(u_R) = 1.\end{aligned}$$

La velocidad de la onda de choque es  $s = m_L = f'(\zeta(u_L)) = -\frac{1}{2}$ , y  $d(u) = f'(u) = u^2 - 1$  es invertible en el intervalo  $u \in [\zeta(u_L), u_R] = [-\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{2}]$ . Por lo tanto,

$$d^{-1}(\xi) = \sqrt{\xi + 1}, \quad \xi \in [d(\zeta(u_L)), d(u_R)] = [-\frac{1}{2}, 1].$$

En suma, la solución (3.106) se lee,

$$u(x, t) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & x < -t/2, \\ \sqrt{1+x/t}, & -t/2 < x < t, \\ \sqrt{2}, & x \geq t, \end{cases} \quad (3.107)$$

y es la única solución entrópica a la ecuación (3.34) con  $f(u) = \frac{1}{3}u^3 - u$ , y con condición inicial

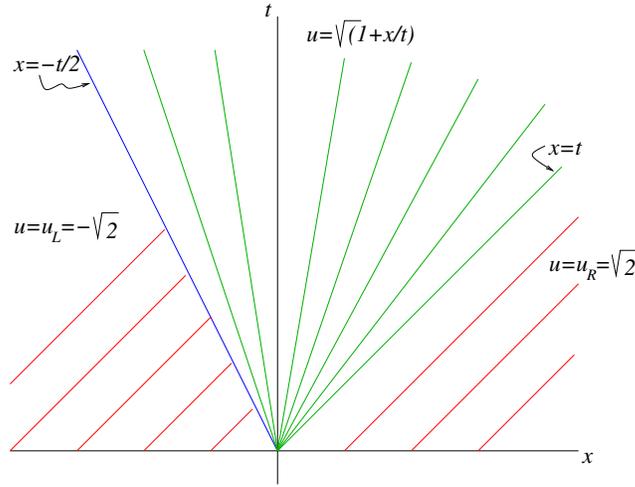
$$u(x, 0) = \begin{cases} -\sqrt{2}, & x < 0, \\ \sqrt{2}, & x > 0. \end{cases} \quad (3.108)$$

La representación de la solución se muestra en la figura 3.13. La velocidad característica en  $u_L = -\sqrt{2}$  y  $u_R = \sqrt{2}$  es  $f'(u_L) = f'(u_R) = 1$ , por lo que las rectas características que intersectan al eje  $t = 0$  y que están determinadas por la condición inicial tienen pendiente igual a uno. Notamos que la onda de choque limita a la onda de rarefacción por la izquierda, de manera que la solución no es continua.

Este ejemplo concreto nos muestra que los cambios en convexidad de la función de flujo pueden generar soluciones que involucran a ondas de choque con ondas de rarefacción. El principio básico para resolver el problema de Riemann para funciones con muchos puntos de inflexión consiste en encontrar la envolvente convexa de la función si  $u_L < u_R$  (o la envolvente cóncava si  $u_R < u_L$ ), de forma que los tramos donde  $f$  es convexa corresponden a una onda de rarefacción; los tramos donde la envolvente es una recta corresponden a ondas de choque que se propagan con velocidad igual a la pendiente de la recta.

Basándonos en lo visto en este ejemplo, vamos a demostrar el teorema que garantiza la existencia y unicidad de la solución entrópica al problema de Riemann para una función de flujo con cambios en su convexidad, mediante la construcción de una solución que involucra a soluciones autosimilares, como pueden ser ondas de choque, ondas de rarefacción y combinaciones de las mismas asociadas a un conjunto numerable de puntos.

**Teorema 3.38 (Solución al problema de Riemann: Caso general).** *Sean  $f$  de clase  $C^2$ , y  $u_L \neq u_R$ . Entonces la única solución entrópica al problema de Riemann (3.34) y (3.97) en  $x \in \mathbb{R}$  y  $t > 0$  está representada por, a lo más, un conjunto numerable de discontinuidades que satisfacen la condición de entropía generalizada (ondas de choque), y ondas de rarefacción que satisfacen (3.98) en sentido de distribuciones.*



**Figura 3.13** Diagrama que representa a la solución entrópica al problema de Riemann (3.34) para la función de flujo  $f = \frac{1}{3}u^3 - u$ , con condición inicial (3.108). La recta  $x = mt = -\frac{1}{2}t$  es una onda de choque que tiene una onda de rarefacción “montada” sobre ella por la derecha. La solución es claramente discontinua, y satisface la condición de entropía generalizada y la condición de salto de Rankine-Hugoniot en la discontinuidad. Las características (rectas en rojo) tienen pendiente igual a  $f'(u_L) = f'(u_R) = 1$  y entran a la onda de choque sólo por el lado izquierdo.

*Demostración.* Dado que  $u_L \neq u_R$ , la condición inicial es monótona, por lo cual esperamos que la solución sea también monótona en la variable espacial. En este caso, la función  $\xi \mapsto v(\xi) = u(\xi, 1)$  es también monótona y tiene, a lo más, un conjunto numerable de discontinuidades que representan a las ondas de choque. Denotemos la “función”<sup>4</sup> característica

$$\chi(u) := \begin{cases} \infty, & u \notin I(u_L, u_R), \\ 0, & u \in I(u_L, u_R). \end{cases}$$

Tenemos dos casos. Si  $u_L < u_R$  entonces definimos la envolvente convexa,

$$h(u) := \sup\{g(u) : g \text{ convexa}, g \leq f + \chi\},$$

para cada  $u \in \mathbb{R}$ . La función  $h$  es convexa en  $I[u_L, u_R] = [u_L, u_R]$  y, por ende, de clase  $C^1$  excepto en un conjunto numerable de puntos. Así, definimos

$$d(u) := h'(u), \quad \text{c.d.s. en } u \in [u_L, u_R].$$

Asimismo,  $d(u)$  es monótona creciente. De este modo podemos definir  $v(\xi)$  de manera única mediante  $d(v(\xi)) = \xi$ , para cada  $\xi \in [d(u_L), d(u_R)]$ , excepto en un conjunto de medida cero. Si  $\xi < d(u_L)$  definimos  $v \equiv u_L$ ; si  $\xi > d(u_R)$  definimos  $v \equiv u_R$ . Es decir,

<sup>4</sup>  $\chi$  es, en un sentido estricto, una *distribución*.

$$v(\xi) := \begin{cases} u_L, & \xi < d(u_L), \\ d^{-1}(\xi), & \xi \in [d(u_L), d(u_R)], \\ u_R, & \xi > d(u_R). \end{cases} \quad (3.109)$$

En el caso en el que  $u_L > u_R$ , sea la envolvente cóncava

$$h(u) := \inf\{g(u) : g \text{ cóncava}, f - \chi \leq g\}.$$

Análogamente su derivada  $d(u)$  es monótona decreciente en  $[u_R, u_L]$  y podemos definir  $v$  c.d.s. mediante la misma fórmula (3.109).

Demostremos que con esta definición de  $v$ , la ecuación

$$f(v(\xi))_\xi = \xi(v'(\xi)), \quad \text{c.d.s.} \quad (3.110)$$

se satisface en sentido distribucional, ya que  $v(\xi)$  puede tener un conjunto numerable de saltos. Asimismo, también debemos probar que en dichos saltos o discontinuidades se cumple la condición de entropía. Por simplicidad analizaremos únicamente el caso  $u_L < u_R$ ; el otro caso se resuelve de manera análoga.

Primero observemos que para  $\xi \in [d(u_L), d(u_R)]$  se tiene que

$$f(v(\xi)) = h(v(\xi)), \quad (3.111)$$

excepto en los valores críticos de  $d$ , que es un conjunto numerable. El lector puede percatarse de este hecho con un ejemplo sencillo que se muestra en la figura 3.14, donde hay un sólo punto crítico.

Por otro lado, para cada  $w \in [u_L, u_R]$  tenemos que, por definición de  $h$ , por convexidad y usando (3.111),

$$f(w) \geq h(w) \geq h(v(\xi)) + h'(v(\xi))(w - v(\xi)) = f(v(\xi)) + \xi(w - v(\xi)), \quad (3.112)$$

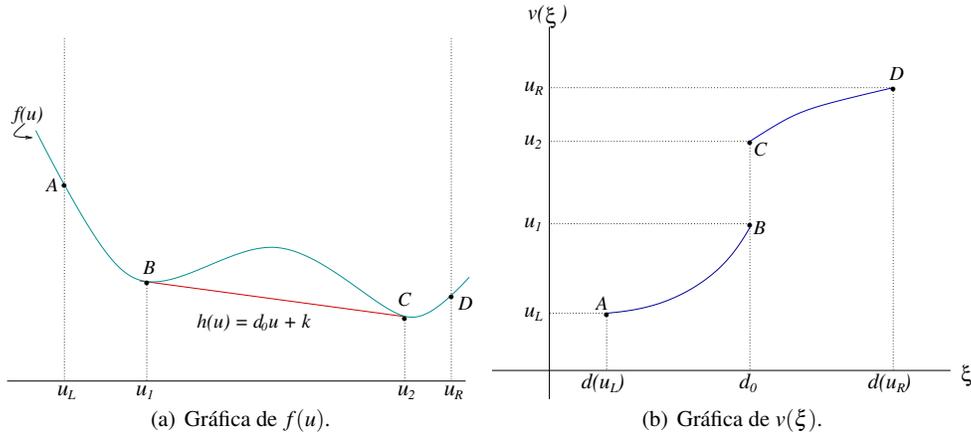
c.d.s. en  $\xi$ . El lado derecho de (3.112) es el hiperplano soporte de  $h$ . Escogiendo  $w := v(\xi + \varepsilon)$ , con  $\varepsilon \neq 0$ , y dividiendo entre  $|\varepsilon|$  obtenemos

$$\frac{f(v(\xi + \varepsilon)) - f(v(\xi))}{|\varepsilon|} \geq \xi \frac{v(\xi + \varepsilon) - v(\xi)}{|\varepsilon|}.$$

Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se tiene que  $f(v(\xi))_\xi \geq \xi v'(\xi)$  c.d.s. Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^-$  obtenemos la desigualdad inversa, es decir,  $f(v(\xi))_\xi \leq \xi v'(\xi)$  c.d.s. De este modo obtenemos (3.110).

Finalmente, para demostrar que en las posibles discontinuidades de  $v$  se cumple la condición de entropía, basta con verificar que se cumple la desigualdad de entropía de Kružkov (3.20), pues en virtud del lema 3.12, ésta es equivalente a la condición de entropía generalizada en la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos con un conjunto numerable de discontinuidades. Sea  $u_L < k < u_R$ . Por la monotonicidad de  $v$  existe  $\xi_0 \in \mathbb{R}$  tal que  $v(\xi) \leq k$  si  $\xi > \xi_0$ , y  $v(\xi) \geq k$  si  $\xi < \xi_0$ . Por lo tanto para cada  $\varepsilon > 0$ ,

$$\text{sgn}(v(\xi_0 + \varepsilon) - k) \geq 0, \quad \text{sgn}(v(\xi_0 - \varepsilon) - k) \leq 0.$$



**Figura 3.14** En la figura (a) se aprecia la gráfica de una cierta función  $f(u)$  que cambia de convexidad en  $[u_L, u_R]$ . En los tramos  $AB$  y  $CD$  la envolvente convexa  $h$  coincide con  $f$ ; en el tramo  $BC$ , se tiene que  $h(u) = d_0 u + k$ , donde  $d_0$  es la pendiente de la recta que une a  $B$  con  $C$ , y  $k$  es una constante. Si graficamos  $v(\xi)$  para  $\xi \in [d(u_L), d(u_R)]$ , como se aprecia en la figura (b), notamos que en los tramos  $AB$  y  $CD$ ,  $f(v(\xi)) = h(v(\xi))$ , excepto en el punto crítico de  $d$ , que tiene medida cero. Así,  $f(v(\xi)) = h(v(\xi))$  c.d.s. en  $\xi$ .

Sean

$$v_R := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(\xi_0 + \varepsilon), \quad v_L := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} v(\xi_0 - \varepsilon).$$

Si  $v_L = v_R$  entonces  $\xi_0$  es un punto de continuidad de  $v$  y la desigualdad (3.20) se satisface trivialmente en forma de igualdad. Supongamos, pues, que  $v_L \neq v_R$ . Sustituyendo  $w = k$  y  $\xi = \xi_0 + \varepsilon$  en (3.112) obtenemos

$$0 \geq (f(v(\xi_0 + \varepsilon)) - f(k)) \operatorname{sgn}(v(\xi_0 + \varepsilon) - k) - (\xi_0 + \varepsilon) |k - v(\xi_0 + \varepsilon)|.$$

Tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se obtiene,

$$(f(v_R) - f(k)) \operatorname{sgn}(v_R - k) \leq \xi_0 |k - v_R|.$$

Análogamente, sustituyendo  $w = k$  y  $\xi = \xi_0 - \varepsilon$  en (3.112) y tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  el resultado es

$$(f(v_L) - f(k)) \operatorname{sgn}(v_L - k) \geq \xi_0 |v_L - k|.$$

Restando la segunda desigualdad de la primera obtenemos (3.20), donde la velocidad (constante) de la conexión es  $d\hat{x}/dt = \xi_0 = d_0$  (velocidad de la onda de choque). En el caso donde  $k \geq u_R$  la desigualdad (3.20) con velocidad  $\xi_0$  se lee

$$f(v_L) - f(v_R) \leq \xi_0 (v_L - v_R). \quad (3.113)$$

Ésta última desigualdad es cierta. En efecto, sustituyendo  $w = v(\xi_0 + \varepsilon)$  y  $\xi = \xi_0 - \varepsilon$  en (3.112), obtenemos

$$f(v(\xi_0 + \varepsilon)) \geq f(v(\xi_0 - \varepsilon)) + (\xi_0 - \varepsilon)(v(\xi_0 + \varepsilon) - v(\xi_0 - \varepsilon));$$

tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  se obtiene (3.113). En el caso  $k \leq u_L$  también se cumple la desigualdad (3.20) (la prueba es análoga). De esta forma hemos demostrado que la solución es entrópica. La unicidad es consecuencia de la unicidad de la solución entrópica en la clase de soluciones  $C^1$  por pedazos (proposición 3.16).  $\square$

### 3.5. Teoría de Kružkov-Oleĭnik

En esta sección se presenta el resultado de existencia y unicidad de la solución entrópica al problema de Cauchy para el caso general de una función de flujo  $f \in C^2$  con posibles cambios en su convexidad. El resultado de existencia se basa en hacer una aproximación viscosa del problema y en demostrar su convergencia. Aunque utilizado originalmente para el caso convexo por Oleĭnik [174], el método de aproximación viscosa es aplicable al caso general. La demostración de la unicidad de la solución entrópica está basada en el análisis multidimensional de Kružkov [116]. Por estas razones, denominamos a este resultado de existencia y unicidad como *teoría de Kružkov-Oleĭnik*.

Consideremos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.114}$$

para  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ , donde  $f$  es de clase  $C^2$  y  $u_0 \in L^\infty$  (acotada). Nuestro objetivo es demostrar el siguiente

**Teorema 3.39.** *Sea  $f \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Entonces para cada condición inicial  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$  existe una única solución entrópica  $u \in L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  al problema de Cauchy (3.114).*

La herramienta fundamental para demostrar este teorema es considerar el problema “viscoso” [174] asociado a (3.114), es decir, para cada  $\varepsilon > 0$  consideramos el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t^\varepsilon + f(u^\varepsilon)_x &= \varepsilon u_{xx}^\varepsilon, \\ u^\varepsilon(x, 0) &= u_0(x), \end{aligned} \tag{3.115}$$

donde la condición inicial  $u_0 \in L^\infty$  es la misma que en el problema (3.114). El método de aproximación viscosa consiste en encontrar una subsucesión de las soluciones viscosas al problema (3.115) para cada  $\varepsilon > 0$  que converge a la solución entrópica del problema de Cauchy (3.114). Gracias al teorema 2.46 demostrado en el capítulo 2 para sistemas con viscosidad idéntica, ya hemos resuelto parte de este problema. A continuación, para conveniencia del lector, reescribimos el contenido del teorema 2.46 para el caso de una ley de conservación escalar en una dimensión.

**Teorema 3.40.** *Sea  $(E, \Psi) \in C^2(\mathbb{R}; \mathbb{R} \times \mathbb{R})$  un par de entropía asociado a la ley de conservación escalar en (3.114), con  $E$  estrictamente convexa. Supongamos que existe una sucesión  $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon \geq 0}$  de soluciones suaves al problema viscoso asociado (3.115) que satisface:*

$$\|u^\varepsilon\|_\infty \leq C, \quad (3.116)$$

con  $C > 0$  uniforme, para todo  $\varepsilon > 0$ , y

$$u^\varepsilon \rightarrow u, \quad (3.117)$$

c.d.s. en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , y para cierta función  $u$ . Entonces  $u$  es una solución débil de (3.114) que satisface la desigualdad de entropía (3.11) para toda función de prueba

$$\phi \in \mathcal{D}_+ = \{\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}) : \phi \geq 0\}.$$

Por lo tanto, para demostrar la existencia de una solución entrópica al problema de Cauchy (3.114) debemos verificar, a su vez, la existencia de una sucesión de soluciones viscosas que satisface (3.116) y (3.117).

### 3.5.1. El problema viscoso

El siguiente teorema garantiza que para cada  $\varepsilon > 0$  existe una solución suave al problema viscoso (3.115) que satisface el principio del máximo (3.116) uniformemente en  $\varepsilon > 0$ .

**Teorema 3.41.** Sea  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R})$ ,  $M_0 := \|u_0\|_\infty > 0$ . Sea  $f \in C^1([-M_0, M_0])$ . Entonces para cada  $\varepsilon > 0$  el problema viscoso (3.115) tiene una única solución  $u^\varepsilon \in L^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R}) \cap C^\infty([0, +\infty) \times \mathbb{R})$  que satisface

$$\|u^\varepsilon(\cdot, t)\|_\infty \leq M_0,$$

para todo  $\varepsilon > 0$  y para todo  $t > 0$ .

*Demostración.* Ver Taylor [218], Proposición 1.5, Capítulo 15, pág. 276.  $\square$

**Lema 3.42.** Sean  $u_0, \bar{u}_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$  que toman valores en un conjunto compacto  $[a, b]$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  sean  $u^\varepsilon$  y  $\bar{u}^\varepsilon$  las soluciones del problema de Cauchy viscoso (3.115) con condición inicial  $u_0$  y  $\bar{u}_0$  respectivamente. Entonces:

(i)  $\|u^\varepsilon(\cdot, t) - \bar{u}^\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1} \leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^1}$ , para todo  $t > 0$ .

(ii) Si  $u_0(x) \leq \bar{u}_0(x)$  c.d.s. en  $x \in \mathbb{R}$  entonces  $u^\varepsilon(x, t) \leq \bar{u}^\varepsilon(x, t)$  c.d.s. en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ .

Además, los rangos de  $u^\varepsilon$  y  $\bar{u}^\varepsilon$  están contenidos en  $[a, b]$ .

*Demostración.*  $\square$

**Lema 3.43.** Sea  $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ . Entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq \Theta(|y|),$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$ , donde  $\Theta = \Theta(r)$  es una función no negativa, decreciente de  $r > 0$  tal que  $\Theta(r) \rightarrow 0^+$  si  $r \rightarrow 0^+$ . Asimismo, si para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $u^\varepsilon$  denota la solución al problema viscoso (3.115), entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |u^\varepsilon(x+y, t) - u^\varepsilon(x, t)| dx \leq \Theta(|y|),$$

para todo  $y \in \mathbb{R}$  y todo  $t > 0$  fijo.

*Demostración.* Para cada  $y \in \mathbb{R}$  fijo

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq 2\|u_0\|_{L^1},$$

de modo que para cada  $r \geq 0$

$$\Theta(r) := \sup_{|y| \leq r} \int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx,$$

está bien definido. Mas aún,  $\Theta \geq 0$  y para cada  $r_1 \leq r_2$  tenemos que  $\Theta(r_1) \leq \Theta(r_2)$ , es decir, es una función decreciente. Dado que  $\Theta(0) = 0$  obtenemos  $\Theta(r) \rightarrow 0^+$  si  $r \rightarrow 0^+$ . Por lo tanto,

$$\int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq \Theta(|y|).$$

Sea  $t > 0$  fijo. Para cada  $y \in \mathbb{R}$  definimos  $\bar{u}(x, t) := u^\varepsilon(x+y, t)$ , en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ . Por el lema 3.42 (i) obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} |u^\varepsilon(x+y, t) - u^\varepsilon(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |u_0(x+y) - u_0(x)| dx \leq \Theta(|y|).$$

□

### 3.5.2. El teorema de Kružkov: unicidad

En esta sección demostraremos el teorema de Kružkov [116] para el caso de una dimensión espacial. Recordemos la definición de solución entrópica de Kružkov: una función  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times [0, +\infty); [a, b])$ , con  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  compacto, es solución entrópica del problema de Cauchy (3.114) si para toda  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$  con  $\psi \geq 0$ , y para todo  $k \in [a, b]$  se tiene que

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \psi_t |u - k| + \psi_x (f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k) dx dt + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) |u_0(x) - k| dx \geq 0. \quad (3.118)$$

Por el teorema 3.7, si  $\Omega = [a, b]$  entonces una solución débil de (3.114) es entrópica en el sentido de la definición 3.4 si y sólo si es entrópica en el sentido de Kružkov.

Esta sección está dedicada a demostrar el siguiente

**Teorema 3.44 (Kružkov).** *Sea  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  compacto y sea  $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ . Sean  $u, \bar{u} \in L^\infty([0, +\infty); [a, b])$  dos soluciones entrópicas del problema de Cauchy con datos iniciales  $u_0, \bar{u}_0 \in L^\infty$  respectivamente, que toman valores en el intervalo  $[a, b]$ . Sea  $N = \sup_{u \in [a, b]} |f'(u)|$ . Entonces para todo  $R > 0$  y todo  $\tau > \tau_0 \geq 0$  se tiene que*

$$\int_{|x| \leq R} |u(x, \tau) - \bar{u}(x, \tau)| dx \leq \int_{|x| \leq R+N(\tau-\tau_0)} |u(x, \tau_0) - \bar{u}(x, \tau_0)| dx. \quad (3.119)$$

Asimismo, para todo  $t \geq 0$ ,  $R > 0$ ,

$$\|u(\cdot, t) - \bar{u}(\cdot, t)\|_{L^1(B_R(0))} \leq \|u_0 - \bar{u}_0\|_{L^1(B_{R+Nt}(0))}. \quad (3.120)$$

Una de las consecuencias más importantes del teorema de Kružkov es la unicidad de la solución entrópica.

**Corolario 3.45 (Unicidad).** *Existe, a lo más, una solución entrópica al problema de Cauchy (3.114).*

La desigualdad (3.120) también tiene como consecuencia el siguiente

**Corolario 3.46 (Velocidad finita de propagación).** *El valor de la solución entrópica en cualquier punto  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  depende únicamente de la restricción de los datos iniciales en la bola  $B_{Nt}(x)$ .*

*Demostración del teorema 3.44.* La definición de solución entrópica de Kružkov consiste en expresar la desigualdad (3.11) con el par de entropía de Kružkov:

$$E(u) = |u - k|, \quad \Psi(u) = (f(u) - f(k)) \operatorname{sgn}(u - k),$$

con  $k$  constante. La idea de la demostración está basada en la siguiente propiedad de simetría de las funciones

$$\begin{aligned} \tilde{E}(u, \bar{u}) &:= |u - \bar{u}| = \tilde{E}(\bar{u}, u), \\ \tilde{\Psi}(u, \bar{u}) &:= (f(u) - f(\bar{u})) \operatorname{sgn}(u - \bar{u}) = \tilde{\Psi}(\bar{u}, u), \end{aligned}$$

para todo  $u, \bar{u} \in [a, b]$ , así como en sustituir  $k$  por  $\bar{u}$  en el par de Kružkov y duplicar el número de variables. En efecto, para cada  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  fijo,  $\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) = \bar{k} \in [a, b]$  es una constante. Por la definición de solución entrópica obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (|u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| \varphi_t(x, t, \bar{x}, \bar{t}) + \\ &\quad + (f(u(x, t)) - f(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}))) \operatorname{sgn}(u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})) \varphi_x(x, t, \bar{x}, \bar{t})) dx dt + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0, \bar{x}, \bar{t}) |u_0(x) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| dx \geq 0, \end{aligned}$$

para cualquier función  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}_+)$ ,  $\varphi = \varphi(x, t, \bar{x}, \bar{t}) \geq 0$ , suave de soporte compacto en las cuatro variables. Simétricamente, para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  fijo, sustituimos la constante  $k = u(x, t) \in [a, b]$  en la definición de solución entrópica para  $\bar{u}$ , para obtener

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (|\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - u(x, t)| \varphi_t(x, t, \bar{x}, \bar{t}) + \\ &\quad + (f(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t})) - f(u(x, t))) \operatorname{sgn}(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - u(x, t)) \varphi_x(x, t, \bar{x}, \bar{t})) dx dt + \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t, \bar{x}, 0) |\bar{u}_0(x) - u(x, t)| dx \geq 0, \end{aligned}$$

con la misma función  $\varphi$ . Integrando la primera desigualdad en  $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ , la segunda en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  y sumándolas obtenemos, por simetría, la desigualdad

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[ (\partial_t + \partial_{\bar{t}}) \varphi(x, t, \bar{x}, \bar{t}) |u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| + \right. \\ & \quad \left. + (\partial_x + \partial_{\bar{x}}) \varphi(x, t, \bar{x}, \bar{t}) (f(u(x, t)) - f(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}))) \operatorname{sgn}(u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})) \right] dx d\bar{x} d\bar{t} dt + \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, 0, \bar{x}, \bar{t}) |u_0(x) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| dx d\bar{x} d\bar{t} + \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t, \bar{x}, 0) |\bar{u}_0(\bar{x}) - u(x, t)| d\bar{x} dx dt \geq 0. \end{aligned} \quad (3.121)$$

Sea  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}; [0, 1])$ ,  $\eta_\varepsilon(z) = \varepsilon^{-1} \eta(z/\varepsilon)$  el alisador de Friedrichs (ver apéndice A, definición A.4), con  $\varepsilon > 0$ , de modo que  $\operatorname{supp} \eta_\varepsilon \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Sea  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ ,  $\psi = \psi(X, T) \geq 0$ , una función de prueba suave de soporte compacto, no negativa. De esta manera podemos escoger  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4; \mathbb{R}_+)$  mediante

$$\varphi(x, t, \bar{x}, \bar{t}) := \psi\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right).$$

Esta función es claramente suave, no negativa, con soporte contenido en el conjunto

$$\tilde{\Omega}_{\varepsilon, r} = \left\{ \frac{1}{2}|x-\bar{x}| < \varepsilon, \frac{1}{2}|t-\bar{t}| < \varepsilon, \frac{1}{2}|x+\bar{x}| < r, \frac{1}{2}|t+\bar{t}| < r \right\}$$

donde  $r > 0$  es una constante que depende del soporte de  $\psi$ . Calculando sus derivadas,

$$\begin{aligned} (\partial_t + \partial_{\bar{t}}) \varphi &= \psi_T\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right), \\ (\partial_x + \partial_{\bar{x}}) \varphi &= \psi_X\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right), \end{aligned}$$

y sustituyendo en la desigualdad (3.121) obtenemos

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[ |u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| \psi_T\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right) + \right. \\ & \quad \left. + (f(u(x, t)) - f(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}))) \operatorname{sgn}(u(x, t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})) \psi_X\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t-\bar{t}}{2}\right) \right] dx d\bar{x} d\bar{t} dt + \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{\bar{t}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{-\bar{t}}{2}\right) |u_0(x) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| dx d\bar{x} d\bar{t} + \\ & \quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{x-\bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t}{2}\right) |\bar{u}_0(\bar{x}) - u(x, t)| d\bar{x} dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Esta desigualdad se puede escribir de la forma

$$I_1 + I_2 + I_3 \geq 0, \quad (3.122)$$

donde

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| \psi_T \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t}, \\
I_2 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (f(u(x,t)) - f(\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}))) \operatorname{sgn}(u(x,t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})) \times \\
&\quad \times \psi_X \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t}, \\
I_3 &= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{\bar{t}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{-\bar{t}}{2} \right) |u_0(x) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| dx d\bar{x} d\bar{t} + \\
&\quad + \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \psi \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t}{2} \right) |\bar{u}_0(\bar{x}) - u(x,t)| d\bar{x} dx dt.
\end{aligned}$$

**Lema 3.47.** Si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  entonces

$$\begin{aligned}
I_1 &\rightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_T(x,t) |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| dx dt, \\
I_2 &\rightarrow \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_X(x,t) (f(u(x,t)) - f(\bar{u}(x,t))) \operatorname{sgn}(u(x,t) - \bar{u}(x,t)) dx dt, \\
I_3 &\rightarrow \int_{\mathbb{R}} \psi(x,0) |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| dx.
\end{aligned}$$

Antes de probar el lema 3.47 requerimos verificar el siguiente resultado auxiliar:

**Lema 3.48.** Sea  $v \in L^\infty(\mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ . Se define:

$$V_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\tilde{\Omega}} |v(x,t) - v(\bar{x}, \bar{t})| dx dt d\bar{x} d\bar{t},$$

donde

$$\tilde{\Omega} = \left\{ \left| \frac{1}{2}(x - \bar{x}) \right| < \varepsilon, \left| \frac{1}{2}(t - \bar{t}) \right| < \varepsilon, \left| \frac{1}{2}(x + \bar{x}) \right| < r, \left| \frac{1}{2}(t + \bar{t}) \right| < r \right\},$$

con  $r > 0$  fijo, y  $\varepsilon > 0$ . Entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V_\varepsilon = 0.$$

*Demostración.* Sea el cambio de variables

$$\hat{T} = \frac{1}{2}(t + \bar{t}), \quad \hat{S} = \frac{1}{2}(t - \bar{t}), \quad \hat{X} = \frac{1}{2}(x + \bar{x}), \quad \hat{Y} = \frac{1}{2}(x - \bar{x}),$$

de modo que

$$V_\varepsilon = \frac{4}{\varepsilon^2} \int_{\hat{\Omega}} |v(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - v(\hat{X} - \hat{Y}, \hat{T} - \hat{S})| d\hat{X} d\hat{T} d\hat{Y} d\hat{S},$$

con  $\hat{\Omega} = \{|\hat{Y}| < \varepsilon, |\hat{S}| < \varepsilon, |\hat{X}| < r, |\hat{T}| < r\}$ . Podemos escribir

$$V_\varepsilon = 4 \int_{\{|\hat{X}| < r, |\hat{T}| < r\}} G_\varepsilon(\hat{X}, \hat{T}) d\hat{X} d\hat{T},$$

donde

$$G_\varepsilon(\hat{X}, \hat{T}) = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\{|\hat{Y}| < \varepsilon, |\hat{S}| < \varepsilon\}} |v(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - v(\hat{X} - \hat{Y}, \hat{T} - \hat{S})| d\hat{Y} d\hat{S}.$$

En este punto recordamos la definición de un *punto de Lebesgue* (cf. Rudin [190]):  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  es un punto de Lebesgue de  $v = v(x), x \in \mathbb{R}^n$  si

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon^n} \int_{|x-x_0| \leq \varepsilon} |v(x) - v(x_0)| dx = 0.$$

Una propiedad importante de los puntos de Lebesgue es que ocurren c.d.s.:

**Proposición 3.49.** *Si  $v \in L_{\text{loc}}^\infty$  entonces el conjunto de puntos que no son puntos de Lebesgue de  $v$  tiene medida cero.*

*Demostración.* Es conocido que si  $v \in L^1(\mathbb{R}^n)$  entonces el conjunto de puntos que no son puntos de Lebesgue de  $v$  tiene medida cero (ver Rudin [190], teorema 7.7, pág. 138). Dado que  $v \in L_{\text{loc}}^\infty \subset L_{\text{loc}}^1$ , concluimos que si  $v$  es acotada en un compacto, entonces el conjunto de puntos que no son de Lebesgue tiene medida cero.  $\square$

Por ende, dado que

$$|v(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - v(\hat{X} - \hat{Y}, \hat{T} - \hat{S})| \leq |v(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - v(\hat{X}, \hat{T})| + |v(\hat{X}, \hat{T}) - v(\hat{X} - \hat{Y}, \hat{T} - \hat{S})|,$$

entonces

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} G_\varepsilon(\hat{X}, \hat{T}) = 0,$$

c.d.s. en compactos de  $|\hat{X}| \leq r, |\hat{T}| \leq r$ . Mas aún,  $G_\varepsilon$  es acotada:

$$|G_\varepsilon(\hat{X}, \hat{T})| \leq 2\|v_0\|_\infty \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\{|\hat{Y}| < \varepsilon, |\hat{S}| < \varepsilon\}} d\hat{Y} d\hat{S} = 2\|v_0\|_\infty < +\infty.$$

Por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} V_\varepsilon = 0.$$

$\square$

*Demostración del lema 3.47.* Dado que  $\psi \in C_0^\infty$  y  $\eta_\varepsilon(z) = 0$  si  $|z| \geq \varepsilon$  tenemos que

$$I_1 = \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(x,t) - \bar{u}(\bar{x}, \bar{t})| \psi_T \left( \frac{x + \bar{x}}{2}, \frac{t + \bar{t}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x - \bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t - \bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t},$$

con  $r > 0$  fijo, tal que el soporte de  $\psi$  está contenido en  $|X| < r, |T| < r$ . Claramente  $I_1 \geq 0$ . Por la desigualdad del triángulo,

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \left| \psi_T \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2} \right) - \psi_T(x,t) \right| \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t} + \\
&+ \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \psi_T(x,t) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t} + \\
&+ \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |\bar{u}(x,t) - \bar{u}(\bar{x},\bar{t})| \psi_T \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t} \\
&=: J_1 + J_2 + J_3.
\end{aligned}$$

Haciendo el cambio de variables de la demostración del lema 3.48, obtenemos que  $\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r} = \{|\hat{Y}| < \varepsilon, |\hat{S}| < \varepsilon, |\hat{X}| < r, |\hat{T}| < r\}$  y, además, dado que  $\psi_T$  es acotada,

$$J_3 \leq \frac{4C}{\varepsilon} \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |\bar{u}(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - \bar{u}(\hat{X} - \hat{Y}, \hat{T} - \hat{S})| d\hat{X} d\hat{T} d\hat{Y} d\hat{S} \rightarrow 0,$$

si  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  tras aplicar el lema 3.48 (el límite es cero salvo en los puntos que no son de Lebesgue, los cuales tienen medida cero y no contribuyen en la integral), y donde  $C > 0$  es una constante uniforme.

Por otro lado, por propiedades del alisador de Friedrichs (proposición A.5),

$$\begin{aligned}
J_1 &= \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - \bar{u}(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S})| |\psi_T(\hat{X}, \hat{T}) - \psi_T(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S})| \times \\
&\quad \times \eta_\varepsilon(\hat{Y}) \eta_\varepsilon(\hat{S}) d\hat{X} d\hat{T} d\hat{Y} d\hat{S} \\
&\rightarrow \left( |u(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - \bar{u}(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S})| |\psi_T(\hat{X}, \hat{T}) - \psi_T(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S})| \right) \Big|_{\hat{Y}=\hat{S}=0} = 0,
\end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Análogamente,

$$\begin{aligned}
J_2 &= \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) - \bar{u}(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S})| \psi_T(\hat{X} + \hat{Y}, \hat{T} + \hat{S}) \eta_\varepsilon(\hat{Y}) \eta_\varepsilon(\hat{S}) d\hat{X} d\hat{T} d\hat{Y} d\hat{S} \\
&\rightarrow \int_{|\hat{X}| < r, |\hat{T}| < r} |u(\hat{X}, \hat{T}) - \bar{u}(\hat{X}, \hat{T})| \psi_T(\hat{X}, \hat{T}) d\hat{X} d\hat{T} \\
&= \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - \bar{u}(x,t)| \psi_T(x,t) dx dt =: \tilde{J}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (I_1 - (J_1 + J_2 + J_3)) = \left( \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1 \right) - \tilde{J} \leq 0.$$

Similarmente, usando la desigualdad del triángulo obtenemos

$$J_2 \leq I_1 + \hat{J}_1 + \hat{J}_2,$$

donde,

$$\hat{J}_1 = \int_{\tilde{\Omega}_{\varepsilon,r}} |u(x,t) - \bar{u}(\bar{x},\bar{t})| \left| \psi_T \left( \frac{x+\bar{x}}{2}, \frac{t+\bar{t}}{2} \right) - \psi_T(x,t) \right| \eta_\varepsilon \left( \frac{x-\bar{x}}{2} \right) \eta_\varepsilon \left( \frac{t-\bar{t}}{2} \right) dx dt d\bar{x} d\bar{t},$$

$$\hat{J}_2 = \int_{\hat{\Omega}_{\varepsilon,r}} |\bar{u}(\bar{x}, \bar{t}) - \bar{u}(x, t)| \psi_T(x, t) \eta_\varepsilon\left(\frac{x - \bar{x}}{2}\right) \eta_\varepsilon\left(\frac{t - \bar{t}}{2}\right) dx dt d\bar{x} d\bar{t}.$$

El límite de  $\hat{J}_1$  se calcula de la misma forma que el límite de  $J_1$ ;  $\hat{J}_3$  se estima de manera análoga a  $J_3$ . En consecuencia,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{J}_1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \hat{J}_3 = 0,$$

y por lo tanto,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (J_2 - I_1) = \tilde{J} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1 \leq 0.$$

Concluimos, de esta forma, que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_1 = \tilde{J}.$$

Los límites para las integrales  $I_2$  e  $I_3$  se calculan de manera análoga.  $\square$

De esta forma, tomando el límite en la desigualdad (3.122) cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , obtenemos la desigualdad

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_t(x, t) |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| + \psi_x(x, t) (f(u(x, t)) - f(\bar{u}(x, t))) \operatorname{sgn}(u(x, t) - \bar{u}(x, t)) dx dt + \\ & + \int_{\mathbb{R}} \psi(x, 0) |u_0(x) - \bar{u}_0(x)| dx \geq 0, \end{aligned}$$

para cualquier función de prueba positiva  $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R}_+)$ ,  $\psi \geq 0$ . En particular, si el soporte de  $\psi$  está contenido en  $\{t > 0\}$ , esta desigualdad toma la forma

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} \psi_t(x, t) |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| + \psi_x(x, t) (f(u(x, t)) - f(\bar{u}(x, t))) \operatorname{sgn}(u(x, t) - \bar{u}(x, t)) dx dt \geq 0. \quad (3.123)$$

Vamos a construir una  $\psi$  adecuada con estas características. Para cada  $R > 0$ , y  $0 \leq \tau_0 < \tau$ , sea el trapecoide

$$\Omega = \{(x, t) : |x| \leq R + N(\tau - t), \tau_0 < t \leq \tau\}.$$

El dominio  $\Omega$  puede apreciarse en la figura 3.15. Definimos  $\alpha_\varepsilon$  como la antiderivada del alisador de Friedrichs (función de Heaviside),

$$\alpha_\varepsilon(z) = \int_{-\infty}^z \eta_\varepsilon(\zeta) d\zeta,$$

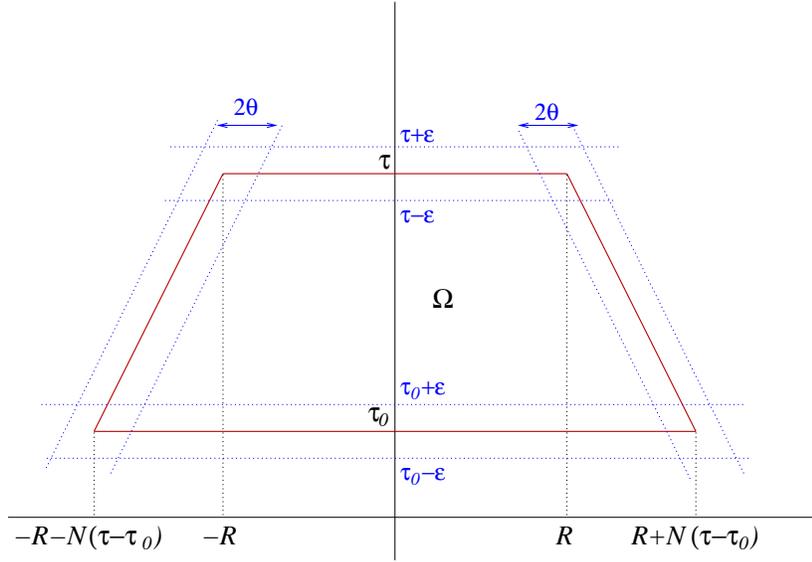
$$\alpha'_\varepsilon(z) = \eta_\varepsilon(z) \geq 0,$$

para cada  $\varepsilon > 0$ . De este modo, para cada  $\varepsilon > 0$ ,  $\theta > 0$ , definimos

$$\psi(x, t) := (\alpha_\varepsilon(t - \tau_0) - \alpha_\varepsilon(t - \tau)) (1 - \alpha_\theta(|x| - R - N(\tau - t))).$$

Esta función es suave, con soporte compacto contenido en  $\{t > 0\}$  y no negativa  $\psi \geq 0$ .

Notamos que



**Figura 3.15** Trapecioide de Kruzkov.

$$\psi(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| \leq R + N(\tau - t) - \theta, \text{ y } \varepsilon + \tau_0 \leq t \leq \tau - \varepsilon, \\ 0, & \text{si } |x| \leq R + N(\tau - t) + \theta, \text{ ó } t \leq \tau_0 - \varepsilon, \text{ ó } t \geq \tau + \varepsilon, \end{cases}$$

es decir,  $\psi$  es una aproximación suave de la función característica del trapecioide  $\Omega$  si suponemos que  $\tau_0 > \varepsilon > 0$  tal y como se aprecia en la figura 3.15. Además notamos que si  $t \geq \tau_0$  entonces

$$\alpha_\varepsilon(t - \tau) - \alpha_\varepsilon(t - \tau_0) \geq 0.$$

Calculamos las derivadas de  $\psi$ . El resultado es:

$$\begin{aligned} \partial_t \psi &= (\eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau)) (1 - \alpha_\theta(|x| - R - N(\tau - t))) + \\ &\quad - N(\alpha_\varepsilon(t - \tau_0) - \alpha_\varepsilon(t - \tau)) \eta_\theta(|x| - R - N(\tau - t)), \\ \partial_x \psi &= -\text{sgn}(x) (\alpha_\varepsilon(t - \tau_0) - \alpha_\varepsilon(t - \tau)) \eta_\theta(|x| - R - N(\tau - t)). \end{aligned}$$

Sustituyendo en la desigualdad (3.123) obtenemos

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u - \bar{u}| (\eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau)) (1 - \alpha_\theta(|x| - R - N(\tau - t))) dx dt + \\ &\quad - \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} (\alpha_\varepsilon(t - \tau_0) - \alpha_\varepsilon(t - \tau)) \eta_\theta(|x| - R - N(\tau - t)) \times \\ &\quad \times (N|u - \bar{u}| + \text{sgn}(u - \bar{u}) \text{sgn}(x) (f(u) - f(\bar{u}))) dx dt \geq 0. \end{aligned}$$

Observamos también que, dado que  $f \in C^1([a, b])$  y por definición de  $N$ , se cumple la condición de Lipschitz

$$|\operatorname{sgn}(u - v)(f(u) - f(v))| \leq N|u - v|,$$

para todo  $u, v \in [a, b]$ . Como  $u$  y  $\bar{u}$  toman valores en  $[a, b]$ , y dado que los factores del integrando son positivos, la segunda integral de la desigualdad anterior es no negativa. Por lo tanto concluimos que

$$\int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| (\eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau)) (1 - \alpha_\theta(|x| - R - N(\tau - t))) dx dt \geq 0. \quad (3.124)$$

La función  $t \mapsto \eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau) \geq 0$  tiene soporte compacto en  $t$ , contenido en el conjunto  $\{|t - \tau| < \varepsilon, |t - \tau_0| < \varepsilon\}$ . Por lo tanto para cada  $\varepsilon > 0$  fijo, tomamos el límite cuando  $\theta \rightarrow 0^+$  y aplicamos el teorema de convergencia dominada para obtener

$$\int_{D^\varepsilon} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| (\eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau)) dx dt \geq 0,$$

donde  $D^\varepsilon = \{(x, t) : |x| \leq R + N(\tau - t), \tau_0 - \varepsilon < t < \tau + \varepsilon\}$ . Sea  $S_t = \{|x| \leq R + N(\tau - t)\}$  cada sección en la integral sobre  $D^\varepsilon$  para cada  $t$ , de modo que la desigualdad anterior se puede escribir como

$$\int_0^{+\infty} (\eta_\varepsilon(t - \tau_0) - \eta_\varepsilon(t - \tau)) W(t) dt \geq 0, \quad (3.125)$$

donde

$$W(t) = \int_{S_t} |u(x, t) - \bar{u}(x, t)| dx.$$

Por propiedades del alisador de Friedrichs, tomando el límite cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$  en la desigualdad (3.125) obtenemos

$$W(\tau_0) - W(\tau) \geq 0,$$

que es otra forma de escribir la desigualdad (3.119). La desigualdad (3.120) se sigue inmediatamente de (3.119) con  $\tau_0 = 0$  y  $\tau = t > 0$ . Con esto terminamos la demostración del teorema 3.44. □

### 3.5.3. Demostración del teorema 3.39

## 3.6. Ejemplos

Esta sección contiene algunos ejemplos que se pueden formular como una ley de conservación escalar con una condición inicial dada. En particular, se presta particular atención a resolver el problema de Riemann. En la primera parte se resuelven algunos problemas sencillos para la ecuación de Burgers con condiciones iniciales determinadas. En la segunda parte, se estudia el modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards introducido en la sección 2.2.2.

En la sección 3.6.2 se resuelve el problema de Riemann para el modelo de Buckley-Leverett, para el cual la función de flujo tiene cambios de convexidad.

**Ejemplo 3.50.** En este ejemplo consideremos nuevamente la ecuación de Burgers (3.72), ahora con condición inicial

$$u(x,0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases} \quad (3.126)$$

Observemos que la condición inicial (3.126) contiene *saltos entrópicos* (es decir, valores a la izquierda mayores que el valor a la derecha,  $u_L > u_R$ , caso convexo) en  $x = -1$  y  $x = 1$ , por lo cual la formación de choques o discontinuidades es instantánea. Para tiempos cortos existen dos ondas de choque que “emanan” de  $x = -1$  y de  $x = 1$ , con velocidades

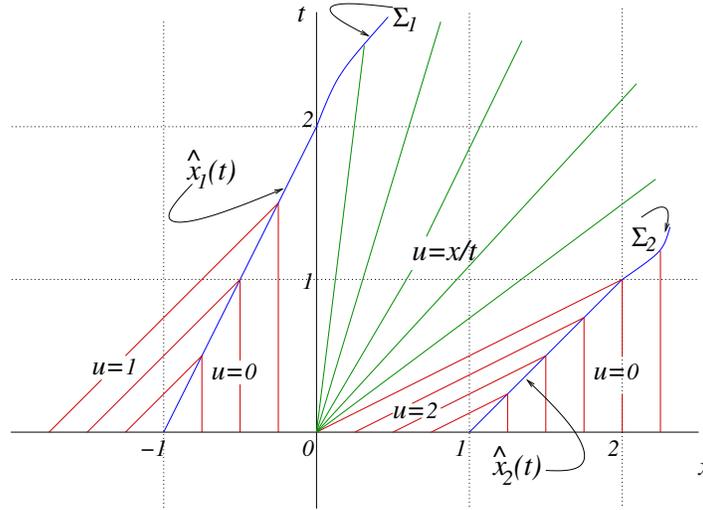
$$s_1 = \frac{\frac{1}{2}(0)^2 - \frac{1}{2}(1)^2}{0 - 1} = \frac{1}{2}, \quad \text{y} \quad s_2 = \frac{\frac{1}{2}(2)^2 - \frac{1}{2}(0)^2}{2 - 0} = 1,$$

respectivamente. La primera onda de choque pasa por  $(-1,0)$  y por lo tanto tiene la forma  $\hat{x}_1(t) = \frac{1}{2}(t-2), t \in [0, T_1)$ , mientras que la segunda onda de choque pasa por  $(1,0)$  y está dada por  $\hat{x}_2(t) = t+1, t \in [0, T_2)$ . Los tiempos de existencia  $T_1, T_2 > 0$  de ambas ondas de choque están por determinarse. Por otro lado, observemos que en el punto  $x = 0$  hay un salto de la condición inicial de la forma  $u_L = 0 < u_R = 2$ , generando una onda de rarefacción centrada en ese punto, la cual está limitada por la derecha por la característica que pasa por  $(0,0)$  con pendiente  $\frac{1}{2}$  (es decir,  $u = 2$  es constante) y que intersecta a la onda de choque  $\hat{x}_2$  en  $(2,1)$ , mientras que está limitada por la izquierda por el eje  $x = 0$ . Dado que la función de flujo es la función de Burgers  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ , el valor de la onda de rarefacción en este sector es  $u = x/t$  (véase la figura 3.16).

Las características con pendiente  $\frac{1}{2}$  que provienen de la condición inicial  $u = 2$  en  $0 < x < 1$  están acotadas por la onda de choque  $\hat{x}_2(t)$  a la derecha, y por la característica  $x = 2t$  a la izquierda, la cual intersecta a  $\hat{x}_2(t)$  en el punto  $(2,1)$ . Así, la onda de choque  $\hat{x}_2(t)$  existe para  $0 \leq t < 1$ , y obtenemos que  $T_2 = 1$ . Para  $t \geq 1$ , la onda de choque se prolonga como una discontinuidad que denotaremos como  $\Sigma_2$ . Del mismo modo, notamos que la onda de choque  $\hat{x}_1(t)$  intersecta a  $x = 0$  en  $(0,2)$ . Para tiempos menores a  $t = 2$ , el segmento  $\{(0,t) : 0 \leq t < 2\}$  separa continuamente los valores  $u = 0$  a la izquierda, y la función  $u = x/t$  de la onda de rarefacción a la derecha. Para  $t \geq 2$ , la onda de choque se prolonga como una discontinuidad  $\Sigma_1$  por determinar. De esta forma, obtenemos que  $T_1 = 2$ .

Con el fin de extender la solución más allá de los tiempos de existencia  $T_1$  y  $T_2$  es preciso determinar la forma de las discontinuidades  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ . Para ello, recurrimos a las condiciones de Rankine-Hugoniot. Denotemos  $\Sigma_j = \{(\xi_j(t), t) : t \geq T_j\}$ ,  $j = 1, 2$ . Sobre  $\Sigma_1$  tenemos que  $u_L = 1$  y  $u_R = \xi_1(t)/t$ ; de este modo,  $[u] = \xi_1/t - 1$ ,  $[f(u)] = (\xi_1^2/t^2 - 1)/2$  y la condición de Rankine-Hugoniot implica que

$$\frac{d\xi_1}{dt} \left( \frac{\xi_1}{t} - 1 \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_1^2}{t^2} - 1 \right),$$



**Figura 3.16** Para tiempos cortos, existen dos ondas de choque que “emanan” de los saltos entrópicos de la condición inicial (3.126) en  $x = -1$  y  $x = 1$ . El salto en  $x = 0$  genera una onda de rarefacción centrada en cero. A partir de  $T_1 = 2$  la onda de choque  $\hat{x}_1(t)$  se prolonga como una discontinuidad  $\Sigma_1$  que está determinada por las condiciones de Rankine-Hugoniot. Igualmente, la onda de choque  $\hat{x}_2$  se prolonga como una discontinuidad que llamamos  $\Sigma_2$  para tiempos mayores a  $T_2 = 1$ .

es decir, la velocidad de propagación está determinada por

$$\frac{d\xi_1}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\xi_1}{t} + 1 \right).$$

Resolviendo la ecuación anterior por variación de parámetros y dado que  $\Sigma_1$  pasa por el punto  $(0, 2)$  obtenemos  $\xi_1(t) = t - \sqrt{2t}$  para  $t \geq 2$ .

$$\xi_1(t) = t - \sqrt{2t}, \quad t \geq 2.$$

Análogamente, sobre  $\Sigma_2$  tenemos que  $u_L = \xi_2(t)/t$  y  $u_R = 0$ , por lo que  $[u] = -\xi_2/t$ ,  $[f(u)] = -\xi_2^2/(2t^2)$  y la condición de Rankine-Hugoniot sobre  $\Sigma_2$  implica que la velocidad de propagación está dada por

$$\frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{2} \frac{\xi_2}{t}.$$

Resolviendo la ecuación y en vista de que la discontinuidad pasa por el punto  $(2, 1)$  obtenemos  $\xi_2(t) = 2\sqrt{t}$  para  $t \geq 1$ .

Observamos que las discontinuidades  $\Sigma_1, \Sigma_2$  son admisibles pues satisfacen las condiciones de entropía de Lax. En efecto, para todo  $t \geq 2$ , y sobre  $\Sigma_1$  tenemos que

$$1 - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{t}} = \frac{\xi_1(t)}{t} = u_R = f'(u_R) < \frac{d\xi_1}{dt} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2t}} < f'(u_L) = u_L = 1.$$

Análogamente, para todo  $t \geq 1$  y sobre  $\Sigma_2$  se cumple que

$$0 = u_R = f'(u_R) < \frac{d\xi_2}{dt} = \frac{1}{\sqrt{t}} < f'(u_L) = u_L = \frac{\xi_2(t)}{t} = \frac{2}{\sqrt{t}}.$$

Las desigualdades de Lax implican no sólo que las discontinuidades  $\xi_1(t)$  y  $\xi_2(t)$  son admisibles para todo  $t \geq 2$  y para todo  $t \geq 1$  respectivamente, sino además que las características a la izquierda de  $\Sigma_1$  y las características a la derecha de  $\Sigma_2$  siempre aparentan “entrar” a la discontinuidad, asegurando que para todo  $(x, t)$  cerca de dichas curvas, ya sea a la izquierda de  $\Sigma_1$  o a la derecha de  $\Sigma_2$ , éste punto pertenece a una característica que intersecta el eje  $x$  en  $x < -1$  ó  $x > 2$ , según el caso.

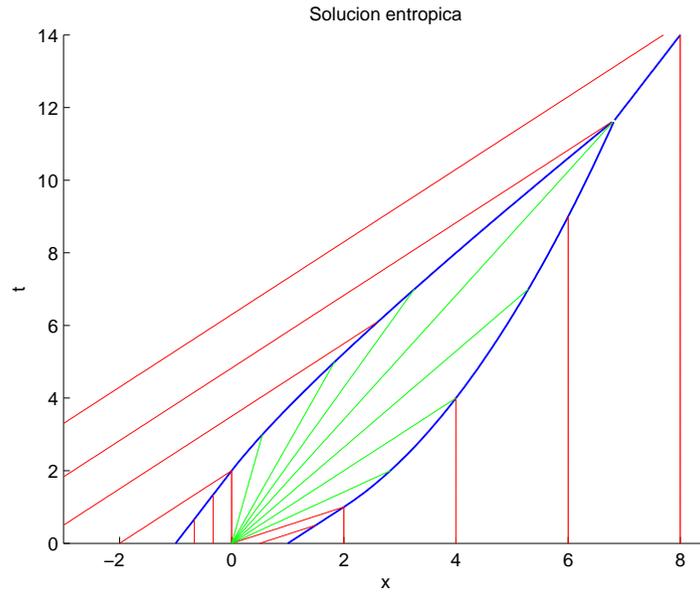
Notemos, sin embargo, que para cierto tiempo  $T_3 > 2$  las discontinuidades  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se intersectan. El tiempo de intersección está dado por  $T_3 := (2 + \sqrt{2})^2 > 6$ , y se da en el punto  $(X_3, T_3) := (2\sqrt{T_3}, T_3) = (2(2 + \sqrt{2}), (2 + \sqrt{2})^2)$ . Esta observación sugiere que las discontinuidades  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$  se colapsan en una discontinuidad  $\Sigma_3$  que se prolonga mas allá del tiempo  $T_3$ . La onda de rarefacción cesa de existir para  $t > T_3$ , y dado que el valor de  $u$  a la izquierda de  $\Sigma_1$  (y por ende, de  $\Sigma_3$ ) es  $u_L = 1$ , y que el valor a la derecha es  $u_R = 0$ , ésta discontinuidad  $\Sigma_3$  es una onda de choque que se propaga con velocidad constante  $s = \frac{1}{2}$ , emana del punto  $(X_3, T_3)$ , y está dada por  $\hat{x}_3(t) = \frac{1}{2}(t - T_3) + X_3$ . Claramente, esta discontinuidad es admisible pues satisface la condición de entropía de Lax. En conclusión, definimos las regiones

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, t) : x < \frac{1}{2}(t - 2), 0 \leq t < 2\} \cup \{(x, t) : x < t - \sqrt{2t}, 2 < t < (2 + \sqrt{2})^2\} \cup \\ &\quad \cup \{(x, t) : x < \frac{1}{2}(t - (2 + \sqrt{2})^2) + 2(2 + \sqrt{2}), t > (2 + \sqrt{2})^2\} \\ R_2 &= \{(x, t) : \frac{1}{2}(t - 2) < x < 0, 0 \leq t < 2\} \cup \{(x, t) : t + 1 < x, 0 \leq t < 1\} \cup \\ &\quad \cup \{(x, t) : 2\sqrt{2} < x, 1 < t < (2 + \sqrt{2})^2\} \cup \\ &\quad \cup \{(x, t) : \frac{1}{2}(t - (2 + \sqrt{2})^2) + 2(2 + \sqrt{2}) < x, t > (2 + \sqrt{2})^2\}, \\ R_3 &= \{(x, t) : 2t < x < 1 + t, 0 \leq t \leq 1\}, \\ R_4 &= \{(x, t) : \max(0, \xi_1(t)) < x < \min(2t, \xi_2(t)), 0 \leq t \leq (2 + \sqrt{2})^2\}. \end{aligned}$$

La solución construída está determinada en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$  c.d.s. (excepto en las discontinuidades) mediante la fórmula

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & (x, t) \in R_1, \\ 0, & (x, t) \in R_2, \\ 2, & (x, t) \in R_3, \\ x/t, & (x, t) \in R_4. \end{cases} \quad (3.127)$$

La solución (3.127) es, por construcción, entrópica, y en vista del teorema de Lax (teorema 3.18), única. Un esquema de la solución se puede apreciar en la figura 3.17.



**Figura 3.17** Única solución entrópica al problema de Cauchy (3.72) - (3.126), determinada explícitamente por la fórmula (3.127). La gráfica muestra la solución exacta y fue generada con MATLAB<sup>®</sup>. Las ondas de choque que se generan en  $x = -1$  y en  $x = 1$  (en azul en la figura) continúan como curvas  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , las cuales eventualmente se encuentran en un determinado tiempo  $T_3 > 0$ , y forman una tercera onda de choque con velocidad constante  $s = \frac{1}{2}$ . La onda de rarefacción centrada en  $x = 0$  (en verde en la figura) existe para tiempo  $t \leq T_3$ . Las curvas características (rectas en rojo) tienen como pendiente constante el valor de  $u$  que intersecta la condición inicial a tiempo  $t = 0$ .

### 3.6.1. Modelo de tráfico

### 3.6.2. Flujo bifásico

Como ejemplo de una ley de conservación escalar con función de flujo no convexa, consideremos la ecuación de Buckley-Leverett [31],

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (3.128)$$

con función de flujo,

$$f(u) = \frac{u^2}{u^2 + a(1-u)^2}, \quad (3.129)$$

donde  $a \neq 0$  es una constante. Éste es un modelo simplificado para dos fluidos (o “fases”) en un medio poroso. La variable  $u$  representa la componente de la velocidad de la mezcla en una dimensión. Una aplicación de este modelo es la simulación de reservas de petróleo. Por

ejemplo, un método para recuperación secundaria de petróleo consiste en bombear agua en los pozos para que el petróleo salga. En este caso las dos fases son petróleo y agua, y el medio poroso es la roca o arena. El modelo (3.129) es una sobresimplificación de este fenómeno, pero captura algunas de las características más importantes de este tipo de flujo.

Consideremos el problema de Riemann para la ecuación (3.128) - (3.129), con  $a = \frac{1}{2}$ , y con datos iniciales

$$u(x, 0) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (3.130)$$

El objetivo es modelar el flujo de agua pura ( $u = 1$ ) en petróleo puro ( $u = 0$ ). Cada valor de  $u \in (0, 1)$  representa la proporción de la mezcla de agua y petróleo.

La interpretación es la siguiente: cuando el agua entra en el canal, ésta desplaza una cierta fracción de petróleo  $u_*$  instantáneamente. Detrás de la onda de choque, existe una mezcla de agua con petróleo, que contiene cada vez menos petróleo conforme avanza el tiempo. En el pozo de producción, localizado por ejemplo en  $x = 1$ , uno obtiene petróleo puro hasta que llega la onda de choque, seguida de una mezcla de agua con petróleo (onda de rarefacción) que contiene más agua en cada instante.

## Ejercicios

**3.1.** Supongamos que  $f$  es una función estrictamente convexa,  $f''(u) \geq \delta > 0$  para toda  $u$ , y  $u_0$  es de clase  $C^1$ , acotada y con derivada acotada. Pruebe que si  $u(x, t)$  es una solución clásica de (3.1) en  $\mathbb{R} \times [0, +\infty)$ , entonces

$$u_x < \frac{1}{\delta t}. \quad (3.131)$$

**3.2.** Probar que la función  $\Psi$  dada en (3.13) es el flujo de entropía asociado a la función convexa  $E$  en el sentido del lema 3.3.

**3.3.** Sea la onda  $N$  para la ecuación de Burgers definida en (3.83) y representada en la figura 3.11.

- (a) Pruebe que (3.83) es una solución en sentido distribucional de la ecuación de Burgers, con condición inicial  $u_0 = 0$ .
- (b) Pruebe que (3.83) satisface la condición de entropía de Oleñnik:

$$u(x + \varepsilon) - u(x, t) < \frac{C\varepsilon}{t}, \quad \varepsilon > 0,$$

para todo  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  (en particular, a través de las discontinuidades  $x = \pm\sqrt{t}$ ).

- (c) Explique porqué, sin embargo,  $N$  no es la solución entrópica al problema de Cauchy (la única solución entrópica con  $u_0 \equiv 0$  es la solución idénticamente igual a cero).

**3.4.** Encuentre la única solución entrópica al problema de Cauchy para la ecuación de Burgers (3.72) con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \\ 0, & -1 \leq x \leq 0, \\ 2 & 0 < x < 1, \\ 0, & x \geq 1. \end{cases}$$

Encuentre una fórmula explícita para la solución para todo  $t > 0$  y  $x \in \mathbb{R}$ . *Sugerencia:* Observemos que la condición inicial contiene *saltos entrópicos* (es decir, valores a la izquierda mayores que el valor a la derecha,  $u_L > u_R$ , caso convexo) en  $x = -1$  y  $x = 1$ , por lo cual la formación de choques o discontinuidades es instantánea. Para tiempos cortos existen dos ondas de choque que “emanan” de  $x = -1$  y de  $x = 1$ .

**3.5.** Encuentre explícitamente la única solución entrópica al problema de Cauchy para la ecuación de Burgers (3.72) con condición inicial

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Observe que, en este caso, la onda  $N$  definida en (3.81) (con  $p = 0$ ,  $q = 2$ ,  $a_0 = 0$  y  $d = 1$ ) tiene la forma

$$N(x, t) = \begin{cases} x/t, & 0 < x < \sqrt{2t}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Verifique la conclusión del teorema 3.33 demostrando que, de hecho,  $u(\cdot, t) \equiv N(\cdot, t)$  para todo  $t \geq 2$ .

**3.6.** Dibuje las características y describa la evolución cuando  $t \rightarrow +\infty$  de la solución al problema

$$u_t + uu_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0,$$

con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} \sin x, & 0 < x < \pi, \\ 0, & x \leq 0, \text{ o } x \geq \pi. \end{cases}$$

**3.7. Tráfico vehicular en un túnel.** Un modelo más realista para el flujo vehicular dentro de un túnel está descrito por la siguiente función de flujo:

$$q(\rho) = \begin{cases} \rho v_m, & 0 \leq \rho \leq \rho_c, \\ \rho \lambda \log\left(\frac{\rho_m}{\rho}\right), & \rho_c \leq \rho \leq \rho_m, \end{cases}$$

donde

$$\lambda = \frac{v_m}{\log(\rho_m/\rho_c)}.$$

Observe que  $q$  es continua también en el valor de densidad crítica  $\rho_c := \rho_m e^{-v_m/\lambda}$ . Si  $\rho \leq \rho_c$  los conductores tienen la libertad de conducir a la velocidad máxima  $v_m$ . Suponga que

la entrada del túnel está localizada en  $x = 0$  y que los automóviles esperan (con densidad máxima  $\rho_m$ ) a la apertura del túnel a tiempo  $t = 0$ . De este modo, la condición inicial es

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho_m, & x < 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases}$$

- (a) Determine la densidad y la velocidad de los automóviles para  $t > 0$ . Dibuje las gráficas como función del tiempo.
- (b) Determine la trayectoria de un auto que inicialmente se encuentra en la posición  $x = x_0 < 0$  y calcule el tiempo que le toma llegar a la entrada del túnel. Dibuje su trayectoria en el plano  $x, t$ .

### Nota bibliográfica

La demostración de la proposición 3.16, es una generalización del principio de contracción en  $L^1$  para  $f$  convexa probado por B. Quinn-Keyfitz [185] (véase también [128]).

La fórmula de Lax fue establecida originalmente por Hopf [94] para el caso de flujo de Burgers. Para el caso con  $f$  estrictamente convexa la fórmula fue escrita por primera vez por Lax en [123] y analizada en [124]. Una versión en el caso multidimensional se puede encontrar en [95], y la versión para  $f$  general con  $u_0$  monótona se encuentra en el citado trabajo de Kunik [118]. Otra prueba de unicidad para el caso convexo fue introducida por Oleñnik [176].

El problema de Riemann fue planteado originalmente por B. Riemann [188] para las ecuaciones de dinámica de gases.

La prueba del teorema de existencia y unicidad de la solución entrópica para una ley de conservación escalar en varias dimensiones espaciales se puede encontrar en [84].

Para el análisis correspondiente a ondas de choque, ondas de rarefacción y el problema de Riemann en el caso de funciones con cambios de convexidad, recomiendo al lector consultar el libro de LeFloch [135].

## Capítulo 4

# Sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en una dimensión

En este capítulo estudiamos sistemas hiperbólicos de leyes de conservación en una dimensión espacial. En la primera sección introducimos los conceptos de campo característico genuinamente no lineal y de campo característico linealmente degenerado.

### 4.1. Sistemas de leyes de conservación en una dimensión

Consideremos sistemas de leyes de conservación en una dimensión espacial de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad (4.1)$$

donde  $u \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  es abierto, convexo,  $n \geq 1$ , y la función  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^2$ . Aquí,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$  y las componentes de  $u$  y de  $f$  las denotamos mediante

$$u = (u_1, \dots, u_n)^\top, \quad \text{y} \quad f(u) = (f_1(u), \dots, f_n(u))^\top,$$

respectivamente. En acuerdo con con la notación del capítulo 2, denotamos a la matriz jacobiana de  $f$  como

$$A(u) := Df(u) = \begin{pmatrix} \partial_{u_1} f_1 & \cdots & \partial_{u_n} f_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \partial_{u_1} f_n & \cdots & \partial_{u_n} f_n \end{pmatrix},$$

para todo  $u \in \Omega$ .

#### 4.1.1. Hiperbolicidad e hiperbolicidad estricta

Antes de comenzar con el estudio de sistemas no lineales, es conveniente analizar sistemas lineales con coeficientes constantes, para los cuales, por ejemplo, el problema de Riemann es fácil de resolver.

**Ejemplo 4.1.** (*Sistemas lineales con coeficientes constantes*). Recordemos que tras linealizar el sistema (4.1) alrededor de un estado  $u_* \in \Omega$  obtenemos un sistema con coeficientes constantes. De este modo, consideremos el siguiente sistema de ecuaciones

$$u_t + Au_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (4.2)$$

donde  $u \in \mathbb{R}^n$  y  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz constante y estrictamente hiperbólica, es decir,  $A$  tiene exactamente  $n$  valores propios reales y distintos que denotamos por  $\lambda_1 < \dots < \lambda_n$ . Cada valor propio  $\lambda_j$  tiene vectores propios derecho e izquierdo asociados,  $r_j \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  y  $l_j \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , respectivamente, tales que  $l_j A = \lambda_j l_j$ , y  $A r_j = \lambda_j r_j$ , para cada  $j = 1, \dots, n$ . Los conjuntos de vectores derechos e izquierdos constituyen bases de  $\mathbb{R}^n$ . Más aún, es posible normalizar dichas bases de modo que

$$l_j r_k = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Definimos las matrices

$$R = (r_1 \cdots r_n) \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad L = \begin{pmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Dado que los vectores propios son una base ortonormal tenemos que  $RL = LR = I$ . Claramente,  $L$  y  $R$  diagonalizan la matriz  $A$ ,

$$LAR = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda. \quad (4.3)$$

Definimos el cambio de variables  $v := Lu$ . Multiplicando el sistema (4.2) por la izquierda por  $L$ , obtenemos un sistema *desacoplado* de ecuaciones escalares,

$$Lu_t + LAu_x = v_t + \Lambda v_x = 0,$$

es decir,

$$v_{j_t} + \lambda_j v_{j_x} = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.4)$$

Cada ecuación escalar se puede resolver de manera directa e independiente. Por lo visto en el capítulo 2,  $v_j$  es constante a lo largo de rectas características de la forma

$$x_j(t) = \lambda_j t + x_j^0, \quad (4.5)$$

y la solución está determinada de manera única por

$$v_j(x, t) = v_j(x - \lambda_j t, 0),$$

donde cada  $v_j(\cdot, 0)$  está determinada por las condiciones iniciales. De este modo, es posible derivar una expresión explícita y única para la solución al problema de Cauchy

$$\begin{aligned} u_t + Au_x &= 0, \\ u(x, 0) &= u_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

en  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Denotando  $v_0 := Lu_0$ , observamos que cada  $v_j$  está dada por

$$v_j(x, t) = v_j(x - \lambda_j t, 0) = (Lu_0)_j(x - \lambda_j t) = l_j u_0(x - \lambda_j t).$$

Así, la solución al problema en las coordenadas  $u$  tiene una representación simple en términos de las condiciones iniciales:

$$u(x, t) = Rv(x, t) = \sum_{j=1}^n v_j(x, t)r_j = \sum_{j=1}^n l_j u_0(x - \lambda_j t)r_j.$$

**Observación 4.2.** Notamos que la solución posee la misma regularidad que la condición inicial, esto es, si  $u_0 \in C^k$ , con  $k \geq 1$ , entonces  $u \in C^k$  como función de  $x$  y de  $t$ . Las rectas (4.5) son las curvas características del sistema: cada recta es llamada la  $j$ -característica, que se propaga con velocidad  $\lambda_j$ . En el caso de un sistema estrictamente hiperbólico, por cada punto del espacio-tiempo  $(x, t)$  pasan exactamente  $n$  curvas características.

Consideremos ahora el caso particular del problema de Riemann, con condición inicial,

$$u_0(x) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0, \end{cases} \quad (4.7)$$

donde  $u_R \neq u_L \in \mathbb{R}^n$  son vectores (estados) constantes, que tienen representaciones en la base invariante de  $A$  dadas por

$$u_L = \sum_{j=1}^n \alpha_j r_j, \quad u_R = \sum_{j=1}^n \beta_j r_j.$$

En las variables características,  $v = Lu$ , la condición inicial es simplemente

$$(v_0)_j(x) = \begin{cases} \alpha_j, & x < 0, \\ \beta_j, & x > 0, \end{cases} \quad (4.8)$$

dado que  $Lu_L = \sum \alpha_j Lr_j = \sum \alpha_j \hat{e}_j$ , donde  $\{\hat{e}_j\}_{j=1}^n$  es la base canónica derecha de  $\mathbb{R}^n$ . Igualmente  $Lu_R = \sum \beta_j \hat{e}_j$ . Por ende, la solución es

$$v_j(x, t) = v_j(x - \lambda_j t, 0) = \begin{cases} \alpha_j, & x < \lambda_j t, \\ \beta_j, & x > \lambda_j t. \end{cases}$$

En términos de las variables originales obtenemos

$$u(x, t) = Rv = \sum_{j=1}^n v_j(x, t)r_j. \quad (4.9)$$

Notamos que las soluciones  $v_j(x,t)$  son *autosimilares*, ya que dependen únicamente del valor de la razón  $x/t$ , es decir,

$$w_j(x/t) := v_j(x,t) = \begin{cases} \alpha_j, & \frac{x}{t} < \lambda_j, \\ \beta_j, & \frac{x}{t} > \lambda_j, \end{cases} \quad t > 0.$$

Para cada  $(x,t)$  con  $t > 0$  existe  $p \in \mathbb{N}$  con  $1 \leq p \leq n$  tal que  $\lambda_1 < \dots < \lambda_p \leq \frac{x}{t} \leq \lambda_{p+1} < \dots < \lambda_n$ , por lo que en el intervalo  $\lambda_p t < x < \lambda_{p+1} t$ , la solución  $u$  toma el valor constante

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^p \beta_j r_j + \sum_{j=p+1}^n \alpha_j r_j =: w_p,$$

para cada  $0 \leq p \leq n$ , asumiendo por supuesto la convención

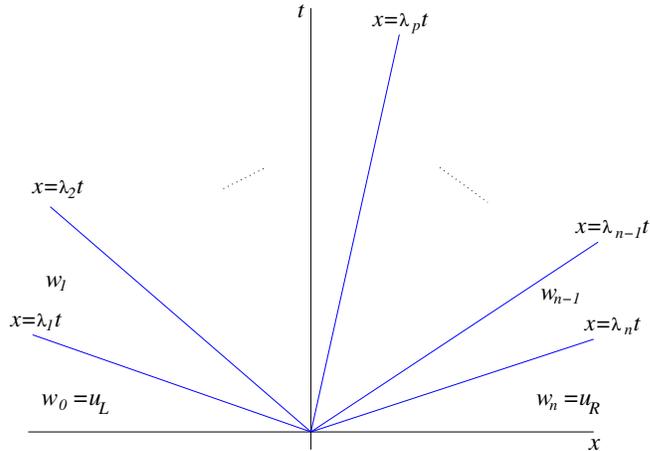
$$-\infty = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} = +\infty,$$

con  $w_0 = u_L$  y  $w_n = u_R$ . De este modo la solución está determinada por

$$u(x,t) = \begin{cases} w_0 = u_L, & x < \lambda_1 t, \\ w_1, & \lambda_1 t < x < \lambda_2 t, \\ \vdots \\ w_p, & \lambda_p t < x < \lambda_{p+1} t, \\ \vdots \\ w_n = u_R, & \lambda_n t < x. \end{cases} \quad (4.10)$$

Véase la figura 4.1.

**Figura 4.1** Esquema de la solución al problema de Riemann para un sistema lineal. La solución es constante por pedazos, donde las  $n$  discontinuidades son líneas rectas que se propagan con velocidades características que corresponden a los valores propios de la matriz  $A$ . Notablemente, se satisfacen las condiciones de Rankine-Hugoniot en cada discontinuidad.



La solución no está definida sobre las curvas características  $x = \lambda_j t$ . La interpretación de la solución (4.10) es la siguiente: la discontinuidad inicial (4.7) se distribuye en  $n$  discontinuidades que se propagan con velocidades características distintas  $\lambda_j \in \mathbb{R}$ . La solución es, por lo tanto, constante por pedazos, con discontinuidades que coinciden con las curvas características asociadas al sistema.

**Observación 4.3.** Notamos que los estados  $w_p$ , con  $1 \leq p \leq n$ , satisfacen

$$[w] := w_p - w_{p-1} = (\beta_p - \alpha_p)r_p \Rightarrow [f] = A[w] = A(w_p - w_{p-1}) = \lambda_p(w_p - w_{p-1}),$$

es decir, las condiciones de Rankine-Hugoniot (2.45) (con flujo  $f(u) = Au$  y velocidad constante  $s = \lambda_p$ ) se satisfacen en cada discontinuidad.

### 4.1.2. Nolinealidad genuina y degeneración lineal

A partir de este punto nos concentraremos en el estudio de sistemas no lineales. Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto, convexo y  $f \in C^2(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Vamos a suponer, por conveniencia, que el sistema de leyes de conservación (4.1) es estrictamente hiperbólico. De este modo, para cada valor propio  $\lambda_j(u)$  con  $u \in \Omega$ , existen vectores propios derecho  $r_j(u) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ , e izquierdo  $l_j(u) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ , que satisfacen

$$\begin{aligned} A(u)r_j(u) &= \lambda_j(u)r_j(u), \\ l_j(u)A(u) &= \lambda_j(u)l_j(u), \end{aligned} \quad (4.11)$$

para cada  $j = 1, \dots, n$ ,  $u \in \Omega$ . Dado que los valores propios son todos distintos,  $\{l_j\}_{j=1}^n$  y  $\{r_j\}_{j=1}^n$  constituyen (ambas) bases duales de  $\mathbb{R}^n$  que satisfacen

$$l_j(u)r_k(u) = 0, \quad j \neq k. \quad (4.12)$$

Análogamente al caso escalar, para el cual la convexidad (o concavidad) de la función de flujo es crucial en el estudio de existencia de soluciones, es preciso definir la noción de convexidad para sistemas.

**Definición 4.4.** Decimos que el  $p$ -campo característico, con  $1 \leq p \leq n$ , es *genuinamente no-lineal* si

$$D\lambda_p(u) \cdot r_p(u) \neq 0, \quad \forall u \in \Omega. \quad (4.13)$$

En este caso también se llama al  $p$ -campo como un *modo convexo*. Por otra parte, el  $p$ -campo característico se denomina *linealmente degenerado* si

$$D\lambda_p(u) \cdot r_p(u) = 0, \quad \forall u \in \Omega. \quad (4.14)$$

Aquí  $D\lambda_p(u) = (\partial_{u_1}\lambda_p, \dots, \partial_{u_n}\lambda_p)^\top \in \mathbb{R}^n$ .

**Observación 4.5.** En el caso de una ecuación escalar ( $n = 1$ ), tenemos que  $\lambda(u) = a(u) = f'(u)$  es la única velocidad característica y el “vector” propio es simplemente  $r(u) \equiv 1$ . Así, la condición de nolinealidad genuina (4.13) toma la forma  $f''(u) \neq 0$ , para toda  $u \in \Omega$ , es

decir,  $f$  es estrictamente cóncava o estrictamente convexa. Por otra parte la condición de degeneración lineal (4.14) es  $f''(u) = 0$ , para  $u \in \Omega$ , lo cual implica que la ecuación es lineal, con  $a(u) = a_0$  constante. La definición de no linealidad genuina extiende a sistemas el concepto de convexidad (o concavidad) estricta para el caso escalar.

**Ejemplo 4.6.** (*El sistema  $p$ .*) Consideremos nuevamente el sistema  $p$  (2.24) bajo las hipótesis  $p'(v) < 0$  y  $p''(v) > 0$ . Como vimos en la sección 2.5.2, los valores propios de la matriz jacobiana asociada al sistema (2.24) son

$$\lambda_1(v) = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2(v) = \sqrt{-p'(v)},$$

con vectores propios asociados

$$r_1(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \quad r_2(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}.$$

Calculando el jacobiano de los valores propios con respecto a las variables  $v$  y  $w$ , obtenemos

$$D\lambda_1 = \begin{pmatrix} \frac{p''(v)}{2\sqrt{-p'(v)}} \\ 0 \end{pmatrix} = -D\lambda_2$$

por lo que

$$D\lambda_1 \cdot r_1 = \frac{p''(v)}{2\sqrt{-p'(v)}} = -D\lambda_2 \cdot r_2 \neq 0,$$

para todo  $v$ . Esto implica que los campos característicos del sistema  $p$  (2.24) son genuinamente no lineales.

Al igual que la definición de hiperbolicidad (ver proposición 2.20), las nociones de no linealidad genuina y de degeneración lineal para un campo característico no dependen de la forma conservativa del sistema y son invariantes bajo cambios suaves de coordenadas. Dejamos al lector la prueba de esta propiedad como ejercicio (véase el ejercicio 4.3).

**Ejemplo 4.7.** (*Ecuaciones de Euler en coordenadas eulerianas.*) Consideremos nuevamente el sistema de Euler en forma no conservativa (2.70), escrito nuevamente aquí por conveniencia del lector

$$\begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \frac{p_x}{\rho} &= 0, \\ e_t + ve_x + \frac{pv_x}{\rho} &= 0. \end{aligned} \tag{1.70}$$

La ecuación de estado  $p = \hat{p}(\rho, e)$  satisface las condiciones (2.69), a saber,  $\hat{p} > 0$ ,  $\hat{p}_\rho > 0$  y  $\hat{p}_e > 0$ . Vamos a estudiar los campos característicos de la matriz jacobiana asociada al sistema (2.70) para determinar las condiciones bajo las cuales éstos son genuinamente no lineales o linealmente degenerados. Para tal efecto, y en virtud de la invariancia bajo cambios de coordenadas (Ejercicio 4.3), escribiremos el sistema en términos de una nueva variable termodinámica. Definimos la *entropía específica*  $s$  mediante la primera ley de la termodinámica

$$\theta ds = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho, \quad (4.15)$$

donde  $\theta > 0$  es la temperatura. Es un hecho conocido de la teoría de la termodinámica [40] que una vez prescritas dos variables de estado del gas, por ejemplo, la densidad y la energía interna específica ( $\rho$  y  $e$ , respectivamente), es posible determinar las tres variables restantes (entropía específica  $s$ , presión  $p$  y temperatura  $\theta$ ). De este modo, a partir de la primera ley podemos definir la ecuación de estado del gas en términos de  $\rho$  y de  $s$ , y de una función  $\check{p}$ , de modo que

$$p = \check{p}(\rho, s) = \hat{p}(\rho, \check{e}(\rho, s)),$$

donde  $\check{e}$  es una función que satisface  $e = \check{e}(\rho, s)$ ,  $\check{e}_s = \theta$  a densidad constante, y  $\check{e}_\rho = p/\rho^2$  a entropía constante, en virtud de (4.15). Asimismo, podemos especificar a la entropía mediante una función  $s = \hat{s}(\rho, e)$  que satisface  $\hat{s}_\rho = -p/(\rho^2\theta)$  y  $\hat{s}_e = 1/\theta$ .

Sustituyendo (2.70) y usando la primera ley (4.15), obtenemos

$$\begin{aligned} 0 &= e_t + ve_x + \frac{pv_x}{\rho} \\ &= e_t + ve_x - \frac{p}{\rho^2}(\rho_t + v\rho_x) \\ &= \left(e_t - \frac{p}{\rho^2}\rho_t\right) + v\left(e_x - \frac{p}{\rho^2}\rho_x\right) \\ &= \theta(\hat{s}_e e_t + \hat{s}_\rho \rho_t) + \theta v(\hat{s}_e e_x + \hat{s}_\rho \rho_x) \\ &= \theta(s_t + vs_x), \end{aligned}$$

por lo cual, obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} \rho_t + v\rho_x + \rho v_x &= 0, \\ v_t + vv_x + \frac{pv_x}{\rho} &= 0, \\ s_t + vs_x &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Nótese que el mapeo

$$\Theta : \begin{pmatrix} \rho \\ v \\ s \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v \\ \rho e \end{pmatrix}$$

es invertible y suave con matriz jacobiana

$$D\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ v & \rho & 0 \\ e + p/\rho & \rho v & \rho\theta \end{pmatrix},$$

de tal manera que el sistema (2.10) en forma conservativa, y los sistemas cuasilineales (2.70) y (4.16) son equivalentes para soluciones clásicas. El sistema (4.16) considera a las variables  $\rho$  y  $s$  como variables termodinámicas independientes, con ecuación de estado  $p = \check{p}(\rho, s)$ . Las condiciones (2.69) son equivalentes a

$$\check{p} > 0 \quad (4.17)$$

$$\check{p}_\rho = \hat{p}_\rho + \hat{p}_e \check{e}_\rho = \hat{p}_\rho + \frac{\hat{p}_e \hat{p}}{\rho^2} = c^2 > 0, \quad (4.18)$$

$$\check{p}_s = \hat{p}_e \check{e}_s = \theta \hat{p}_e > 0. \quad (4.19)$$

Las condiciones (2.69) (equivalentemente (4.17) - (4.19)) implican que la presión se mide en una escala positiva, que a entropía constante la presión se incrementa con la densidad, y que a densidad constante la presión aumenta si aumenta la energía interna. Adicionalmente a estas condiciones, usualmente (ver [40]) se añade la condición

$$\check{p}_{\rho\rho} > 0, \quad (4.20)$$

la cual es equivalente a la condición de convexidad de Bethe ([179], pg. 761; ver también [150], pg. 568). Notamos, en particular, que la ecuación de estado de un gas ideal satisface la condición (4.20). En efecto, para un gas ideal  $p = \hat{p}(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e$ , con  $\gamma > 1$ , por lo que

$$\check{p}(\rho, s) = (\gamma - 1)\rho \check{e}(\rho, s),$$

$$\check{p}_\rho = (\gamma - 1)(\check{e} + \rho \check{e}_\rho) = (\gamma - 1)\left(\check{e} + \frac{\check{p}}{\rho}\right),$$

y finalmente,

$$\check{p}_{\rho\rho} = (\gamma - 1)\left(\check{e}_\rho + \frac{\check{p}_\rho}{\rho} - \frac{\check{p}}{\rho^2}\right) = (\gamma - 1)\frac{\check{p}_\rho}{\rho} > 0,$$

en virtud de (4.18).

Usando el sistema cuasilineal (4.16), vamos a demostrar que bajo las condiciones (4.17) - (4.20) los  $p$ -campos característicos con  $p = 1, 3$  son genuinamente no lineales, mientras que el 2-campo característico es siempre linealmente degenerado para toda ecuación de estado. La matriz jacobiana del sistema (4.16) está dada por

$$A(\rho, v, s) = \begin{pmatrix} v & \rho & 0 \\ \frac{1}{\rho} \check{p}_\rho & v & \frac{1}{\rho} \check{p}_s \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}, \quad (4.21)$$

con valores propios

$$\lambda_1 = v - c < \lambda_2 = v < \lambda_3 = v + c.$$

Los vectores propios asociados a (4.21) son, a su vez,

$$r_1 = \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} \check{p}_s \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix}, \quad r_3 = \begin{pmatrix} \rho \\ c \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.22)$$

Calculando los jacobianos de las velocidades características obtenemos

$$D\lambda_1 = \begin{pmatrix} -c_\rho \\ 1 \\ -c_s \end{pmatrix}, D\lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, D\lambda_3 = \begin{pmatrix} c_\rho \\ 1 \\ c_s \end{pmatrix}.$$

De esta forma tenemos que, claramente,

$$D\lambda_2 \cdot r_2 = 0,$$

para todo  $(\rho, v, s)$ , es decir, el 2-campo característico es linealmente degenerado. Por otro lado, de  $\check{\rho}_\rho = c^2$  se deduce que  $c_\rho = \check{\rho}_{\rho\rho}/2c$ , por lo que

$$D\lambda_1 \cdot r_1 = -(\rho c_\rho + c) = -\left(\rho \frac{\check{\rho}_{\rho\rho}}{2c} + c\right) < 0,$$

en virtud de (4.17) - (4.20). Análogamente,

$$D\lambda_3 \cdot r_3 = \rho \frac{\check{\rho}_{\rho\rho}}{2c} + c > 0.$$

Por lo tanto los  $j$ -campos característicos, con  $j = 1, 3$ , son genuinamente no lineales si suponemos que la ecuación de estado satisface (4.17) - (4.20).

### 4.1.3. Normalizaciones

A continuación presentaremos dos normalizaciones de los campos característicos (de hecho, complementarias una de la otra) que son de gran utilidad.

**Lema 4.8.** *Sea la matriz  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  de clase  $C^m$ ,  $m \geq 1$  y estrictamente hiperbólica. Entonces,*

- (a) *Los valores propios  $\lambda_j(u)$ ,  $j = 1, \dots, n$  son de clase  $C^m$  como funciones de  $u \in \Omega$ .*  
 (b) *Es posible seleccionar los vectores propios derechos  $\{r_j(u)\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^{n \times 1}$  e izquierdos  $\{l_j(u)\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}^{1 \times n}$ , de clase  $C^m$ , tales que*

$$\begin{aligned} l_j(u)r_k(u) &= 0, & j &\neq k \\ |l_j(u)| = |r_j(u)| &= 1, & j &= 1, \dots, n, \end{aligned} \tag{4.23}$$

para toda  $u \in \Omega$ .

*Demostración.* Dado que  $A \in C^m(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$  es estrictamente hiperbólica, para cada  $u_0 \in \Omega$  se tiene que

$$\lambda_1(u_0) < \dots < \lambda_n(u_0).$$

Fijemos un índice  $1 \leq p \leq n$ . Tras una normalización adecuada, sea  $r_p(u_0)$  un vector propio derecho tal que

$$\begin{aligned} A(u_0)r_p(u_0) &= \lambda_p(u_0)r_p(u_0), \\ |r_p(u_0)| &= 1. \end{aligned}$$

Vamos a aplicar el teorema de la función implícita al mapeo de clase  $C^1$ ,  $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ , definido por

$$G(r, \lambda, u) := \begin{pmatrix} A(u)r - \lambda r \\ |r|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

El jacobiano con respecto a las variables  $(r, \lambda)$  es

$$\frac{\partial G}{\partial(r, \lambda)} = \begin{pmatrix} A(u) - \lambda I & -r \\ 2r^\top & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}.$$

Sea

$$B_0 := \frac{\partial G}{\partial(r, \lambda)} \Big|_{(r_p(u_0), \lambda_p(u_0), u_0)}.$$

Debemos verificar que  $\det B_0 \neq 0$ . Nótese que para  $1 \gg \varepsilon > 0$  suficientemente pequeño, la matriz

$$A^\varepsilon := A(u_0) - (\lambda_p(u_0) + \varepsilon)I,$$

es invertible, por hiperbolicidad estricta. En vista de que  $-\varepsilon^{-1}A^\varepsilon r_p(u_0) = r_p(u_0)$  y de que  $|r_p(u_0)| = 1$ , podemos escribir

$$\begin{pmatrix} A^\varepsilon & -r_p(u_0) \\ 2r_p(u_0)^\top & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\varepsilon^{-1}r_p(u_0) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^\varepsilon & 0 \\ 2r_p(u_0)^\top & -2\varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A^\varepsilon & -r_p(u_0) \\ 2r_p(u_0)^\top & 0 \end{pmatrix} &= -2\varepsilon^{-1} \det A^\varepsilon \\ &= -2\varepsilon^{-1} \det(A(u_0) - (\lambda_p(u_0) + \varepsilon)I) \\ &= 2 \prod_{j \neq p}^n (\lambda_j(u_0) - (\lambda_p(u_0) + \varepsilon)) \rightarrow 2 \prod_{j \neq p}^n (\lambda_j(u_0) - \lambda_p(u_0)) \neq 0, \end{aligned}$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Por hiperbolicidad estricta concluimos que  $\det B_0 \neq 0$ .

Así, por el teorema de la función implícita, existe una vecindad  $\mathcal{O}$  de  $u_0$  tal que es posible encontrar funciones  $\lambda_p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $r_p : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times 1}$ , de clase  $C^m$ , que satisfacen las conclusiones del teorema. Para verificar que  $\lambda_p$  y  $r_p$  se pueden extender a todo  $\Omega$ , se cubre  $\bar{\Omega}$  (compacto) por un número finito de vecindades abiertas  $\mathcal{O}_l$ , con  $l = 1, \dots, N$ , en donde es posible extender  $\lambda_p$  y  $r_p$  de clase  $C^m$  por el teorema de la función implícita. Este procedimiento se repite para cada  $1 \leq p \leq n$ . La condición  $l_j r_k = 0$  si  $j \neq k$  es una consecuencia directa de la hiperbolicidad estricta (Observación 2.19). La construcción de los vectores propios izquierdos es análoga.  $\square$

**Observación 4.9.** La demostración del lema 4.8 depende fuertemente de la hipótesis de hiperbolicidad estricta. Para ilustrar al lector de lo que puede ocurrir en el caso general, véase el ejercicio 4.5.

El siguiente lema contiene una posible (y útil) normalización en el caso genuinamente no lineal. La prueba es muy similar a la prueba del lema 4.8 y se deja al lector como ejercicio.

**Lema 4.10.** *Sea la matriz  $A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$  de clase  $C^m$ ,  $m \geq 1$  y estrictamente hiperbólica. Si el  $p$ -campo característico, con  $1 \leq p \leq n$ , es genuinamente no lineal, entonces es posible seleccionar los vectores propios derechos  $\{r_j(u)\}_{j=1}^n$  e izquierdos  $\{l_j(u)\}_{j=1}^n$ , de clase  $C^m$ , tales que*

$$\begin{aligned} D\lambda_p(u) \cdot r_p(u) &= 1, \\ l_p(u)r_p(u) &= 1, \end{aligned} \quad (4.24)$$

para toda  $u \in \Omega$ .

## 4.2. Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann

Sean  $u_L, u_R \in \Omega$ ,  $u_L \neq u_R$ , dos estados constantes. Motivados por la solución al problema de Riemann en el caso de una ley de conservación escalar, la cual involucra ondas de rarefacción, consideremos soluciones autosimilares del sistema (4.1) que conectan continuamente a los estados  $u_L$  y  $u_R$ . Sea  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$  fijo. Vamos a definir una clase general de soluciones denominada la clase de *ondas centradas de rarefacción*, las cuales dependen solamente de la razón  $(x - x_0)/(t - t_0)$  para  $t > t_0$ . Al punto  $(x_0, t_0)$  se le llama el centro de la onda de rarefacción. De este modo, sea  $u$  una solución a (4.1) de la forma

$$u(x, t) = v\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right), \quad (4.25)$$

para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t > t_0$  y donde  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  es de clase  $C^1$ . Denotamos

$$\xi := \frac{x - x_0}{t - t_0};$$

en el dominio de definición de  $v$  en la variable  $\xi$  se tiene que  $u$  es una solución clásica, por lo cual ésta satisface el sistema cuasilineal

$$u_t + A(u)u_x = 0.$$

Sustituyendo obtenemos

$$(A(v(\xi)) - \xi I)v'(\xi) = 0. \quad (4.26)$$

De la ecuación (4.26) concluimos que, o bien  $v'(\xi) = 0$ , o bien existe un índice  $1 \leq p \leq n$  tal que

$$\xi = \lambda_p(v(\xi)), \quad (4.27)$$

$$v'(\xi) = \alpha(\xi)r_p(v(\xi)), \quad (4.28)$$

donde  $\alpha(\xi)$  es un escalar distinto de cero para todo  $\xi$ . Supongamos que  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$  y que es posible resolver (4.27) y (4.28) en dicho intervalo. Dado que los valores propios de  $A$  son distintos, el índice  $p$  no depende de  $\xi$  y  $v'(\xi) \neq 0$ . Así, diferenciando la ecuación (4.27) con respecto a  $\xi$  obtenemos

$$1 = D\lambda_p(v(\xi)) \cdot v'(\xi) = \alpha(\xi) D\lambda_p(v(\xi)) \cdot r_p(v(\xi)). \quad (4.29)$$

Esta ecuación no tiene solución si el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado. Por lo tanto, suponiendo que el campo es genuinamente no lineal y tomando la normalización (4.24), concluimos que  $\alpha(\xi) \equiv 1$  y obtenemos el sistema

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)), \\ \xi &= \lambda_p(v(\xi)). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Nuevamente, supongamos que podemos resolver el sistema (4.30) en el intervalo  $\xi \in [\xi_0, \xi_1]$  sujeto a las condiciones

$$\xi_0 = \lambda_p(u_L), \quad \xi_1 = \lambda_p(u_R), \quad (4.31)$$

$$v(\xi_0) = u_L, \quad v(\xi_1) = u_R, \quad (4.32)$$

donde hemos supuesto que  $\lambda_p(u_L) \leq \lambda_p(u_R)$ . En este caso, la función continua autosimilar

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x - x_0 \leq \lambda_p(u_L)(t - t_0), \\ v\left(\frac{x - x_0}{t - t_0}\right), & \lambda_p(u_L)(t - t_0) \leq x - x_0 \leq \lambda_p(u_R)(t - t_0), \\ u_R, & \lambda_p(u_R)(t - t_0) \leq x - x_0, \end{cases} \quad (4.33)$$

es una solución débil de (4.1) para  $(x, t) \in \mathbb{R} \times (t_0, +\infty)$ ,  $t_0 \geq 0$ .

**Definición 4.11.** La solución autosimilar (4.33) es llamada una  $p$ -onda de rarefacción centrada en  $(x_0, t_0)$ , con  $t_0 \geq 0$ , que conecta a  $u_L$  con  $u_R$  por la derecha.

A continuación vamos a probar que es posible construir una  $p$ -onda de rarefacción localmente, si el  $p$ -campo característico es genuinamente no lineal.

### 4.2.1. Existencia local de ondas de rarefacción

El siguiente teorema es el resultado principal de esta sección.

**Teorema 4.12.** *Supongamos que el  $p$ -campo característico, con  $1 \leq p \leq n$ , es genuinamente no lineal con la normalización (4.24). Entonces, dado un estado  $u_L \in \Omega$ , existe una curva de estados  $\mathcal{R}_p(u_L)$  en  $\Omega$  que pueden ser conectados a  $u_L$  por la derecha mediante una  $p$ -onda de rarefacción, es decir, para toda  $\tilde{u} \in \mathcal{R}_p(u_L)$ ,  $\lambda_p(\tilde{u}) \geq \lambda_p(u_L)$  y existe una función  $v \in C^1([\lambda_p(u_L), \lambda_p(\tilde{u})]; \mathbb{R}^n)$  que satisface el sistema (4.30) con condiciones*

$$v(\lambda_p(u_L)) = u_L, \quad v(\lambda_p(\tilde{u})) = \tilde{u}. \quad (4.34)$$

*Mas aún, existe una parametrización de  $\mathcal{R}_p(u_L) : \varepsilon \rightarrow \Phi_p(\varepsilon)$  definida para  $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$ , con  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeño tal que*

$$\Phi_p(\varepsilon) = u_L + \varepsilon r_p(u_L) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 Dr_p(u_L) \cdot r_p(u_L) + \mathcal{O}(\varepsilon^3). \quad (4.35)$$

*Demostración.* Para todo  $\xi_0 \in \mathbb{R}$ , por el teorema de Picard existe una única solución a la ecuación

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)), & \xi > \xi_0, \\ v(\xi_0) &= u_L, \end{aligned}$$

para  $\xi \in [\xi_0, \xi_0 + \varepsilon_0]$  con  $\varepsilon_0 > 0$  suficientemente pequeño. Escogiendo  $\xi_0 := \lambda_p(u_L)$  y diferenciando con respecto a  $\xi$  obtenemos

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_p(v(\xi)) = D\lambda_p(v(\xi)) \cdot v'(\xi) = D\lambda_p(v(\xi)) \cdot r_p(v(\xi)) = 1,$$

en vista de (4.24). De este modo  $\lambda_p(v(\xi)) = \xi$  ya que  $\lambda_p(v(\xi_0)) = \lambda_p(u_L)$ . Entonces definimos el conjunto

$$\mathcal{R}_p(u_L) := \{v(\xi) : \lambda_p(u_L) \leq \xi \leq \lambda_p(u_L) + \varepsilon_0\} \subset \Omega,$$

como la curva de estados en  $\Omega$  que se pueden conectar a  $u_L$  por la derecha mediante una  $p$ -onda de rarefacción. Sea

$$\Phi_p(\varepsilon) := v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon), \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

De este modo,  $\Phi_p(0) = v(\lambda_p(u_L)) = u_L$ . Diferenciando, obtenemos

$$\Phi_p'(\varepsilon) = v'(\lambda_p(u_L) + \varepsilon) = r_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)),$$

por lo cual,

$$\Phi_p'(0) = r_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)) = r_p(u_L).$$

Calculando la segunda derivada obtenemos

$$\Phi_p''(\varepsilon) = Dr_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)) \cdot v'(\lambda_p(u_L) + \varepsilon) = Dr_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)) \cdot r_p(v(\lambda_p(u_L) + \varepsilon)),$$

de modo que  $\Phi_p''(0) = Dr_p(u_L) \cdot r_p(u_L)$ . Esto justifica la expansión (4.35).  $\square$

La curva  $\mathcal{R}_p(u_L)$  es llamada la  $p$ -curva de rarefacción (derecha). Es una curva integral del campo  $r_p$ , tangente a  $r_p(u_L)$  en el punto  $u_L$ . Para estudiar el caso en el que el campo característico no es genuinamente no lineal, es necesario introducir el concepto de invariantes de Riemann.

## 4.2.2. Invariantes de Riemann

**Definición 4.13.** Una función escalar suave (al menos de clase  $C^1$ )  $w : \mathcal{N} \subset \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , definida en una vecindad  $\mathcal{N}$  de  $\Omega$  se denomina un  $p$ -invariante de Riemann local, con  $1 \leq p \leq n$ , si satisface

$$Dw(u) \cdot r_p(u) = 0, \quad (4.36)$$

para todo  $u \in \mathcal{N}$ .

**Observación 4.14.** (a) Un  $p$ -invariante de Riemann  $w$  es constante sobre una curva  $v: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  si y sólo si

$$\frac{d}{d\xi} w(v(\xi)) = Dw(v(\xi)) \cdot v'(\xi) = 0,$$

lo cual se cumple si en particular  $v$  es una curva integral del campo  $r_p$ , es decir, si  $v'(\xi) = r_p(v(\xi))$ . Esto implica que una  $p$ -invariante de Riemann es constante a lo largo de las trayectorias del campo vectorial  $r_p$ .

(b) Si el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado, entonces la función  $w(u) = \lambda_p(u)$  es un  $p$ -invariante de Riemann global.

Una propiedad inmediata pero útil de los invariantes de Riemann es la siguiente.

**Lema 4.15.** *Sobre una  $p$ -onda de rarefacción, con  $1 \leq p \leq n$ , todo  $p$ -invariante de Riemann es constante.*

*Demostración.* La conclusión es consecuencia inmediata de la observación 4.14 (a) y el hecho de que toda curva de rarefacción es una curva integral del campo  $r_p$  por construcción (teorema 4.12).  $\square$

**Definición 4.16.** Se dice que el sistema de leyes de conservación (4.1) está dotado de un sistema completo de invariantes de Riemann (globales) en  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  si existen  $n$  funciones escalares  $w_1, \dots, w_n$  en  $\Omega$  tales que para todo par  $1 \leq i, j \leq n$ , con  $i \neq j$ ,  $w_j$  es un  $i$ -invariante de Riemann en  $\Omega$ .

Como consecuencia inmediata de esta definición tenemos el siguiente

**Corolario 4.17.** *Las funciones  $w_j: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $j = 1, \dots, n$  forman un sistema completo de invariantes de Riemann si y sólo si*

$$Dw_i(u)r_j(u) \begin{cases} = 0, & \text{si } i \neq j, \\ \neq 0, & \text{si } i = j, \end{cases} \quad (4.37)$$

es decir, si y sólo si para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $Dw_i(u)$  es un vector propio izquierdo  $l_i(u)$  de  $A(u)$  con velocidad característica  $\lambda_i(u)$ . (Equivalentemente, el hiperplano tangente a la superficie de nivel de  $w_i$  en cualquier punto  $u \in \Omega$  está generado por los vectores  $r_1(u), \dots, r_{i-1}(u), r_{i+1}(u), \dots, r_n(u)$ .)

**Observación 4.18.** Es posible demostrar (ver el ejercicio 4.7) que todo sistema de dos leyes de conservación está dotado con un sistema completo de invariantes de Riemann. Por otro lado, si  $n \geq 3$  entonces el sistema de ecuaciones (4.37) está, por lo general, sobredeterminado. Sin embargo, existen excepciones. Cuando un sistema de  $n \geq 3$  leyes de conservación tiene una base completa de invariantes de Riemann se dice que el sistema es *rico* o *semi-Hamiltoniano*.

A continuación vamos a demostrar la existencia local de  $(n-1)$  invariantes de Riemann cuyos gradientes son linealmente independientes. Primero necesitamos la siguiente

**Definición 4.19.** Una hipersuperficie de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{S} = \{u \in \mathbb{R}^n : \psi(u) = 0\}$  donde  $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es diferenciable, se denomina *p-característica* si

$$D\psi(u) \cdot r_p(u) = 0, \quad (4.38)$$

para toda  $u \in \mathcal{S}$ , es decir, si  $r_p$  es tangente a  $\mathcal{S}$ .

**Lema 4.20.** Supongamos que el hiperplano

$$\mathcal{S} = \{u \in \mathbb{R}^n : u_n = 0\}$$

no es *p-característico*. Entonces existe un cambio suave de coordenadas, invertible,  $u = \Theta(v)$ , definido en una vecindad de  $\mathcal{S}$ , tal que la condición (4.36) es equivalente a

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = 0, \quad (4.39)$$

donde  $z(v) := w(\Theta(v))$  para todo *p*-invariante de Riemann. Mas aún, las  $n-1$  funciones

$$w_j(u) := z_j(\Theta^{-1}(u)), \quad j = 1, \dots, n-1, \quad (4.40)$$

donde  $z_j := v_j$  para cada  $j$ , son *p*-invariantes de Riemann cuyos gradientes son linealmente independientes.

*Demostración.* Sea  $\{\hat{e}_j\}_{j=1}^n$  la base canónica de  $\mathbb{R}^n$ . Para toda función  $z : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = Dz(v) \cdot \hat{e}_n.$$

Supiniendo que dicho mapeo  $\Theta$  existe, definimos  $z := w(\Theta(v))$ , donde  $w : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función diferenciable, de manera que

$$\frac{\partial z}{\partial v_n} = Dz(v) \cdot \hat{e}_n = Dw(\Theta(v))D\Theta(v) \cdot \hat{e}_n = Dw(u) \frac{\partial \Theta}{\partial v_n}.$$

Por lo tanto la condición (4.36) es equivalente a (4.39) si y sólo si

$$\frac{\partial \Theta(v)}{\partial v_n} = r_p(\Theta(v)). \quad (4.41)$$

Para resolver (4.41) se prescribe la condición inicial

$$\Theta(v_*) = \Theta(v_1, \dots, v_{n-1}, 0) = (v_1, \dots, v_{n-1}, 0) =: v_*, \quad (4.42)$$

sobre cualquier  $v_* \in \mathcal{S}$ . Por el teorema de Picard, para cada  $v_* \in \mathcal{S}$  existe una única solución local a (4.41) con condición inicial (4.42), definida para  $v_n$  cerca de  $v_n = 0$ , por ejemplo, para  $v_n \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ , con  $\varepsilon > 0$  suficientemente pequeño. Por hipótesis, el hiperplano  $\mathcal{S}$  no es *p*-característico, por lo que

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v_n}(v_*) = r_p(\Theta(v_*)) = r_p(v_*) \notin \mathcal{S},$$

es decir, la componente  $n$  de  $r_p$  es distinta de cero para toda  $u \in \Omega$ . Por otra parte,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial v_j}(v_*) = \frac{\partial}{\partial v_j}(v_1, \dots, v_{n-1}, 0) = \hat{e}_j \neq 0,$$

donde  $\hat{e}_j \in \mathcal{S}$ , para cada  $j \neq n$ . De este modo, el jacobiano

$$D\Theta(v_*) = (\hat{e}_1 \ \cdots \ \hat{e}_{n-1} \ r_p(\Theta(v_*))),$$

(formado por las columnas  $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_{n-1}, r_p$ ) es no singular. Por lo tanto, el mapeo  $v \mapsto \Theta(v)$ , definido en una vecindad de  $v_n = 0$ , y por ende, para  $v$  en una vecindad de  $\mathcal{S}$ , es inyectivo, sobre y diferenciable, con matriz jacobiana  $D\Theta(v)$  invertible para  $v_n \sim 0$ . Por construcción las funciones  $z_j(v) := v_j$ ,  $j \neq n$  resuelven (4.39), por lo que las correspondientes funciones  $w_j(u) = z_j(\Theta^{-1}(u))$  son  $p$ -invariantes de Riemann. Tomando una combinación lineal de sus gradientes igual a cero, tenemos que

$$0 = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j D w_j(u) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (D\Theta^{-1}(u))^{\top} \hat{e}_j = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \tilde{c}_j(u),$$

donde  $\tilde{c}_j$  denota a la columna  $j$  de  $D\Theta^{-1}$ . Dado que  $D\Theta^{-1}$  tiene rango máximo, esto implica que  $\alpha_j = 0$ , para todo  $j = 1, \dots, n-1$  y los gradientes son linealmente independientes.  $\square$

Veamos algunos ejemplos.

**Ejemplo 4.21.** (El sistema  $p$ .) Consideremos el sistema  $p$ ,

$$\begin{aligned} v_t - u_x &= 0, \\ u_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned} \tag{4.43}$$

donde  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisface  $p'(v) < 0$ ,  $p''(v) > 0$ . Como hemos calculado en la sección 2.5.2, los valores propios de la matriz jacobiana

$$A(v, u) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ p'(v) & 0 \end{pmatrix}$$

son

$$\lambda_1 = -\sqrt{-p'(v)} < 0 < \lambda_2 = \sqrt{-p'(v)},$$

con vectores propios asociados

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}, \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{-p'(v)} \end{pmatrix}.$$

El lema 4.20 garantiza la existencia local de un 1-invariante de Riemann, y un 2-invariante de Riemann. Para encontrar, por ejemplo, el invariante de Riemann  $w_1 = w_1(v, u)$ , calculamos

$$Dw_1 \cdot r_1 = w_{1v} + \sqrt{-p'(v)} w_{1u}. \quad (4.44)$$

Esta ecuación es lineal y puede resolverse mediante el método de características. Claramente,  $w_1$  es constante a lo largo de curvas de la forma  $\{(v, \hat{u}(v)) : v \in I\}$  donde  $\hat{u}'(v) = \sqrt{-p'(v)}$  e  $I \subset \mathbb{R}$  es un intervalo. Si  $(u, v)$  es fijo, la curva característica que pasa por ese punto es

$$\hat{u}(\tilde{v}) = u - \int_{\tilde{v}}^v \sqrt{-p'(y)} dy, \quad \tilde{v} \in I.$$

Dado que  $w_1$  es constante sobre la característica tenemos que

$$\begin{aligned} w_1(v, u) &= w_1(\tilde{v}, \hat{u}(\tilde{v})) = w_1(0, \hat{u}(0)) = w_1\left(0, u - \int_0^v \sqrt{-p'(y)} dy\right) \\ &= w_1^0\left(u - \int_0^v \sqrt{-p'(y)} dy\right), \end{aligned}$$

donde hemos supuesto que  $0 \in I$  y  $w_1^0$  es cualquier condición inicial de  $w_1$ . Escogiendo  $w_1^0(u) = u$ , obtenemos

$$w_1(v, u) = u - \int_0^v \sqrt{-p'(y)} dy. \quad (4.45)$$

En efecto,  $w_1$  satisface (4.44) para toda  $v \in \mathbb{R}$  y es un 1-invariante de Riemann.

Análogamente, el 2-invariante de Riemann tiene la forma

$$w_2(v, u) = u + \int_0^v \sqrt{-p'(y)} dy. \quad (4.46)$$

Es importante señalar que los invariantes de Riemann (4.45) y (4.46) están definidos *globalmente*, es decir, están definidos para todo valor  $(v, u) \in \Omega$ , en contraste con el Lema 4.20, que garantiza existencia local únicamente. Esto es posible ya que el sistema  $p$  es un sistema de *dos* leyes de conservación ( $n = 2$ ). Invariantes globales de Riemann no existen en general si  $n > 2$ .

**Ejemplo 4.22.** (*Ecuaciones de Euler para un gas ideal.*) La ecuación de estado de un gas ideal es

$$p = \hat{p}(\rho, e) = (\gamma - 1)\rho e, \quad (4.47)$$

donde  $\gamma > 1$  y  $\rho$ ,  $p$  y  $e$  son la densidad, presión y energía interna específica del gas. Consideremos el sistema cuasilineal equivalente (4.16) en términos de las variables  $(\rho, v, s)$ , donde  $v$  y  $s$  son la velocidad y la entropía específica, respectivamente. Así, existe una función  $p = \check{p}(\rho, s)$  que satisface las condiciones (4.17) - (4.20). Probaremos que las funciones

$$\begin{aligned} w_1^{(1)}(\rho, v, s) &= s, \\ w_2^{(1)}(\rho, v, s) &= v + \frac{2}{\gamma - 1} c(\rho, s), \end{aligned}$$

son invariantes de Riemann globales asociados al campo característico  $j = 1$ . Aquí la velocidad del sonido  $c = c(\rho, s) > 0$  está definida por  $c^2 = \check{p}_\rho$ . Recordando las expresiones para los vectores propios asociados (4.22) obtenemos

$$Dw_1^{(1)} \cdot r_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} \equiv 0,$$

$$Dw_2^{(1)} \cdot r_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{\gamma-1}c\rho \\ 1 \\ \frac{2}{\gamma-1}c_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho \\ -c \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{\gamma-1}\rho c\rho - c.$$

Sin embargo, dado que  $\check{p}(\rho, s) = (\gamma - 1)\rho\check{e}(\rho, s)$  y que  $\check{e}_\rho = p/\rho^2$  (ver ejemplo 4.7), se cumple que

$$2cc\rho = \check{p}_{\rho\rho} = \frac{(\gamma-1)}{\rho}\check{p}_\rho = \frac{(\gamma-1)c^2}{\rho},$$

y por lo tanto

$$Dw_2^{(1)} \cdot r_1 = \frac{2}{\gamma-1}\rho c\rho - c \equiv 0,$$

para todo  $(\rho, s)$ . Así, tenemos dos 1-invariantes de Riemann globales.

Análogamente, es fácil probar que las funciones

$$w_1^{(3)}(\rho, v, s) = s, \quad w_2^{(3)}(\rho, v, s) = v - \frac{2}{\gamma-1}c(\rho, s),$$

son 3-invariantes de Riemann globales. Finalmente, sean

$$w_1^{(2)}(\rho, v, s) = v, \quad w_2^{(2)}(\rho, v, s) = \check{p}(\rho, s).$$

Claramente tenemos que

$$Dw_1^{(2)} \cdot r_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \check{p}_s \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$Dw_2^{(2)} \cdot r_2 = \begin{pmatrix} \check{p}_\rho \\ 0 \\ \check{p}_s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \check{p}_s \\ 0 \\ -c^2 \end{pmatrix} = \check{p}_s(\check{p}_\rho - c^2) = 0,$$

por lo que la presión y la velocidad son 2-invariantes de Riemann globales.

**Ejemplo 4.23.** (*Ecuaciones de Euler en el caso barotrópico.*) Consideremos nuevamente las ecuaciones de Euler en el caso barotrópico (2.79), en el que la presión no cambia con la energía interna. La presión está determinada por una función de la densidad,  $p = p(\rho)$  que satisface  $p'(\rho) > 0$ . Los valores propios de la matriz asociada al sistema, dada por (2.81), son

$$\lambda_1 = v - \sqrt{p'(\rho)} < \lambda_2 = v + \sqrt{p'(\rho)}.$$

Denotamos a  $c(\rho) = \sqrt{p'(\rho)} > 0$  como la velocidad del sonido, de modo que  $\lambda_1 = v - c$  y  $\lambda_2 = v + c$ . Los vectores propios asociados son

$$r_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ v - c \end{pmatrix}, \quad y \quad r_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ v + c \end{pmatrix},$$

respectivamente. Verificaremos que las funciones

$$w_1 := \int_1^\rho \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau + v, \quad y \quad w_2 := \int_1^\rho \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau - v,$$

son 1- y 2-invariantes de Riemann, respectivamente. En efecto, dado que la matriz jacobiana (2.81) se calculó con respecto a las variables conservadas  $(u_1, u_2) = (\rho, \rho v)$ , debemos escribir las funciones  $w_1$  y  $w_2$  en términos de  $u$ , es decir,

$$w_1 = \int_1^{u_1} \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau + \frac{u_2}{u_1}, \quad w_2 = \int_1^{u_1} \frac{c(\tau)}{\tau} d\tau - \frac{u_2}{u_1},$$

y calcular sus gradientes derivando con respecto a las variables conservadas. Por ejemplo,

$$Dw_1(u) = \begin{pmatrix} \frac{c(u_1)}{u_1} - \frac{u_2}{u_1^2} \\ \frac{1}{u_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{c-v}{\rho} \\ \frac{1}{\rho} \end{pmatrix},$$

de modo que

$$Dw_1 \cdot r_1 = \frac{1}{\rho}(c - v + v - c) = 0.$$

Análogamente  $Dw_2 \cdot r_2 = 0$ . Notamos nuevamente que  $w_1$  y  $w_2$  son invariantes de Riemann globales definidos para todo  $u = (\rho, \rho v)$ .

### 4.2.3. Ondas simples

A continuación vamos a definir una clase más general de ondas suaves asociadas a un campo característico  $p$ , que incluye a las ondas de rarefacción como caso particular.

**Definición 4.24.** Una función suave  $u : Q \rightarrow \mathcal{N} \subseteq \Omega$ , solución de (4.1) y definida en un dominio  $Q \subseteq \mathbb{R} \times [0, +\infty)$  es llamada una  $p$ -onda simple si la función  $h(x, t) = w(u(x, t))$ , con  $(x, t) \in Q$ , es constante para cualquier  $p$ -invariante de Riemann local  $w : \mathcal{N} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Primero probaremos el siguiente lema elemental.

**Lema 4.25.** Sea

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} &:= \partial_t + \lambda_p \partial_x, \\ \frac{du}{dp} &= u_t + \lambda_p(u) u_x, \end{aligned} \tag{4.48}$$

el operador que denota derivación en la dirección del campo característico  $\lambda_p$ . Entonces  $u$  es una solución clásica de (4.1) si y sólo si

$$l_p(u) \frac{du}{dp} = 0. \quad (4.49)$$

*Demostración.* Sabemos que  $u$  es solución clásica de (4.1) si y sólo si satisface el sistema cuasilineal

$$u_t + A(u)u_x = 0.$$

Multiplicando por la izquierda por  $l_p(u)$  obtenemos

$$0 = l_p(u)u_t + l_p(u)A(u)u_x = l_p(u)(u_t + \lambda_p(u)u_x) = l_p(u) \frac{du}{dp}.$$

□

**Proposición 4.26.** *Sea  $u : Q \rightarrow \Omega$  una  $p$ -onda simple definida en una región  $Q \subseteq \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Entonces las características del campo  $p$ , es decir, las curvas de la forma  $\{(\hat{x}(t), t)\} \subset Q$  que satisfacen*

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t), t)), \quad (4.50)$$

son líneas rectas a lo largo de las cuales  $u$  es constante.

*Demostración.* Por el lema 4.25 tenemos que

$$l_p \frac{du}{dp} = 0. \quad (4.51)$$

Si  $w_1, \dots, w_{n-1}$  son  $p$ -invariantes de Riemann entonces las funciones  $\tilde{w}_j(x, t) := w_j(u(x, t))$ , con  $j = 1, \dots, n-1$ , son constantes en la región  $Q$ . Así,

$$0 = \frac{d\tilde{w}_j}{dp} = Dw_j \cdot \frac{du}{dp}, \quad j = 1, \dots, n-1. \quad (4.52)$$

Por el lema 4.20, existen localmente  $n-1$   $p$ -invariantes de Riemann que satisfacen las ecuaciones (4.52). Éstas últimas, junto con la condición (4.51), se pueden escribir de manera simplificada como

$$M(u) \frac{du}{dp} = 0, \quad (4.53)$$

donde  $M(u)$  es una matriz de dimensiones  $n \times n$  definida por

$$M(u) := \begin{pmatrix} l_p(u) \\ Dw_1^\top(u) \\ \vdots \\ Dw_{n-1}^\top(u) \end{pmatrix}.$$

Al tomar una combinación lineal de los renglones de  $M(u)$  de la forma

$$\alpha l_p + \sum_j^{n-1} \alpha_j Dw_j^\top = 0,$$

obtenemos, tras tomar el producto con  $r_p$  y por la definición de invariante de Riemann (4.36), que  $\alpha l_p r_p = 0$ . Dado que  $l_p r_p \neq 0$ , esto implica que  $\alpha = 0$  y, en virtud de que los gradientes  $Dw_j$ , con  $j = 1, \dots, n-1$ , son linealmente independientes, que  $\alpha_j = 0$  para toda  $1 \leq j \leq n-1$ . Es decir, la matriz  $M(u)$  es no singular. Esto implica que la única solución al sistema (4.53) es tal que  $du/dp = 0$ . Por ende,  $u$  es constante en la dirección del campo característico  $p$ , es decir,

$$\frac{du}{dp} = u_t + \lambda_p(u)u_x = 0.$$

Consecuentemente, sobre las curvas características de la forma  $\{(\hat{x}(t), t)\}$  que resuelven

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t), t)),$$

la onda simple  $u$  es constante, y la pendiente  $\lambda_p(u)$  es constante, por lo que las curvas características son líneas rectas.  $\square$

**Proposición 4.27.** *Sea  $u$  una  $p$ -onda simple. Entonces el conjunto de valores de  $u$  está restringido a una sola curva integral de  $r_p$  en  $\mathbb{R}^n$ .*

*Demostración.* Sea  $u$  una onda simple definida en un dominio  $Q \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Vamos a demostrar que es posible encontrar un  $p$ -invariante de Riemann cuyos valores constantes en dos curvas integrales de  $r_p$  son distintos. Sean  $\mathcal{I}_1$  y  $\mathcal{I}_2$  dos curvas integrales de  $r_p$  en una vecindad de un estado  $u_* \in \Omega$ , de modo que  $u_1 \in \mathcal{I}_1$ ,  $u_2 \in \mathcal{I}_2$ , y  $u_1, u_2$  pertenecen a una vecindad  $\mathcal{N}(u_*)$  de  $u_*$ . Sea  $\mathcal{C}$  una curva de estados en  $\mathcal{N}(u_*)$ , con representación

$$\mathcal{C} = \{\hat{u}(\xi) \in \mathcal{N}(u_*) : \xi \in I \subseteq \mathbb{R}\},$$

que no sea tangente a  $r_p$  en ningún punto (ver figura 4.2). Por el Lema 4.20, sean  $w_j$ , con  $j = 1, \dots, n-1$  los  $p$ -invariantes de Riemann locales cuyos gradientes son linealmente independientes. De este modo, para cada estado  $u \in \mathcal{N}(u_*)$  se tiene que

$$\text{span}\{Dw_1(u), \dots, Dw_{n-1}(u)\} = \{r_p(u)\}^\perp.$$

En virtud de que  $\mathcal{C}$  no es tangente a  $r_p$  en ningún punto, entonces la proyección de  $\hat{u}'$  en  $\{r_p(u)\}^\perp$  es siempre distinta de cero, es decir,

$$\hat{u}'(\xi) \cdot \left( \sum_{j \neq p} \alpha_j Dw_j(\hat{u}(\xi)) \right) \neq 0, \quad \text{para todo } \xi \in I.$$

Sea  $w(u) := \sum_{j \neq p} \alpha_j w_j(u)$ , el cual es también un  $p$ -invariante de Riemann ya que  $Dw(u) \cdot r_p(u) = \sum_{j \neq p} \alpha_j Dw_j(u) \cdot r_p(u) = 0$ , para toda  $u \in \mathcal{N}(u_*)$ . De este modo,

$$\frac{d}{d\xi} w(\hat{u}(\xi)) = \hat{u}'(\xi) \cdot \left( \sum_{j \neq p} \alpha_j Dw_j(\hat{u}(\xi)) \right) \neq 0,$$

y no cambia de signo. Es decir, la función  $w(\hat{u}(\xi))$  es estrictamente monótona en  $\xi \in I$ . Esto implica que  $w(\hat{u}(\xi))$  toma distintos valores a lo largo de  $\mathcal{C}$ . Por lo tanto,  $w$  toma distintos valores en distintas curvas integrales de  $r_p$ . Finalmente, si suponemos que  $u$  es una  $p$ -onda

simple y  $w(u)$  es constante en  $Q$ , entonces  $u$  toma valores en sólo una curva integral de  $r_p$ .  $\square$

Usaremos la proposición 4.27 para dar una caracterización de las  $p$ -ondas simples. Éste es el contenido del siguiente

**Lema 4.28.**  *$u$  es una  $p$ -onda simple definida en una región  $Q \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty)$  si y sólo si*

$$u = v(\varphi(x, t)), \quad (4.54)$$

donde  $v \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^n)$  es una curva integral de  $r_p$ , es decir, es solución de

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)), \\ v(\xi_0) &= v_0, \end{aligned} \quad (4.55)$$

con  $\xi, \xi_0 \in I \subseteq \mathbb{R}$ , y la función escalar  $\varphi \in C^1(Q; I)$  satisface

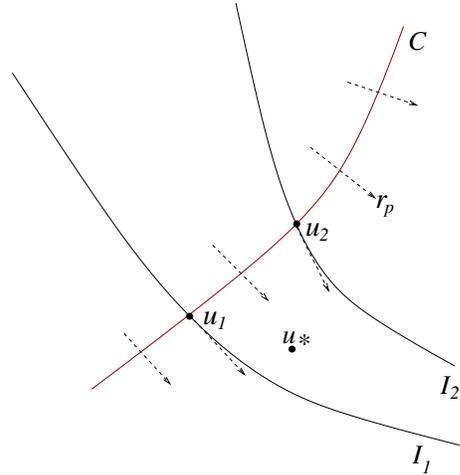
$$\frac{d\varphi}{dt} = \varphi_t + \lambda_p(v(\varphi))\varphi_x = 0. \quad (4.56)$$

*Demostración.* Para demostrar que la condición es necesaria, supongamos que  $u$  es una  $p$ -onda simple en  $Q \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty)$ . Por la Proposición 4.27, los valores de  $u$  están restringidos a una sola curva integral de  $r_p$ , por lo que existe (al menos, localmente) una solución  $v$  de (4.55) tal que  $u$  tiene la forma (4.54). Dado que  $u$  es una solución clásica de (4.1) tenemos que

$$0 = u_t + f(u)_x = u_t + A(u)u_x = \varphi_t v'(\varphi) + \varphi_x A(v(\varphi))v'(\varphi) = (\varphi_t + \lambda_p(v(\varphi))\varphi_x) r_p(v(\varphi)).$$

Tomando el producto punto con  $l_p(v(\varphi))$  obtenemos (4.56). Dado que  $u$  es una  $p$ -onda simple, la Proposición 4.26 implica que  $u$  es constante a lo largo de líneas rectas (características)

**Figura 4.2** Curva  $\mathcal{C}$  de estados en una vecindad de  $u_*$  que no es tangente al campo  $r_p$  en ningún punto. La curva  $\mathcal{C}$  corta a dos curvas integrales  $\mathcal{I}_1$  y  $\mathcal{I}_2$  del campo  $r_p$  en los estados  $u_1$  y  $u_2$ , respectivamente.



que satisfacen la ecuación

$$\frac{d\hat{x}}{dt} = \lambda_p(u(\hat{x}(t), t)) = \lambda_p(v(\varphi)),$$

donde  $\lambda_p = \lambda_p(v(\varphi))$  es la velocidad constante de la onda. Resolviendo (4.56) por el método de características obtenemos

$$\varphi(x, t) = \varphi_0(x - \lambda_p t), \quad (4.57)$$

donde  $\varphi_0$  es una función dada (condición “inicial”), siempre y cuando  $\varphi$  sea suave en  $Q$ .

Para verificar que la condición es suficiente, supongamos que  $v \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  y  $\varphi \in C^1(Q; \mathbb{R})$  resuelven (4.55) y (4.56) para cierto intervalo  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Definimos  $u \in C^1(Q; \mathbb{R}^n)$  mediante la ecuación (4.54). Calculando,

$$u_t + f(u)_x = u_t + A(u)u_x = (\varphi_t + \lambda_p(v(\varphi))\varphi_x)r_p(v(\varphi)) = 0,$$

dado que  $\varphi$  satisface (4.56). Así,  $u$  es solución clásica de (4.1) en  $Q$ . Finalmente, sea  $w$  un  $p$ -invariante de Riemann local. Entonces la función  $\tilde{w}(x, t) := w(v(\varphi(x, t)))$  tiene como gradiente

$$D_{(x,t)}\tilde{w} = \begin{pmatrix} Dw(v(\varphi)) \cdot v'(\varphi)\varphi_t \\ Dw(v(\varphi)) \cdot v'(\varphi)\varphi_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Dw(v(\varphi)) \cdot r_p(v(\varphi))\varphi_t \\ Dw(v(\varphi)) \cdot r_p(v(\varphi))\varphi_x \end{pmatrix} = 0,$$

ya que  $w$  es un  $p$ -invariante de Riemann. De esta forma,  $\tilde{w}$  es constante. Esto prueba que  $u$  es una  $p$ -onda simple.  $\square$

**Observación 4.29.** La fórmula (4.57) es la expresión general para una  $p$ -onda simple,

$$u(x, t) = v(\varphi_0(x - \lambda_p(v(\varphi))t)), \quad (4.58)$$

donde  $v$  es una solución de (4.55). De hecho, en algunos textos (ver, por ejemplo, el libro de Evans [56]) ésta es la definición de onda simple. La idea central es interpretar a la ecuación (4.56) como una ley de conservación escalar, una vez que se ha resuelto el sistema (4.55).

**Ejemplo 4.30.** (*Ondas simples para campos genuinamente no lineales.*) Si el campo es genuinamente no lineal podemos considerar la normalización (4.24), de modo que

$$\frac{d}{d\xi} \lambda_p(v(\xi)) = D\lambda_p(v(\xi)) \cdot v'(\xi) = D\lambda_p(v(\xi)) \cdot r_p(v(\xi)) = 1,$$

es decir,  $\lambda_p(v(\varphi(x, t))) = \varphi(x, t)$  (tras añadir una constante apropiada). Así, la ecuación (4.56) es, en este caso, la ecuación de Burgers

$$\varphi_t + \varphi\varphi_x = 0.$$

Una solución clásica conocida es  $\varphi = x/t$  en su dominio de definición, contenido en  $t > 0$ , la cual corresponde a una  $p$ -onda de rarefacción centrada en  $(x_0, t_0) = (0, 0)$  de la forma (4.33). Las ondas de rarefacción son ejemplos de ondas simples de la forma (4.54) donde  $\varphi(x, t) = (x - x_0)/(t - t_0)$ .

Sin embargo, existen ondas simples que no son ondas de rarefacción. En el ejemplo 3.27, la solución a la ecuación de Burgers en el dominio  $t \leq x < 1$  y  $0 \leq t < 1$  toma la forma

$$\varphi(x, t) = \frac{x-1}{t-1},$$

que si bien es autosimilar, en este caso la velocidad característica  $\lambda(\varphi(x, t)) = \varphi(x, t)$  decrece de derecha a izquierda, ya que  $\varphi_L = 1 > 0 = \varphi_R$  (ver figura 3.9). A este tipo de ondas simples se les llama *ondas de compresión*.

**Ejemplo 4.31.** (*Ondas simples para campos linealmente degenerados.*) Si el campo  $p$  es linealmente degenerado, entonces no es posible hallar  $p$ -ondas simples centradas en  $(x_0, t_0)$  ya que no hay solución al sistema (4.27) - (4.28) (la ecuación (4.29) implica, en ese caso, una contradicción). Sin embargo, sabemos que  $w(u) = \lambda_p(u)$  es un  $p$ -invariante de Riemann global (es decir, en todo  $\Omega$ ) y por lo tanto  $\lambda_p$  es constante sobre cualquier  $p$ -onda simple; a esta velocidad constante la denotamos como  $\bar{\lambda}_p = \lambda_p(u(x, t)) = \lambda_p(v(\varphi(x, t)))$ , donde  $v$  resuelve (4.55) y la  $p$ -onda simple  $u$  toma la forma

$$u(x, t) = v(\varphi_0(x - \bar{\lambda}_p t)). \quad (4.59)$$

Por ende, las curvas características son líneas rectas paralelas de la forma  $x - \bar{\lambda}_p t = \text{constante}$ .

Concluimos que en el caso de un campo linealmente degenerado, dos estados distintos  $u_L \neq u_R$  no pueden ser conectados mediante una  $p$ -onda simple continua.

En la siguiente sección estudiaremos ondas discontinuas.

### 4.3. Ondas de choque y discontinuidades de contacto

Vamos a construir soluciones discontinuas, constantes por pedazos, de (4.1), que conectan a dos estados  $u_L \neq u_R$  de  $\Omega$ . Recordemos que si una discontinuidad de una solución débil  $u$  de (4.1) está parametrizada por una curva

$$\Sigma = \{(x, t) \in \mathbb{R} \times I : x = \hat{x}(t), \hat{x} \in C^1(I), I \subset [0, +\infty)\},$$

entonces se deben satisfacer las condiciones de Rankine-Hugoniot

$$\frac{d\hat{x}}{dt}[u] = [f(u)],$$

a lo largo de  $\Sigma$ . El número real  $d\hat{x}/dt =: s$  es la *velocidad de la discontinuidad* y una función de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < st, \\ u_R, & x > st, \end{cases} \quad (4.60)$$

solución débil de (4.1), es conocida como una *onda discontinua*. Nuestro objetivo es determinar, dado un estado constante  $u_L \in \mathbb{R}$ , cuáles son los posibles estados  $u_R$  que pueden ser conectados con  $u_L$  mediante una onda de tipo (4.60).

### 4.3.1. El conjunto de Hugoniot

**Definición 4.32.** Dado un estado constante  $u_0 \in \Omega$ , el *conjunto de Hugoniot* de  $u_0$  es el conjunto de estados  $u \in \Omega$  tales que existe  $\sigma(u_0, u) \in \mathbb{R}$  que satisface

$$\sigma(u_0, u)(u - u_0) = f(u) - f(u_0). \quad (4.61)$$

Denotaremos al conjunto de Hugoniot de  $u_0$  como  $\mathcal{H}(u_0) \subseteq \Omega$ .

Por lo tanto, nos interesa probar que el conjunto de Hugoniot es no vacío y determinar su estructura. Ése es el contenido del siguiente

**Teorema 4.33.** *Sea  $u_0 \in \Omega$ , fijo. Supongamos que el  $p$ -campo característico, con  $1 \leq p \leq n$ , tiene velocidad característica  $\lambda_p(u)$  simple, con multiplicidad algebraica igual a uno como valor propio de  $A(u) = Df(u)$ , para todo  $u$  en una vecindad de  $u_0$ ,  $u \in \mathcal{N}(u_0)$ . Entonces existe una curva de clase  $C^2$ ,  $\mathcal{S}_p(u_0) : \varepsilon \rightarrow \Psi_p(\varepsilon)$ , definida para  $-\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , con  $0 < \varepsilon_1 \ll 1$  suficientemente pequeño, tal que*

$$\mathcal{S}_p(u_0) = \{\Psi_p(\varepsilon) \in \Omega : \varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)\} \subset \mathcal{H}(u_0).$$

Mas aún, podemos escoger la parametrización de la curva  $\mathcal{S}_p(u_0)$  de forma tal que

$$\Psi_p(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon r_p(u_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} D r_p(u_0) r_p(u_0) + O(\varepsilon^3), \quad (4.62)$$

$$\sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0) + \frac{\varepsilon}{2} D \lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0) + O(\varepsilon^2). \quad (4.63)$$

*Demostración.* Dado que  $f$  es suave, con  $Df = A$ , escribimos

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_0) &= \int_0^1 \frac{d}{ds} (f(u_0 + s(u - u_0))) ds \\ &= \int_0^1 A(u_0 + s(u - u_0))(u - u_0) ds \\ &= \left( \int_0^1 A(u_0 + s(u - u_0)) ds \right) (u - u_0). \end{aligned}$$

De este modo, para cada  $u, v \in \Omega$ ,  $s \in (0, 1)$ , tal que  $u + s(v - u) \in \Omega$ , definimos

$$A(u, v) := \int_0^1 A(u + s(v - u)) ds.$$

Claramente  $A(u, u) = A(u)$  para todo  $u \in \Omega$ , por lo que las condiciones de Rankine-Hugoniot se pueden expresar como un problema de valores propios,

$$A(u_0, u)(u - u_0) = \sigma(u_0, u)(u - u_0).$$

Esto implica que  $u - u_0$  debe ser un vector propio de  $A(u_0, u)$ , teniendo como valor propio la velocidad  $\sigma(u_0, u)$  de la conexión. En virtud de que  $A(u_0) = A(u_0, u_0)$  tiene un valor propio simple  $\lambda_p(u_0)$ , y bases completas de vectores propios izquierdos y derechos,  $\{l_j(u_0)\}_{j=1}^n$  y  $\{r_j(u_0)\}_{j=1}^n$  respectivamente, tales que  $l_j(u_0)r_p(u_0) = 0$  si  $j \neq p$ , y dado que  $A(u)$  es hiperbólica con valor propio simple  $\lambda_p(u)$ , por continuidad del mapeo  $u \mapsto A(u_0, u) \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^{n \times n})$ , existe una vecindad  $\mathcal{N}'(u_0)$  de  $u_0$  (posiblemente más pequeña que  $\mathcal{N}(u_0)$ ), tal que la matriz  $A(u_0, u)$  es hiperbólica, con bases completas de vectores propios  $\{l_j(u_0, u)\}_{j=1}^n$  y  $\{r_j(u_0, u)\}_{j=1}^n$ , asociadas a valores propios reales

$$\lambda_1(u_0, u) \leq \cdots \leq \lambda_{p-1}(u_0, u) < \lambda_p(u_0, u) < \lambda_{p+1}(u_0, u) \leq \cdots \leq \lambda_n(u_0, u),$$

y donde  $\lambda_p(u_0, u)$  es un valor propio simple de  $A(u_0, u)$  para todo  $u \in \mathcal{N}'(u_0)$ . Además, estas bases satisfacen

$$l_j(u_0, u)r_p(u_0, u) = 0, \quad \text{si } j \neq p.$$

De esta forma, un estado  $u \in \mathcal{H}(u_0) \cap \mathcal{N}'(u_0)$ , con velocidad de conexión  $\sigma(u_0, u)$  cercana a  $\lambda_p(u_0)$  debe satisfacer

$$\begin{aligned} u - u_0 &= \theta r_p(u_0, u), \\ \sigma(u_0, u) &= \lambda_p(u_0, u), \end{aligned}$$

para cierto  $\theta \in \mathbb{R}$ . Sea entonces la función

$$G_p(u, \theta) = u - u_0 - \theta r_p(u_0, u),$$

definida en  $\mathcal{N}'(u_0) \times \mathbb{R}$ . Notamos que  $G_p(u_0, 0) = 0$ , y que  $D_u G_p(u_0, 0) = I$ . Tras una aplicación directa del teorema de la función implícita concluimos que existe una vecindad de  $\theta = 0$ , digamos  $\mathcal{N}_\theta = (-\theta_0, \theta_0)$  con  $0 < \theta_0 \ll 1$ , una vecindad  $\tilde{\mathcal{N}}_u(u_0)$  de  $u_0$  contenida en  $\mathcal{N}'(u_0)$ , y  $n$  funciones de clase  $C^2$ ,

$$u(\theta) := (u_1(\theta), \dots, u_n(\theta))^T : \mathcal{N}_\theta \rightarrow \tilde{\mathcal{N}}_u(u_0),$$

tales que  $u(0) = u_0$  y

$$G_p(u, \theta) = 0 \text{ para } \theta \sim 0 \text{ si y sólo si } u = u(\theta).$$

A esta curva la denotamos mediante

$$\mathcal{S}_p(u_0) = \{u(\theta) \in \Omega : \theta \in (-\theta_0, \theta_0)\} \subset \tilde{\mathcal{N}}_u(u_0).$$

Dado que  $G_p(u(\theta), \theta) = 0$  para  $\theta \sim 0$ , tenemos la relación de colinealidad

$$u(\theta) - u_0 = \theta r_p(u_0, u(\theta)),$$

por lo cual  $u(\theta) - u_0$  es ortogonal a cada vector  $l_j(u_0, u(\theta))$  con  $j \neq p$ . Esto implica que

$$\begin{aligned} f(u(\theta)) - f(u_0) &= A(u_0, u(\theta))(u(\theta) - u_0) \\ &= \lambda_p(u_0, u(\theta))(u(\theta) - u_0) \\ &= \sigma(u_0, u(\theta))(u(\theta) - u_0) = \sigma(\theta)(u(\theta) - u_0), \end{aligned} \quad (4.64)$$

donde hemos definido  $\sigma(\theta) := \sigma(u_0, u(\theta)) := \lambda_p(u_0, u(\theta))$ . Por lo tanto, la curva  $\mathcal{S}_p(u_0)$  está contenida en  $\mathcal{H}(u_0)$ .

De esta manera, hemos demostrado la existencia de una curva local  $S_p(u_0)$  contenida en el conjunto de Hugoniot  $\mathcal{H}(u_0)$ . Sólo resta verificar que es posible reparametrizarla de modo que las expansiones (4.62) y (4.63) son válidas. Denotando  $\dot{\cdot} = d/d\theta$  y diferenciando la ecuación (4.64) obtenemos

$$A(u(\theta))\dot{u}(\theta) = \dot{\sigma}(\theta)(u(\theta) - u_0) + \sigma(\theta)\dot{u}(\theta), \quad (4.65)$$

que implica  $A(u_0)\dot{u}(0) = \sigma(0)\dot{u}(0)$ . Asimismo,  $u(\theta) - u_0$  es ortogonal a cada  $l_j(u_0, u(\theta))$  con  $j \neq p$  para  $\theta \sim 0$ , por lo que

$$\left( \frac{u(\theta) - u_0}{\theta} \right) \cdot l_j(u_0, u(\theta)) = 0, \quad j \neq p, \theta \neq 0.$$

Tomando el límite cuando  $\theta \rightarrow 0$  obtenemos  $\dot{u}(0) \cdot l_j(u_0) = 0$  para todo  $j \neq p$ . Por lo tanto,  $\dot{u}(0) = \alpha r_p(u_0)$ , y  $\sigma(0) = \lambda_p(u_0)$ , para cierto  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ . Sin pérdida de generalidad, es posible reparametrizar la familia de estados de modo que  $\alpha = 1$ . Sea  $\dot{A}(u(\theta)) := D^2 f(u(\theta))\dot{u}(\theta)$ ; diferenciando la ecuación (4.65) se obtiene

$$\dot{A}(u(\theta))\dot{u}(\theta) + A(u(\theta))\ddot{u}(\theta) = \ddot{\sigma}(\theta)(u(\theta) - u_0) + 2\dot{\sigma}(\theta)\dot{u}(\theta) + \sigma(\theta)\ddot{u}(\theta).$$

Evaluando en  $\theta = 0$ ,

$$\dot{A}(u_0)r_p(u_0) + A(u_0)\ddot{u}(0) = 2\dot{\sigma}(0)r_p(u_0) + \lambda_p(u_0)\ddot{u}(0).$$

Ahora, en vista de que  $\lambda_p(u(\theta))r_p(u(\theta)) = A(u(\theta))r_p(u(\theta))$ , derivamos con respecto a  $\theta$  y evaluamos en  $\theta = 0$  para obtener

$$\dot{\lambda}_p(u_0)r_p(u_0) + \lambda_p(u_0)\dot{r}_p(u_0) = \dot{A}(u_0)r_p(u_0) + A(u_0)\dot{r}_p(u_0),$$

donde nuevamente  $\dot{\lambda}_p(u(\theta)) := (d/d\theta)\lambda_p(u(\theta))$  y  $\dot{r}_p(u(\theta)) := (d/d\theta)r_p(u(\theta))$ . Restando ambas ecuaciones tenemos

$$A(u_0)(\ddot{u}(0) - \dot{r}_p(u_0)) = \lambda_p(u_0)(\ddot{u}(0) - \dot{r}_p(u_0)) + (2\dot{\sigma}(0) - \dot{\lambda}_p(u_0))r_p(u_0). \quad (4.66)$$

Multiplicando por la izquierda por  $l_p(u_0)$  se llega a que  $\dot{\sigma}(0) = \frac{1}{2}\dot{\lambda}_p(u_0)$ , es decir,

$$\dot{\sigma}(0) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\theta} (\lambda_p(u(\theta)))|_{\theta=0} = \frac{1}{2} D\lambda_p(u_0) \cdot \dot{u}(0) = \frac{1}{2} D\lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0).$$

(Nótese que  $\dot{\sigma}(0) \neq 0$  si el  $p$ -campo es genuinamente no lineal.) Sustituyendo en (4.66) concluimos que

$$(A(u_0) - \lambda_p(u_0)I)(\ddot{u}(0) - \dot{r}_p(u_0)) = 0,$$

y que, por lo tanto, existe un número real  $\beta$  tal que

$$\ddot{u}(0) - \dot{r}_p(u_0) = \ddot{u}(0) - Dr_p(u_0)\dot{u}(0) = \beta r_p(u_0). \quad (4.67)$$

Cambiamos la parametrización mediante

$$\theta(\varepsilon) =: \varepsilon - \frac{1}{2}\beta\varepsilon^2.$$

Denotando  $' = d/d\varepsilon$ , claramente se tiene  $\theta'(\varepsilon) = 1 - \beta\varepsilon$ ,  $\theta''(\varepsilon) = -\beta$ ,  $\theta(0) = 0$ ,  $\theta'(0) = 1$  y  $\theta''(0) = -\beta$ . Con esta nueva parametrización, la familia de estados satisface

$$\begin{aligned} u(\varepsilon) &:= u(\theta(\varepsilon)), \\ u'(\varepsilon) &= (1 - \beta\varepsilon)\dot{u}(\theta(\varepsilon)), \\ u''(\varepsilon) &= -\beta\dot{u}(\theta(\varepsilon)) + (1 - \beta\varepsilon)^2\ddot{u}(\theta(\varepsilon)), \end{aligned}$$

con  $u'(0) = \dot{u}(0) = r_p(u_0)$  y  $u''(0) = -\beta\dot{u}(0) + \ddot{u}(0)$ . La condición (4.67), por lo tanto, se reduce a

$$u''(0) + \beta u'(0) - Dr_p(u_0)u'(0) = \beta u'(0),$$

es decir,  $u''(0) = Dr_p(u_0)u'(0)$  y la expansión en series de Taylor es simplemente

$$u(\varepsilon) = u_0 + \varepsilon r_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 Dr_p(u_0)r_p(u_0) + O(\varepsilon^3).$$

De la misma forma,  $\sigma(\varepsilon) := \sigma(\theta(\varepsilon))$  satisface  $\sigma'(0) = \dot{\sigma}(0) = \frac{1}{2}D\lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0)$ , por lo que

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(u_0, u(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon D\lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0) + O(\varepsilon^2).$$

Denotamos  $\Psi_p(\varepsilon) := u(\varepsilon)$ . Esto justifica las expansiones (4.62) y (4.63) y concluimos la demostración del teorema.  $\square$

Si el sistema es estrictamente hiperbólico, entonces tenemos el siguiente

**Corolario 4.34.** *Si el sistema es estrictamente hiperbólico en  $\Omega$  entonces el conjunto de Hugoniot  $\mathcal{H}(u_0)$ , para cada  $u_0 \in \Omega$  está constituido localmente por  $n$  curvas suaves  $\mathcal{S}_p(u_0) \subset \Omega$ ,  $p = 1, \dots, n$ , que admiten una parametrización de la forma  $\mathcal{S}_p(u_0) : \varepsilon \rightarrow \Psi_p(\varepsilon)$ , definida para  $-\varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_1$ , con  $0 < \varepsilon_1 \ll 1$  uniforme y suficientemente pequeño, que satisfacen las expansiones (4.62) y (4.63) para cada  $1 \leq p \leq n$ .*

**Observación 4.35.** Para un estado  $u_0 \in \Omega$ , el conjunto

$$\mathcal{S}_p(u_0) = \{\Psi_p(\varepsilon) : |\varepsilon| \leq \varepsilon_1\},$$

es el conjunto de Hugoniot local asociado al  $p$ -campo característico, y contiene a todos los estados  $u$  vecinos a  $u_0$  que se pueden conectar con éste mediante una onda discontinua, cuya velocidad  $\sigma(u_0, u) \sim \lambda_p(u_0)$  es muy parecida a la velocidad característica en el estado  $u_0$

(como puede apreciarse de la expansión (4.63)). Asimismo, la serie (4.62) nos indica no sólo la vecindad de  $u = \Psi_p(\varepsilon)$  con  $u_0$  sino que, a primer orden, la diferencia  $u - u_0$  es colineal a la dirección característica asociada  $r_p(u_0)$ .

Una vez establecida la estructura local del conjunto de Hugoniot vamos a distinguir entre dos posibles tipos de ondas discontinuas dependiendo de la convexidad del modo característico.

### 4.3.2. Curvas de choque

Sea  $u_0 \in \Omega$  fijo. Si el  $p$ -campo característico es genuinamente no lineal (o convexo), entonces podemos usar la normalización (4.24) de forma que  $D\lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0) = 1$  y la velocidad de conexión para los elementos de  $\mathcal{S}_p(u_0)$  es

$$\sigma(\varepsilon) = \sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0) + \frac{1}{2}\varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Por otro lado, la velocidad característica en el estado  $\Psi_p(\varepsilon)$  (para  $\varepsilon \sim 0$ ), gracias a la expansión (4.62), se puede escribir como

$$\begin{aligned} \lambda_p(\Psi_p(\varepsilon)) &= \lambda_p(\Psi_p(0)) + \varepsilon D\lambda_p(\Psi_p(0)) \cdot ((d/d\varepsilon)\Psi_p(\varepsilon))_{\varepsilon=0} + O(\varepsilon^2) \\ &= \lambda_p(u_0) + \varepsilon D\lambda_p(u_0) \cdot r_p(u_0) + O(\varepsilon^2) \\ &= \lambda_p(u_0) + \varepsilon + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon = \lambda_p(\Psi_p(\varepsilon)) - \lambda_p(u_0) + O(\varepsilon^2),$$

y la velocidad de conexión es

$$\sigma(\varepsilon) = \frac{1}{2}(\lambda_p(\Psi_p(\varepsilon)) + \lambda_p(u_0)) + O(\varepsilon^2).$$

Si el  $p$ -campo es genuinamente no lineal entonces la curva local  $\mathcal{S}_p(u_0)$  se denomina una *curva de  $p$ -ondas de choque*.

### 4.3.3. Discontinuidades de contacto

En el caso en el que el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado, tenemos que  $D\lambda_p(u) \cdot r_p(u) = 0$  para toda  $u \in \Omega$ . Consideremos entonces la curva integral del campo  $r_p$  que pasa por  $u_0$ , es decir, las soluciones  $v$  al sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} v'(\xi) &= r_p(v(\xi)), \\ v(0) &= u_0. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{d\xi} (f(v(\xi)) - f(u_0) - \lambda_p(v(\xi))(v(\xi) - u_0)) \\
&= (A(v(\xi)) - \lambda_p(v(\xi)))v'(\xi) - (D\lambda_p(v(\xi)) \cdot v'(\xi))(v(\xi) - u_0) \\
&= (A(v(\xi)) - \lambda_p(v(\xi)))r_p(v(\xi)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

lo cual implica que  $f(v(\xi)) - f(u_0) - \lambda_p(v(\xi))(v(\xi) - u_0) = C$ , es una constante. Evaluando en  $\xi = 0$  obtenemos  $C = 0$ , y por ende,

$$f(v(\xi)) - f(u_0) = \lambda_p(v(\xi))(v(\xi) - u_0).$$

De este modo  $\mathcal{S}_p(u_0)$  coincide con  $v(\xi)$  y además la velocidad de conexión es

$$\sigma(u_0, v(\xi)) = \lambda_p(v(\xi)).$$

Finalmente, dado que  $\lambda_p(v(\xi))$  es un  $p$ -invariante de Riemann local (observación 4.14 (b)), dicha velocidad es constante,

$$\lambda_p(v(\xi)) = \sigma(u_0, v(\xi)) \equiv \lambda_p(u_0).$$

De hecho, todo  $p$ -invariante de Riemann es constante a lo largo de la curva de Hugoniot. De este modo hemos probado el siguiente

**Lema 4.36.** *Si el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado entonces el conjunto (local) de Hugoniot  $\mathcal{S}_p(u_0)$  es la curva integral del campo  $r_p$  y, además,*

$$\sigma(u_0, \Psi_p(\varepsilon)) = \lambda(\Psi_p(\varepsilon)) = \lambda_p(u_0), \quad (4.68)$$

para todo  $\varepsilon \sim 0$ . También se tiene que para cualquier  $p$ -invariante local de Riemann  $w$ ,

$$w(\Psi_p(\varepsilon)) = w(u_0), \quad \varepsilon \sim 0.$$

En el caso en el que el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado, y  $u_R \in \mathcal{S}_p(u_L)$  ó  $u_L \in \mathcal{S}_p(u_R)$ , la solución débil de (4.1) de la forma

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & x < \bar{\lambda}_p t, \\ u_R, & x > \bar{\lambda}_p t, \end{cases} \quad (4.69)$$

donde  $\bar{\lambda}_p := \lambda_p(u_L) = \lambda_p(u_R)$ , se denomina una *discontinuidad de contacto*. Nótese que (4.69) es una onda discontinua pero con la misma velocidad característica de ambos lados de la discontinuidad.

### 4.3.4. Ejemplos

## 4.4. Condiciones de entropía

### 4.4.1. La condición de entropía de Lax y el teorema de representación

**Definición 4.37 (Condiciones de entropía de Lax).** Se dice que una discontinuidad satisface las *condiciones de entropía de Lax* si existe un índice  $p = 1, \dots, n$ , tal que se cumplen las desigualdades

$$\begin{aligned} \lambda_p(u_R) &< s < \lambda_{p+1}(u_R), \\ \lambda_{p-1}(u_L) &< s < \lambda_p(u_L), \end{aligned} \quad (4.70)$$

en el caso en el que el  $p$ -campo característico es genuinamente no lineal, o bien tal que se cumple

$$\lambda_p(u_L) = s = \lambda_p(u_R), \quad (4.71)$$

si el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado.

### 4.4.2. La $E$ -condición de Liu

### 4.4.3. El criterio del perfil viscoso

## 4.5. El problema de Riemann

En esta sección consideramos el problema de Riemann para un sistema de leyes de conservación (4.1) en una dimensión, con condición inicial

$$u(x, 0) = \begin{cases} u_L, & x < 0, \\ u_R, & x > 0. \end{cases} \quad (4.72)$$

A lo largo de esta sección supondremos que

$$0 < |u_R - u_L| =: \varepsilon_0 \ll 1,$$

es suficientemente pequeño. Así, por los teoremas 4.12 y 4.34, si el  $p$ -campo es genuinamente no lineal y  $u_L \in \Omega$  tenemos curvas de estados en  $\Omega$  parametrizadas por  $\varepsilon$ , es decir,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_p(u_L) &= \{\Phi_p(\varepsilon) : |\varepsilon| < \varepsilon_1\}, \\ \mathcal{S}_p(u_L) &= \{\Psi_p(\varepsilon) : |\varepsilon| < \varepsilon_2\}, \end{aligned} \quad (4.73)$$

que denotan los posibles estados  $u_R$  que pueden ser conectados con  $u_L$  mediante una  $p$ -onda de rarefacción o una  $p$ -onda de choque, respectivamente. Notamos que  $\Phi_p(\varepsilon)$  y  $\Psi_p(\varepsilon)$  son

tangentes en  $\varepsilon = 0$ . Definimos la función

$$T_p(\varepsilon; u_L) := \begin{cases} \Phi_p(\varepsilon), & \varepsilon \geq 0, \\ \Psi_p(\varepsilon), & \varepsilon \leq 0, \end{cases} \quad (4.74)$$

para cada  $p = 1, \dots, n$ . Notamos que cada  $T_p$  es de clase  $C^2$  para  $\varepsilon \sim 0$ . De este modo, el conjunto

$$\{T_p(\varepsilon; u_L) : \varepsilon \sim 0\} \subset \Omega,$$

representa a los estados en  $\Omega$  vecinos a  $u_L$  que pueden conectarse con  $u_L$  mediante una  $p$ -onda de rarefacción por la derecha o mediante una  $p$ -onda de choque que satisface las condiciones de entropía de Lax.

Análogamente, si el campo  $p$  es linealmente degenerado, se define

$$T_p(\varepsilon; u_L) := \Psi_p(\varepsilon), \quad (4.75)$$

para  $\varepsilon \sim 0$ , representando los estados en  $\Omega$  vecinos a  $u_L$  que se conectan con  $u_L$  mediante una discontinuidad de contacto.

### 4.5.1. El teorema de Lax

El siguiente teorema debido a Lax garantiza la existencia y unicidad de la solución entrópica (en el sentido de las desigualdades de entropía de Lax) al problema de Riemann, si suponemos que los campos característicos son genuinamente no lineales o linealmente degenerados en todo  $\Omega$ .

**Teorema 4.38.** *Supóngase que para todo  $1 \leq p \leq n$ , el  $p$ -campo característico es genuinamente no lineal o linealmente degenerado en  $\Omega$ . Entonces, para todo  $u_L \in \Omega$  existe una vecindad  $\mathcal{O} \subset \Omega$  de  $u_L$  con la siguiente propiedad: si  $u_R \in \mathcal{O}$  entonces el problema de Riemann (4.1) y (4.72) tiene una única solución débil que consiste de, a lo más,  $n + 1$  estados separados por ondas de rarefacción, ondas de choque admisibles (que satisfacen las condiciones de entropía de Lax), o discontinuidades de contacto.*

*Demostración.* Sea  $u_L \in \Omega$ . Definimos

$$\bar{\varepsilon} := (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^\top \in \mathbb{R}^n$$

y consideramos el mapeo

$$T : \mathcal{N}(0) \rightarrow \Omega, \quad T(\bar{\varepsilon}) := T_n(\varepsilon_n; T_{n-1}(\varepsilon_{n-1}; \dots; T_1(\varepsilon_1, u_L) \dots)),$$

donde  $\mathcal{N}(0)$  es una vecindad en  $\mathbb{R}^n$  de  $\bar{\varepsilon} \sim 0$ , y donde cada  $T_p$ , con  $1 \leq p \leq n$ , está definido por (4.74) o (4.75), dependiendo de si el  $p$ -campo es genuinamente no lineal o linealmente degenerado, respectivamente. Queremos resolver la ecuación

$$T(\bar{\varepsilon}) = u_R, \quad (4.76)$$

para  $u_R$  en una vecindad de  $u_L$ . Notamos que el mapeo  $T$  es de clase  $C^2$  en  $\mathcal{N}(0)$ , ya que cada  $T_p$  es de clase  $C^2$ ,  $1 \leq p \leq n$ . También observamos que

$$T(0) = T_n(0; T_{n-1}(0; \dots, T_1(0; u_L), \dots)) = u_L.$$

Por ser de clase  $C^2$ , podemos expandir cada  $T_p$  en serie de Taylor de la forma

$$T_p(\varepsilon_p; u) = u + \varepsilon_p r_p(u) + O(\varepsilon_p^2).$$

En consecuencia tenemos que

$$\begin{aligned} T_2(\varepsilon_2; T_1(\varepsilon_1; u_L)) &= T_1(\varepsilon_1; u_L) + \varepsilon_2 r_2(T_1(\varepsilon_1; u_L)) + O(\varepsilon_2^2) \\ &= u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + O(\varepsilon_1^2) + \varepsilon_2 r_2(u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + O(\varepsilon_1^2)) + O(\varepsilon_2^2) \\ &= u_L + \varepsilon_1 r_1(u_L) + \varepsilon_2 r_2(u_L) + O(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2). \end{aligned}$$

Argumentando por inducción obtenemos la expansión en serie de Taylor

$$T(\bar{\varepsilon}) = u_L + \sum_{p=1}^n \varepsilon_p r_p(u_L) + O(|\bar{\varepsilon}|^2), \quad (4.77)$$

por lo que la derivada de  $T$  en  $\bar{\varepsilon} = 0$  está definida por

$$DT(0)\eta = \sum_{p=1}^n \eta_p r_p(u_L), \quad \text{para todo } \eta \in \mathbb{R}^n.$$

Equivalentemente,

$$DT(0) = \begin{pmatrix} r_1(u_L) \\ \vdots \\ r_n(u_L) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n},$$

la cual es una matriz invertible. Por el teorema de la función inversa existe una vecindad  $\mathcal{O} \subset \Omega$  de  $u_L$  tal que, para toda  $u_R \in \mathcal{O}$ , la ecuación (4.76) tiene una única solución

$$\bar{\varepsilon}(u_R) = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} (u_R) := T^{-1}(u_R).$$

De esta forma obtenemos una solución  $u$  que consiste en  $n + 1$  estados constantes, dados por

$$\begin{aligned}
u_0 &= u_L, \\
u_1 &= T_1(\mathcal{E}_1(u_R); u_L), \\
&\vdots \\
u_p &= T_p(\mathcal{E}_p(u_R); u_{p-1}), \\
&\vdots \\
u_{n-1} &= T_{n-1}(\mathcal{E}_{n-1}(u_R); u_{n-2}), \\
u_n &= T_n(\mathcal{E}_n(u_R); u_{n-1}),
\end{aligned}$$

separados por  $p$ -ondas que pueden ser, ondas de rarefacción, discontinuidades de contacto, ú ondas de choque que satisfacen las condiciones de entropía de Lax. A cada  $\mathcal{E}_p$  se le denomina la *amplitud* de la  $p$ -onda.  $\square$

#### 4.5.2. El problema de Riemann para el sistema $p$

##### Ejercicios

**4.1.** *La ecuación de onda.* El paradigma de una ecuación hiperbólica en una dimensión es la ecuación de onda,

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.78)$$

con datos iniciales  $u(x, 0) = u_0(x)$ ,  $u_t(x, 0) = u_1(x)$ . La velocidad de la onda es  $c > 0$ . Haciendo el cambio de variables  $v = u_x$  y  $w = u_t$ , la ecuación (4.78) es equivalente al siguiente sistema lineal con coeficientes constantes

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -c^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x =: A \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_x. \quad (4.79)$$

Demuestre que los valores propios de la matriz  $A$  son  $\lambda_1 = -c < \lambda_2 = c$  y encuentre una base de vectores propios de modo que el sistema se desacople y tiene como soluciones

$$\begin{aligned}
v(x, t) &= \frac{1}{2} \left( u'_0(x+ct) + c^{-1}u_1(x+ct) + u'_0(x-ct) - c^{-1}u_1(x-ct) \right), \\
w(x, t) &= \frac{1}{2} \left( cu'_0(x+ct) + u_1(x+ct) - cu'_0(x-ct) + u_1(x-ct) \right).
\end{aligned}$$

Encuentre la expresión para  $u(x, t)$ .

**4.2.** Encuentre la solución a las ecuaciones de agua poco profunda *linealizadas* en una dimensión,

$$\begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix}_t + \begin{pmatrix} \bar{\eta} & \bar{v} \\ \bar{v} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta \\ v \end{pmatrix}_x = 0, \quad (4.80)$$

donde  $\bar{v}$  y  $\bar{\eta} > 0$  son constantes, con datos iniciales arbitrarios,  $v(x, 0) = v_0(x)$  y  $\eta(x, 0) = \eta_0(x)$  dados. Resuelva el problema de Riemann asociado al sistema (4.80) con datos iniciales

$$(\eta_0, v_0)^\top(x) = \begin{cases} (1, 0)^\top, & x < 0, \\ (0, 1)^\top, & x > 0. \end{cases}$$

**4.3.** Sea  $u$  una solución de clase  $C^1$  del sistema de leyes de conservación (4.1). Sea  $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega$  un difeomorfismo suave, es decir, una transformación inyectiva, sobre y con derivadas continuas. Entonces  $w := \Phi(u)$  satisface el sistema cuasilineal

$$w_t + \tilde{A}(w)w_x = 0, \quad (4.81)$$

donde

$$\tilde{A}(w) = D\Phi(w)Df(\Phi(w))D\Phi^{-1}(w).$$

Pruebe que el  $p$ -campo característico de (4.1), con  $1 \leq p \leq n$ , es genuinamente no lineal (respectivamente, linealmente degenerado) si y sólo si el  $p$ -campo característico del sistema (4.81) es genuinamente no lineal (respectivamente, linealmente degenerado).

**4.4.** Considere un sistema estrictamente hiperbólico de la forma

$$u_t + f(u)_x = 0,$$

con un valor propio  $\lambda_p(u)$ , para cierto  $1 \leq p \leq n$ , y suponga que el  $p$ -campo característico es linealmente degenerado. Considere el siguiente sistema aumentado

$$\begin{aligned} u_t + f(u)_x &= 0, \\ v_t + (\lambda_p(u)v)_x &= 0. \end{aligned}$$

Demuestre que el nuevo sistema para las variables  $(u, v)^\top \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  es hiperbólico con exactamente las mismas velocidades características que el sistema original, pero con la multiplicidad de  $\lambda_p(u)$  aumentada en uno.

**4.5.** Para  $u \in \mathbb{R}$ ,  $u \neq 0$ , sea la matriz

$$A(u) := \exp(-1/u^2) \begin{pmatrix} \cos(2/u) & \sin(2/u) \\ \sin(2/u) & -\cos(2/u) \end{pmatrix},$$

y definamos  $A(0) := 0$ . Pruebe que  $A$  es de clase  $C^\infty$  como función de  $u$  y que tiene valores propios reales, pero que, sin embargo, no es posible hallar una base de vectores propios unitarios  $\{r_1(u), r_2(u)\}$  que dependa continuamente de  $u$  cerca de  $u = 0$ . Discuta qué sucede con los espacios propios cuando  $u \rightarrow 0$ .

**4.6.** Demuestre el lema 4.10.

**4.7.** Demuestre que todo sistema de *dos* leyes de conservación ( $n = 2$ ) está dotado de un sistema completo de invariantes de Riemann.

**4.8.** Describa el conjunto de Hugoniot local  $\mathcal{S}_p(u_0)$  para un sistema lineal.

**4.9.** Describa el conjunto de Hugoniot local  $\mathcal{S}_p(v_0, w_0)$  para el siguiente sistema de ecuaciones desacopladas

$$\begin{aligned}v_t + g(v)_x &= 0, \\w_t + h(w)_x &= 0.\end{aligned}$$

### **Nota bibliográfica**

## **Capítulo 5**

# **El problema de Riemann en dinámica de gases**

**5.1. El problema de Riemann para un gas ideal en el caso isentrópico**

**5.2. Desigualdades de entropía**

**5.3. Estudio de los campos característicos**

**5.4. Solución numérica**

**Nota bibliográfica**



## Capítulo 6

### El esquema de Glimm\*

- 6.1. Descripción del esquema
- 6.2. La estimación de interacción
- 6.3. Aproximación en diferencias
- 6.4. Convergencia

#### Nota bibliográfica

El artículo original de Glimm [81] contiene el primer resultado de existencia y unicidad de la solución entrópica para sistemas. El presente capítulo está basado en la descripción del esquema de Glimm que se encuentra en el libro Smoller [213]. Una versión determinista se debe a T.-P- Liu [147], la cual es descrita también en el quinto capítulo del libro de Serre [197].

---

\* Omitir durante una primera lectura.



## Capítulo 7

# Perfiles viscosos para ondas de choque

Este capítulo contiene una introducción a la teoría de existencia y estabilidad de perfiles viscosos para ondas de choque. La primera sección estudia perfiles viscosos para una ecuación escalar. En particular se analiza el caso de la ecuación de Burgers y la familia de perfiles viscosos de Burgers. Asimismo se discute la existencia del perfil viscoso para el caso escalar general. La sección 7.2 contiene una prueba de la estabilidad no lineal de los perfiles viscosos escalares basada en el método de energía. A pesar de que existen resultados de estabilidad más completos para el caso escalar<sup>1</sup> el método de energía es extrapolable al caso de sistemas y sirve de preparación previa. La estructura y existencia de perfiles de ondas de choque de amplitud pequeña se puede estudiar mediante una proyección no lineal sobre una variedad central. La sección 7.3 contiene los detalles de la construcción de los perfiles viscosos, tanto para tensores de difusión estrictamente parabólicos, como para tensores parcialmente parabólicos (viscosidad real). La sección 7.3.4 contiene la prueba de existencia del perfil viscoso de amplitud arbitraria para las ecuaciones de Navier-Stokes compresibles. Este resultado es de gran importancia teórica y se debe a Gilbarg [80].

---

<sup>1</sup> Véase, por ejemplo, el trabajo de Sattinger [192, 193].

## **7.1. Perfiles viscosos escalares**

### **7.1.1. La ecuación de Burgers**

### **7.1.2. Existencia**

## **7.2. Estabilidad en el caso escalar**

### **7.2.1. El problema perturbado**

### **7.2.2. La estimación básica de energía**

### **7.2.3. Estimación de orden alto**

## **7.3. Perfiles viscosos para sistemas**

### **7.3.1. Construcción de Koppell y Howard**

### **7.3.2. Criterio de admisibilidad de Majda-Pego**

### **7.3.3. Construcción de Pego para viscosidad real**

### **7.3.4. Perfiles de amplitud arbitraria en dinámica de gases**

## **7.4. Estabilidad de perfiles para sistemas**

### **7.4.1. El método de diagonalización de Goodman**

### **7.4.2. Panorámica del teorema de Liu: ondas de difusión**

### **7.4.3. Introducción a los métodos de la función de Evans**

## **Nota bibliográfica**

La primera construcción de un perfil viscoso con amplitud pequeña mediante la aplicación del teorema de variedad central apareció en el trabajo de Koppell y Howard [113], para el caso de viscosidad idéntica. Injustamente, esta contribución se menciona poco en la literatura y se

atribuye usualmente a Majda y Pego [163] la prueba de la existencia de perfiles. Éstos últimos caracterizaron a los posibles tensores de viscosidad, estrictamente parabólicos, que admiten la construcción de Koppell y Howard. Posteriormente Pego [179] extendió dicho criterio de admisibilidad al caso de sistemas con viscosidad real, es decir, con tensor de viscosidad no estrictamente parabólico. Notablemente, Pego hizo uso de la condición de Kawashima-Shizuta [108, 206], la cual todavía no había sido formulada por Kawashima en su tesis doctoral [107]. Para una descripción detallada de la demostración de la existencia de un perfil viscoso de amplitud arbitraria para las ecuaciones de Navier-Stokes debida a Gilbarg [80], recomiendo al lector consultar la tesis de F. Ángeles [8].



# Apéndice A

## Elementos de Análisis Real

En esta sección recolectamos algunos resultados básicos de Análisis Real que son utilizados durante la exposición del material.

### A.1. Teoremas elementales de cálculo

**Teorema A.1 (Teorema de localización).** *Sea  $F$  un campo escalar o vectorial, continuo, en un conjunto abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . Si para cualquier bola abierta  $B$  contenida en  $\Omega$  se cumple que*

$$\int_B F(x) dx = 0, \tag{A.1}$$

entonces  $F \equiv 0$  en  $\Omega$ .

*Demostración.* Sea  $x_0 \in \Omega$ . Para cada  $\varepsilon > 0$  tal que  $B_\varepsilon(x_0) \subset \Omega$  definimos

$$I_\varepsilon = \left| F(x_0) - \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon(x_0))} \int_{B_\varepsilon(x_0)} F(x) dx \right|.$$

Por lo tanto

$$0 \leq I_\varepsilon \leq \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon(x_0))} \int_{B_\varepsilon(x_0)} |F(x_0) - F(x)| dx \leq \sup_{x \in B_\varepsilon(x_0)} |F(x_0) - F(x)|.$$

Por continuidad de  $F$ , concluimos que  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_\varepsilon = 0$ , y por lo tanto, para cada  $x_0 \in \Omega$

$$F(x_0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\text{Vol}(B_\varepsilon(x_0))} \int_{B_\varepsilon(x_0)} F(x) dx.$$

Sea  $x_0 \in \Omega$  arbitrario; por la propiedad (A.1) de  $F$  se obtiene que  $F(x_0) = 0$ . □

## A.2. Teoremas de convergencia

A continuación se presentan algunos resultados útiles de convergencia de funciones. Como referencia, el lector puede consultar los textos clásicos de Rudin [190] y Bartle [12], así como el conciso (y útil) apéndice del libro de Evans [56].

Comenzamos recordando los teoremas básicos de análisis real.

**Teorema A.2 (Convergencia dominada de Lebesgue).** *Asumamos que las funciones  $f_n$  son integrables y que  $f_n \rightarrow f$  c.d.s. cuando  $n \rightarrow +\infty$ . Supongamos también que  $|f_n| \leq g$  para cierta función integrable  $g$ . Entonces  $f$  es integrable y*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu$$

**Lema A.3.** *Supongamos que  $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  es una sucesión de funciones  $u^\varepsilon : \mathbb{R}^d \rightarrow \Omega$  uniformemente acotada*

$$\|u^\varepsilon\|_\infty \leq C,$$

*con  $C > 0$ , y para toda  $\varepsilon > 0$ . Supongamos que  $u^\varepsilon \rightarrow u$  c.d.s. cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Entonces para toda función continua  $G : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^p$ , se tiene que  $G(u^\varepsilon) \rightarrow G(u)$  en sentido de distribuciones, es decir, para toda  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^p)$ ,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot G(u^\varepsilon) dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \phi \cdot G(u) dx,$$

*cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .*

*Demostración.* Definimos  $g^\varepsilon := \phi \cdot G(u^\varepsilon)$ , para cada  $\varepsilon > 0$ . Por continuidad, claramente  $g^\varepsilon \rightarrow \phi \cdot G(u)$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . También por continuidad y  $u^\varepsilon$  acotada uniformemente para toda  $\varepsilon$ , tenemos que

$$g := \sup |g^\varepsilon| \leq C,$$

con  $C > 0$ , cota uniforme en  $\varepsilon$  y en  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dado que  $\phi$  tiene soporte compacto,  $g^\varepsilon$  tiene soporte compacto.  $g$  es integrable, ya que,

$$\int g = \int \sup |\phi \cdot G(u^\varepsilon)| \leq M \int_{\text{supp } \phi} dx < +\infty.$$

Así, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue

$$\int g^\varepsilon \longrightarrow \int \lim g^\varepsilon = \int \phi \cdot G(u),$$

cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . □

### A.2.1. El alisador de Friedrichs.

Vamos a enunciar algunas propiedades del alisador de Friedrichs. El lector puede consultar, por ejemplo, el apéndice en el libro de Evans [56].

**Definición A.4.** (Alisador de Friedrichs)

(i) Definimos la función

$$\eta(x) := \begin{cases} C \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right); & \text{si } |x| < 1, \\ 0; & \text{si } |x| \geq 1, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

donde  $C$  es una constante tal que  $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta dx = 1$ . La función  $\eta$  es de clase  $C^\infty$ .

(ii) Para cada  $\varepsilon > 0$  definimos

$$\eta_\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon} \eta(x/\varepsilon). \quad (\text{A.3})$$

$\eta_\varepsilon$  es conocido como el *alisador de Friedrichs*. Claramente tenemos que  $\eta_\varepsilon \in C^\infty$ ,  $\int_{-\infty}^{+\infty} \eta_\varepsilon dx = 1$  y  $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ , para toda  $\varepsilon > 0$ .

(iii) Para cada función  $g$  integrable en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ , definimos el *alisamiento de  $g$*  como

$$g^\varepsilon(x) := (\eta_\varepsilon * g)(x) = \int_{\Omega} \eta_\varepsilon(x-y)g(y) dy, \quad (\text{A.4})$$

definida en  $x \in \Omega_\varepsilon := \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \varepsilon\}$ . Haciendo un cambio de variables y dado que  $\text{supp } \eta_\varepsilon \subset (-\varepsilon, \varepsilon)$ , tenemos,

$$g^\varepsilon(x) = \int_{(-\varepsilon, \varepsilon)} \eta_\varepsilon(y)g(x-y) dy.$$

La siguiente Proposición resume las propiedades básicas más importantes del alisador de Friedrichs. La prueba es elemental y se puede encontrar en [56], pg. 630.

**Proposición A.5.** *El alisamiento de una función  $g$  integrable en  $\Omega \subseteq \mathbb{R}$  satisface:*

- (a)  $g^\varepsilon$  es de clase  $C^\infty$  para todo  $\varepsilon > 0$ .
- (b)  $g^\varepsilon \rightarrow g$ , c.d.s. en  $\Omega$ , cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .
- (c) Si  $g$  es continua en  $\Omega$ , entonces  $g^\varepsilon \rightarrow g$  uniformemente en compactos de  $\Omega$  cuando  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ .

### A.3. Funciones convexas

#### A.3.1. Propiedades básicas

#### A.3.2. La transformada de Legendre

Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de clase  $C^2$  que satisfice

$$f''(u) \geq 1/C > 0, \text{ para toda } u \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.5})$$

$$\lim_{u \rightarrow \pm\infty} f'(u) = \pm\infty, \quad (\text{A.6})$$

Es decir,  $f$  es estrictamente convexa en todo  $\mathbb{R}$  y su derivada  $a := f' : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es invertible.

**Definición A.6.** Si  $f$  satisfice (A.5) y (A.6), definimos *la transformada de Legendre* de  $f$  como

$$f^*(v) := \max_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.7})$$

**Observación A.7.** (a) Notamos que  $f^*$  está bien definida. Para cada número real  $v \in \mathbb{R}$  fijo, existe un único  $u_* \in \mathbb{R}$  tal que  $v = f'(u_*) = a(u_*)$ , ya que  $a = f'$  es inyectiva y sobre. De este modo la función  $\psi_v(u) = uv - f(u)$  tiene un máximo único en  $u = u_*$ , en vista de que  $\psi'_v(u_*) = 0$  y  $\psi''_v(u_*) = -f''(u_*) < 0$ . Así,  $f^*(v) = u_*v - f(u_*)$ . Denotamos a la inversa de  $a$  como  $g = a^{-1}$ . De esta manera obtenemos,  $u_* = g(v)$ . Por ende, para toda  $v \in \mathbb{R}$ ,  $f^*(v)$  está determinada por

$$f^*(v) = vg(v) - f(g(v)). \quad (\text{A.8})$$

(b) Diferenciando (A.8),

$$\frac{df^*}{dv} = vg'(v) + g(v) - a(g(v))g'(v) = g(v), \quad (\text{A.9})$$

por lo cual,

$$\frac{d^2f^*}{dv^2} = g'(v) = \frac{1}{a'(g(v))} = \frac{1}{f''(g(v))} > 0,$$

esto es,  $f^*$  también es estrictamente convexa y de clase  $C^2$ .

Mas aún, bajo estas hipótesis tenemos el siguiente

**Lema A.8.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es de clase  $C^2$  y satisfice (A.5) y (A.6), entonces  $(f^*)^* = f$ .

*Demostración.* Por definición de la transformada de Legendre,

$$f^*(v) = \max_{u \in \mathbb{R}} (uv - f(u)) \geq uv - f(u),$$

para toda  $u \in \mathbb{R}$ , es decir,  $f(u) + f^*(v) \geq uv$ , para todo  $u \in \mathbb{R}$ ,  $v \in \mathbb{R}$ . De este modo obtenemos

$$f(u) \geq \sup_{v \in \mathbb{R}} (uv - f^*(v)). \quad (\text{A.10})$$

Por otro lado,

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = \sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - \sup_{v \in \mathbb{R}} (wv - f(v))) = \sup_{w \in \mathbb{R}} \left( \inf_{v \in \mathbb{R}} (w(u - v) + f(v)) \right).$$

Dado que  $f$  es estrictamente convexa y de clase  $C^2$  sabemos que  $f(v) + f'(u)(u - v) \geq f(u)$  para todo par  $v, u \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto, tomando  $w = f'(u)$ , obtenemos

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) \geq \inf_{v \in \mathbb{R}} (f'(u)(u - v) + f(v)) \geq f(u).$$

Combinando con (A.10) concluimos que

$$\sup_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = \max_{w \in \mathbb{R}} (uw - f^*(w)) = (f^*)^*(u) = f(u),$$

para toda  $u \in \mathbb{R}$ . □

### A.3.3. Interpolación lineal

El siguiente lema garantiza que podemos interpolar linealmente toda función convexa definida en un intervalo acotado, en una partición suficientemente fina.

**Lema A.9.** *Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función estrictamente convexa, definida en un intervalo compacto  $[a, b]$ . Entonces para cada  $\alpha > 0$  existe  $f_\alpha$  convexa tal que*

- (a)  $f(u) \leq f_\alpha(u) \leq f(u) + \alpha$ , para toda  $u \in [a, b]$ ,
- (b) Cada  $f_\alpha$  tiene la forma

$$f_\alpha = b_0 + b_1 u + \sum_{j=1}^M a_j |u - k_j|, \quad (\text{A.11})$$

donde  $\alpha = O(1/M)$ ,  $M \in \mathbb{Z}_+$ ,  $k_j \in [a, b]$ , y  $b_0, b_1, a_j$  son constantes, con  $a_j > 0$ . Más aún,  $f_\alpha$  converge uniformemente a  $f$  en  $[a, b]$  cuando  $\alpha \rightarrow 0^+$  (es decir, cuando  $M \rightarrow +\infty$ ).

*Demostración.* Véase [189]. □

## A.4. Funciones de variación acotada

### A.4.1. Definición y propiedades

Sea  $I \subseteq \mathbb{R}$  un intervalo (posiblemente no acotado) y sea  $v : I \rightarrow \mathbb{R}$ . La *variación total de  $v$  en  $I$*  se define como

$$\text{T.V.}(v; I) := \sup_{\mathcal{J}} \sum_{j=1}^N |v(x_j) - v(x_{j-1})|, \quad (\text{A.12})$$

donde el supremo se calcula sobre el conjunto  $\mathcal{J}$  de todas las particiones finitas de puntos en  $I$ , tales que  $x_0 < \dots < x_N$ ,  $x_j \in I$ . Cuando no hay ambigüedad sobre el intervalo  $I$ , (A.12) se denota simplemente como  $\text{T.V.}(v)$ . El conjunto de las funciones de variación acotada en  $I$  se denota como  $BV(I; \mathbb{R}^n)$ , de modo que

$$v \in BV(I; \mathbb{R}^n) \iff \text{T.V.}(v; I) < +\infty.$$

Cuando  $n = 1$  e  $I = \mathbb{R}$  el espacio se denota simplemente como  $BV(\mathbb{R})$ . A continuación presentamos algunas propiedades básicas de las funciones de variación acotada.

**Lema A.10.**  $BV(I; \mathbb{R}^n)$  es un subconjunto de  $(L^1(I))^n$ .

*Demostración.*

**Lema A.11.** Sean  $-\infty < a < b < +\infty$ . Si  $v \in BV((a, b); \mathbb{R})$  entonces para cada  $x \in (a, b)$  los límites

$$v(x^+) = \lim_{y \rightarrow x^+} v(y), \quad v(x^-) = \lim_{y \rightarrow x^-} v(y),$$

existen. Mas aún,  $v$  tiene, a lo más, un conjunto numerable de puntos de discontinuidad en  $(a, b)$ .

*Demostración.*

**Proposición A.12.** Si  $v \in BV(\mathbb{R})$  y  $h > 0$  entonces

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x+h) - v(x)| dx \leq h \text{T.V.}(v; \mathbb{R}). \quad (\text{A.13})$$

*Demostración.* Por propiedades del espacio  $BV(\mathbb{R})$  tenemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |v(x+h) - v(x)| dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{kh}^{(k+1)h} |v(x+h) - v(x)| dx \\ &= \int_0^h \sum_{k \in \mathbb{Z}} |v(y + (k+1)h) - v(y + kh)| dy \\ &\leq \int_0^h \text{T.V.}(v; \mathbb{R}) dy = h \text{T.V.}(v; \mathbb{R}). \end{aligned}$$

□

## A.4.2. El principio de Helly

El siguiente teorema (conocido también como *principio de selección de Helly*) representa una propiedad de compacidad de las funciones de variación acotada, la cual es fundamental para demostrar la existencia de soluciones débiles para sistemas de leyes de conservación.

**Teorema A.13 (Helly).** *Sea una sucesión de funciones  $v_m : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  tales que*

$$\text{T.V.}(v_m) \leq C, \quad |v_m(x)| \leq M,$$

*para todo  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , y para ciertas constantes uniformes  $C, M > 0$ . Entonces existe una subsucesión  $v_m$  y una función  $v \in BV(\mathbb{R})$  tales que*

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} v_m(x) = v(x), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\text{T.V.}(u) \leq C, \quad |v(x)| \leq M,$$

*para todo  $x \in \mathbb{R}$ .*

*Demostración.* Para cada  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , se define  $V_m(x)$  como la variación total de  $v_m$  en  $I = (-\infty, x]$ ,  $V_m(x) := \text{T.V.}(v_m; (-\infty, x])$ , es decir,

$$V_m(x) := \sup \left\{ \sum_{j=1}^N |v_m(x_j) - v_m(x_{j-1})| : N \geq 1, x_0 < x_1 < \dots < x_N = x \right\}.$$

Cada  $V_m$  es no decreciente y satisface  $0 \leq V_m(x) \leq C$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , y

$$|v_m(x) - v_m(y)| \leq V_m(z_2) - V_m(z_1), \quad z_1 \leq x \leq y \leq z_2.$$

Usando el método de diagonalización de Cantor, es posible construir una subsucesión  $V_m$  que tiene un límite en cada número racional,  $\lim_{m \rightarrow +\infty} V_m(x) = V(x)$ , con  $x \in \mathbb{Q}$ .



**Apéndice B**  
**Elementos de Teoría de Probabilidad**



**Apéndice C**  
**El teorema de variedad central**



## Bibliografía

1. R. ABEYARATNE AND J. K. KNOWLES, *Kinetic relations and the propagation of phase boundaries in solids*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), no. 2, pp. 119–154.
2. D. J. ACHESON, *Elementary fluid dynamics*, Oxford Applied Mathematics and Computing Science Series, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1990.
3. R. A. ADAMS, *Sobolev spaces*, vol. 65 of Pure and Applied Mathematics, Academic Press, New York-London, 1975.
4. R. A. ADAMS AND J. J. F. FOURNIER, *Sobolev spaces*, vol. 140 of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second ed., 2003.
5. R. AGEMI, *Global existence of nonlinear elastic waves*, Invent. Math. **142** (2000), no. 2, pp. 225–250.
6. T. V. ALEKSEYEVSKAYA, *Study of the system of quasilinear equations for isotachophoresis*, Adv. in Appl. Math. **11** (1990), no. 1, pp. 63–107.
7. S. ALINHAC, *Hyperbolic partial differential equations*, Universitext, Springer, Dordrecht, 2009.
8. F. ÁNGELES, *Perfiles viscosos de ondas de choque para las ecuaciones de Navier-Stokes de un fluido compresible*. (In Spanish.) B.Sc. Thesis, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México, 2014.
9. A. AW, A. KLAR, T. MATERNE, AND M. RASCLE, *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*, SIAM J. Appl. Math. **63** (2002), no. 1, pp. 259–278 (electronic).
10. A. AW AND M. RASCLE, *Resurrection of “second order” models of traffic flow*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), no. 3, pp. 916–938 (electronic).
11. R. G. BARTLE, *Introducción al Análisis Matemático*, Wiley Classics Library, Limusa-Noriega Editores, México, 1992.
12. ———, *The elements of integration and Lebesgue measure*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1995.
13. R. G. BARTLE AND D. R. SHERBERT, *Introduction to real analysis*, John Wiley & Sons Inc., New York, third ed., 2000.
14. G. K. BATCHELOR, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, paperback ed., 1999.
15. H. BATEMAN, *Some recent researches on the motion of fluids*, Monthly Weather Review **43** (1915), no. 4, pp. 163–170.
16. S. BENZONI-GAVAGE, *Stability of multi-dimensional phase transitions in a van der Waals fluid*, Non-linear Anal. TMA **31** (1998), no. 1-2, pp. 243–263.
17. ———, *Stability of subsonic planar phase boundaries in a van der Waals fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. **150** (1999), no. 1, pp. 23–55.
18. S. BENZONI-GAVAGE AND D. SERRE, *Multidimensional hyperbolic partial differential equations: First-order systems and applications*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press - Oxford University Press, Oxford, 2007.
19. H. A. BETHE, *On the theory of shock waves for an arbitrary equation of state [Rep. No. 545, Serial No. NDRC-B-237, Office Sci. Res. Develop., U. S. Army Ballistic Research Laboratory, Aberdeen Proving Ground, MD, 1942]*, in Classic papers in shock compression science, High-pressure. Shock Compression Condens. Matter, Springer, New York, 1998, pp. 421–492.

20. S. BIANCHINI AND A. BRESSAN, *A center manifold technique for tracing viscous waves*, Commun. Pure Appl. Anal. **1** (2002), no. 2, pp. 161–190.
21. ———, *Vanishing viscosity solutions of nonlinear hyperbolic systems*, Ann. of Math. (2) **161** (2005), no. 1, pp. 223–342.
22. G. BOILLAT, *Sur l'existence et la recherche d'équations de conservation supplémentaires pour les systèmes hyperboliques*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **278** (1974), pp. 909–912.
23. G. BOILLAT AND T. RUGGERI, *Hyperbolic principal subsystems: entropy convexity and subcharacteristic conditions*, Arch. Rational Mech. Anal. **137** (1997), no. 4, pp. 305–320.
24. ———, *On the shock structure problem for hyperbolic system of balance laws and convex entropy*, Contin. Mech. Thermodyn. **10** (1998), no. 5, pp. 285–292.
25. A. BRESSAN, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000. The one-dimensional Cauchy problem.
26. ———, *Hyperbolic systems of conservation laws: The one-dimensional Cauchy problem*, vol. 20 of Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, Oxford, 2000.
27. ———, *Tutorial on the center manifold theorem*, in Hyperbolic systems of balance laws, P. Marcati, ed., vol. 1911 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 2007, pp. 327–344. Lectures given at the C.I.M.E. Summer School held in Cetraro, July 14–21, 2003.
28. ———, *Hyperbolic conservation laws: an illustrated tutorial*, in Modelling and optimisation of flows on networks, L. Ambrosio, A. Bressan, D. Helbing, A. Klar, and E. Zuazua, eds., vol. 2062 of Lecture Notes in Math., Springer, Heidelberg, 2013, pp. 157–245.
29. A. BRESSAN AND C. DONADELLO, *On the formation of scalar viscous shocks*, Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ. **1** (2007), no. 1, pp. 1–11.
30. H. BREZIS, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2011.
31. S. E. BUCKLEY AND M. C. LEVERETT, *Mechanism of fluid displacements in sands*, Transactions of the AIME **146** (1942), pp. 107–116.
32. J. M. BURGERS, *A mathematical model illustrating the theory of turbulence*, in Advances in Applied Mechanics, R. von Mises and T. von Kármán, eds., Academic Press Inc., New York, N. Y., 1948, pp. 171–199.
33. J. CARR, *Applications of Centre Manifold Theory*, vol. 35 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1981.
34. D. CHAE AND S.-Y. HA, *On the formation of shocks to the compressible Euler equations*, Commun. Math. Sci. **7** (2009), no. 3, pp. 627–634.
35. G.-Q. CHEN AND C. M. DAFERMOS, *The vanishing viscosity method in one-dimensional thermoelasticity*, Trans. Amer. Math. Soc. **347** (1995), no. 2, pp. 531–541.
36. P. G. CIARLET, *Mathematical elasticity. Vol. I: Three-dimensional elasticity*, vol. 20 of Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1988.
37. J. D. COLE, *On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics*, Quart. Appl. Math. **9** (1951), pp. 225–236.
38. A. CORLI, *Weak shock waves for second-order multi-dimensional systems*, Boll. Un. Mat. Ital. B (7) **7** (1993), no. 3, pp. 493–510.
39. R. COURANT, K. FRIEDRICHS, AND H. LEWY, *Über die partiellen Differenzgleichungen der mathematischen Physik*, Math. Ann. **100** (1928), no. 1, pp. 32–74.
40. R. COURANT AND K. O. FRIEDRICHS, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Wiley Interscience, New York, 1948.
41. M. G. CRANDALL AND A. MAJDA, *The method of fractional steps for conservation laws*, Numer. Math. **34** (1980), no. 3, pp. 285–314.
42. ———, *Monotone difference approximations for scalar conservation laws*, Math. Comp. **34** (1980), no. 149, pp. 1–21.
43. C. M. DAFERMOS, *On the existence and the asymptotic stability of solutions to the equations of linear thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **29** (1968), no. 4, pp. 241–271.
44. ———, *The mixed initial-boundary value problem for the equations of nonlinear one-dimensional viscoelasticity*, J. Differential Equations **6** (1969), no. 1, pp. 71–86.

45. ———, *The entropy rate admissibility criterion for solutions of hyperbolic conservation laws*, J. Differential Equations **14** (1973), no. 2, pp. 202–212.
46. ———, *The entropy rate admissibility criterion in thermoelasticity*, Accad. Naz. dei Lincei, Ser. VIII **57** (1974), pp. 113–119.
47. ———, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2010.
48. ———, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, vol. 325 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], Springer-Verlag, Berlin, fourth ed., 2016.
49. W.-R. DAI, *Geometry of quasilinear hyperbolic systems with characteristic fields of constant multiplicity*, J. Math. Anal. Appl. **327** (2007), no. 1, pp. 188–202.
50. R. J. DiPERNA, *Decay and asymptotic behavior of solutions to nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Indiana Univ. Math. J. **24** (1974/75), no. 11, pp. 1047–1071.
51. ———, *Singularities of solutions of nonlinear hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **60** (1975/76), no. 1, pp. 75–100.
52. ———, *Uniqueness of solutions to hyperbolic conservation laws*, Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), no. 1, pp. 137–188.
53. D. E. EDMUNDS AND W. D. EVANS, *Spectral theory and differential operators*, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1987. Oxford Science Publications.
54. J. L. ERICKSEN, *Equilibrium of bars*, J. Elasticity **5** (1975), no. 3–4, pp. 191–201.
55. J. J. ERPENBECK, *Stability of step shocks*, Phys. Fluids **5** (1962), pp. 1181–1187.
56. L. C. EVANS, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
57. ———, *Partial differential equations*, vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, second ed., 2010.
58. E. FERMI, J. PASTA, AND S. ULAM, *Studies of nonlinear problems*. Los Alamos Scientific Laboratory, Report No. LA-1940, 1955.
59. V. C. A. FERRARO AND C. PLUMPTON, *An introduction to magneto-fluid mechanics*, Oxford University Press, London, 1961.
60. P. C. FIFE AND X. GENG, *Mathematical aspects of electrophoresis*, in Reaction-diffusion equations (Edinburgh, 1987–1988), K. J. Brown and A. A. Lacey, eds., Oxford Sci. Publ., Oxford Univ. Press, New York, 1990, pp. 139–172.
61. A. R. FORSYTH, *Theory of differential equations. Volume 6. Partial differential equations*, Cambridge University Press, London, 1906.
62. J. FOURIER, *Théorie analytique de la chaleur*, Éditions Jacques Gabay, Paris, 1988. Reprint of the 1822 original.
63. L. S. FOY, *Steady state solutions of hyperbolic systems of conservation laws with viscosity terms*, Comm. Pure Appl. Math. **17** (1964), pp. 177–188.
64. H. FREISTÜHLER, *On compact linear degeneracy*. Preprint. IMA Preprint Series No. 551, 1989.
65. ———, *Rotational degeneracy of hyperbolic systems of conservation laws*, Arch. Rational Mech. Anal. **113** (1990), no. 1, pp. 39–64.
66. ———, *The persistence of ideal shock waves*, Appl. Math. Lett. **7** (1994), no. 6, pp. 7–11.
67. ———, *Separation of linear and nonlinear modes in a hyperbolic system describing electrophoresis*, Quart. Appl. Math. **52** (1994), no. 1, pp. 31–34.
68. ———, *A short note on the persistence of ideal shock waves*, Arch. Math. **64** (1995), pp. 344–352.
69. ———, *Some results on the stability of non-classical shock waves*, J. Partial Diff. Eqs. **11** (1998), no. 1, pp. 25–38.
70. ———, *Theory of non-classical shock waves*. Lecture notes (preliminary version), RWTH Aachen, 1999.
71. H. FREISTÜHLER AND R. G. PLAZA, *Normal modes and nonlinear stability behaviour of dynamic phase boundaries in elastic materials*, Arch. Ration. Mech. Anal. **186** (2007), no. 1, pp. 1–24.
72. A. FRIEDMAN, *Partial Differential Equations of Parabolic Type*, Prentice-Hall, New Jersey, 1964.
73. K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric hyperbolic linear differential equations*, Comm. Pure Appl. Math. **7** (1954), pp. 345–392.

74. K. O. FRIEDRICHS AND P. D. LAX, *Boundary value problems for first order operators*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), pp. 355–388.
75. ———, *On symmetrizable differential operators*, in Singular Integrals (Proc. Sympos. Pure Math., Chicago, Ill., 1966), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1967, pp. 128–137.
76. ———, *Systems of conservation equations with a convex extension*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **68** (1971), pp. 1686–1688.
77. P. R. GARABEDIAN, *Partial differential equations*, Chelsea Publishing Co., New York, second ed., 1986.
78. I. GASSER, *On non-entropy solutions of scalar conservation laws for traffic flow*, ZAMM Z. Angew. Math. Mech. **83** (2003), no. 2, pp. 137–143.
79. I. M. GELFAND, *Some problems in the theory of quasi-linear equations*, Amer. Math. Soc. Transl. **29** (1963), no. 2, pp. 295–381.
80. D. GILBARG, *The existence and limit behavior of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math. **73** (1951), pp. 256–274.
81. J. GLIMM, *Solutions in the large for nonlinear hyperbolic systems of equations*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), pp. 697–715.
82. J. GLIMM AND P. D. LAX, *Decay of solutions of systems of hyperbolic conservation laws*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), p. 105.
83. ———, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Memoirs of the American Mathematical Society, No. 101, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.
84. E. GODLEWSKI AND P.-A. RAVIART, *Hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 3-4 of *Mathématiques et Applications*, Société de Mathématiques Appliquées et Industrielles, Éditions Ellipses, Paris, 1991.
85. ———, *Numerical approximation of hyperbolic systems of conservation laws*, vol. 118 of *Applied Mathematical Sciences*, Springer-Verlag, New York, 1996.
86. S. K. GODUNOV, *An interesting class of quasi-linear systems*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **139** (1961), pp. 521–523.
87. ———, *Non-unique “blurrings” of discontinuities in solutions of quasilinear systems*, Soviet Math. Dokl. **2** (1961), pp. 43–44.
88. ———, *The problem of a generalized solution in the theory of quasi-linear equations and in gas dynamics*, Uspehi Mat. Nauk **17** (1962), no. 3 (105), pp. 147–158.
89. M. GRASSIN, *Global smooth solutions to Euler equations for a perfect gas*, Indiana Univ. Math. J. **47** (1998), no. 4, pp. 1397–1432.
90. M. GRASSIN AND D. SERRE, *Existence de solutions globales et régulières aux équations d’Euler pour un gaz parfait isentropique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **325** (1997), no. 7, pp. 721–726.
91. B. GUSTAFSSON AND A. SUNDSTRÖM, *Incompletely parabolic problems in fluid dynamics*, SIAM J. Appl. Math. **35** (1978), no. 2, pp. 343–357.
92. J. HADAMARD, *Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique*, Princeton University Bulletin **13** (1902), pp. 49–52.
93. R. HAGAN AND M. SLEMROD, *The viscosity-capillarity criterion for shocks and phase transitions*, Arch. Rational Mech. Anal. **83** (1983), no. 4, pp. 333–361.
94. E. HOPF, *The partial differential equation  $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$* , Comm. Pure Appl. Math. **3** (1950), pp. 201–230.
95. ———, *Generalized solutions of non-linear equations of first order*, J. Math. Mech. **14** (1965), pp. 951–973.
96. L. HÖRMANDER, *Linear partial differential operators*, Springer Verlag, Berlin-New York, 1976.
97. H. HUGONOT, *On the propagation of motion in bodies and in perfect gases in particular. I* [*J. Éc. Polytech.* **57** (1887), 3–97], in *Classic papers in shock compression science*, J. N. Johnson and R. Chéret, eds., High-pressure Shock Compression Condens. Matter, Springer, New York, 1998, pp. 161–243.
98. ———, *On the propagation of motion in bodies and in perfect gases in particular. II* [*J. Éc. Polytech.* **58** (1889), 1–125], in *Classic papers in shock compression science*, J. N. Johnson and R. Chéret, eds., High-pressure Shock Compression Condens. Matter, Springer, New York, 1998, pp. 245–358.
99. A. M. ILIN AND O. A. OLEINIK, *Behaviour of the solutions of the Cauchy problem for certain quasi-linear equations for unbounded increase of time*, Amer. Math. Soc. Transl. **42** (1964), pp. 19–23.

100. J. D. JACKSON, *Classical electrodynamics*, John Wiley & Sons Inc., New York, second ed., 1975.
101. R. D. JAMES, *The propagation of phase boundaries in elastic bars*, Arch. Rational Mech. Anal. **73** (1980), no. 2, pp. 125–158.
102. S. JIANG AND R. RACKE, *Evolution equations in thermoelasticity*, vol. 112 of Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000.
103. F. JOHN, *Partial Differential Equations*, vol. 1 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, Fourth ed., 1982.
104. R. S. JOHNSON, *A modern introduction to the mathematical theory of water waves*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
105. T. KATO, *The Cauchy problem for quasi-linear symmetric hyperbolic systems*, Arch. Rational Mech. Anal. **58** (1975), no. 3, pp. 181–205.
106. ———, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1980.
107. S. KAWASHIMA, *Systems of a Hyperbolic-Parabolic Composite Type, with Applications to the Equations of Magnetohydrodynamics*, PhD thesis, Kyoto University, 1983.
108. S. KAWASHIMA AND Y. SHIZUTA, *On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems associated with the conservation laws*, Tohoku Math. J. (2) **40** (1988), no. 3, pp. 449–464.
109. S. KAWASHIMA AND W.-A. YONG, *Decay estimates for hyperbolic balance laws*, Z. Anal. Anwend. **28** (2009), no. 1, pp. 1–33.
110. A. KELLEY, *Stability of the center-stable manifold*, J. Math. Anal. and Appl. **18** (1967), no. 2, pp. 336–344.
111. ———, *The stable, center-stable, center, center-unstable, unstable manifolds*, J. Differential Equations **3** (1967), no. 4, pp. 546–570.
112. Y.-J. KIM AND Y.-R. LEE, *Dynamics in the fundamental solution of a non-convex conservation law*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **146** (2016), no. 1, pp. 169–193.
113. N. KOPELL AND L. N. HOWARD, *Bifurcations and trajectories joining critical points*, Adv. in Math. **18** (1975), no. 3, pp. 306–358.
114. D. KRÖNER, *Numerical schemes for conservation laws*, Wiley-Teubner Series Advances in Numerical Mathematics, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1997.
115. S. N. KRUŽKOV, *Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **187** (1969), pp. 29–32.
116. ———, *First order quasilinear equations with several independent variables.*, Mat. Sb. (N.S.) **81** (123) (1970), pp. 228–255.
117. P. K. KUNDU AND I. M. COHEN, *Fluid mechanics*, Academic Press, San Diego, 2002.
118. M. KUNIK, *A solution formula for a nonconvex scalar hyperbolic conservation law with monotone initial data*, Math. Methods Appl. Sci. **16** (1993), no. 12, pp. 895–902.
119. O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1968.
120. O. A. LADYZHENSKAYA, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Second English edition, revised and enlarged. Translated from the Russian by Richard A. Silverman and John Chu. Mathematics and its Applications, Vol. 2, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1969.
121. ———, *The boundary value problems of mathematical physics*, vol. 49 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1985.
122. L. D. LANDAU AND E. M. LIFSHITZ, *Course of theoretical physics, Vol. 8: Electrodynamics of continuous media*, Pergamon International Library of Science, Technology, Engineering and Social Studies, Pergamon Press, Oxford, 1984.
123. P. D. LAX, *Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation*, Comm. Pure Appl. Math. **7** (1954), pp. 159–193.
124. ———, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), pp. 537–566.
125. ———, *Differential equations, difference equations and matrix theory*, Comm. Pure Appl. Math. **11** (1958), pp. 175–194.
126. ———, *Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations*, J. Mathematical Phys. **5** (1964), pp. 611–613.

127. ———, *Shock waves and entropy*, in Contributions to nonlinear functional analysis (Proc. Sympos., Math. Res. Center, Univ. Wisconsin, Madison, Wis., 1971), Academic Press, New York, 1971, pp. 603–634.
128. ———, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, no. 11 in CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 1973.
129. ———, *Hyperbolic systems of conservation laws in several space variables*, in Current topics in Partial Differential Equations, N. Shimakura, Y. Ohya, and K. Kasahawa, eds., Kinokuniya Co. Ltd., Tokyo, 1986, pp. 327–341.
130. ———, *Linear algebra*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1997. A Wiley-Interscience Publication.
131. ———, *Hyperbolic partial differential equations*, vol. 14 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2006.
132. ———, *Linear algebra and its applications*, Pure and Applied Mathematics (Hoboken), Wiley-Interscience, John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, second ed., 2007.
133. P. G. LEFLOCH, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems under nonconservative form*, Comm. Partial Differential Equations **13** (1988), no. 6, pp. 669–727.
134. ———, *Entropy weak solutions to nonlinear hyperbolic systems in nonconservation form*, in Nonlinear hyperbolic equations—theory, computation methods, and applications (Aachen, 1988), J. Ballmann and R. Jeltsch, eds., vol. 24 of Notes Numer. Fluid Mech., Friedr. Vieweg, Braunschweig, 1989, pp. 362–373.
135. ———, *Hyperbolic systems of conservation laws: The theory of classical and nonclassical shock waves*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, 2002.
136. N. LEGER,  *$L^2$  stability estimates for shock solutions of scalar conservation laws using the relative entropy method*, Arch. Ration. Mech. Anal. **199** (2011), no. 3, pp. 761–778.
137. N. LEGER AND A. VASSEUR, *Relative entropy and the stability of shocks and contact discontinuities for systems of conservation laws with non-BV perturbations*, Arch. Ration. Mech. Anal. **201** (2011), no. 1, pp. 271–302.
138. R. J. LEVEQUE, *Numerical methods for conservation laws*, Lectures in Mathematics ETH Zürich, Birkhäuser Verlag, Basel, second ed., 1992.
139. ———, *Finite volume methods for hyperbolic problems*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
140. ———, *Finite difference methods for ordinary and partial differential equations: Steady-state and time-dependent problems*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2007.
141. M. J. LIGHTHILL AND G. B. WHITHAM, *On kinematic waves. I. Flood movement in long rivers*, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. **229** (1955), pp. 281–316.
142. ———, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. **229** (1955), pp. 317–345.
143. T.-P. LIU, *The Riemann problem for general  $2 \times 2$  conservation laws*, Trans. Amer. Math. Soc. **199** (1974), pp. 89–112.
144. ———, *Existence and uniqueness theorems for Riemann problems*, Trans. Amer. Math. Soc. **212** (1975), pp. 375–382.
145. ———, *The Riemann problem for general systems of conservation laws*, J. Differential Equations **18** (1975), pp. 218–234.
146. ———, *The entropy condition and the admissibility of shocks*, J. Math. Anal. Appl. **53** (1976), pp. 78–88.
147. ———, *The deterministic version of the Glimm scheme*, Comm. Math. Phys. **57** (1977), no. 2, pp. 135–148.
148. ———, *Linear and nonlinear large-time behavior of solutions of general systems of hyperbolic conservation laws*, Comm. Pure Appl. Math. **30** (1977), no. 6, pp. 767–796.
149. ———, *Nonlinear stability of shock waves for viscous conservation laws*, Mem. Amer. Math. Soc. **56** (1985), no. 328, pp. v + 108.
150. ———, *Shock waves for compressible Navier-Stokes equations are stable*, Comm. Pure Appl. Math. **34** (1986), pp. 565–594.
151. ———, *Hyperbolic conservation laws with relaxation*, Comm. Math. Phys. **108** (1987), no. 1, pp. 153–175.

152. ———, *Pointwise convergence to shock waves for viscous conservation laws*, *Comm. Pure Appl. Math.* **50** (1997), no. 11, pp. 1113–1182.
153. ———, *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, vol. 72 of CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, 2000.
154. ———, *On shock wave theory*, in *Proceedings of 1999 International Conference on Nonlinear Analysis (Taipei)*, vol. 4 of Taiwanese Journal of Mathematics, 2000, pp. 9–20.
155. ———, *Hopf-Cole transformation*, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin. (N.S.)* **12** (2017), no. 1, pp. 71–101.
156. T.-P. LIU AND H. WANG, *Viscous Scalar Rarefaction Waves*, *SIAM J. Math. Anal.* **49** (2017), no. 3, pp. 2061–2100.
157. J. LOU AND T. RUGGERI, *Acceleration waves and weak Shizuta-Kawashima condition*, *Rend. Circ. Mat. Palermo (Suppl.)* **2** (2006), no. 78, pp. 187–200.
158. A. MAJDA, *The existence of multi-dimensional shock fronts*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **43** (1983), no. 281, pp. v + 93.
159. ———, *The stability of multi-dimensional shock fronts*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **41** (1983), no. 275, pp. iv + 95.
160. ———, *Compressible fluid flow and systems of conservation laws in several space variables*, vol. 53 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1984.
161. ———, *Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean*, vol. 9 of Courant Lecture Notes in Mathematics, New York University Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 2003.
162. A. MAJDA AND S. OSHER, *Initial-boundary value problems for hyperbolic equations with uniformly characteristic boundary*, *Comm. Pure Appl. Math.* **28** (1975), pp. 607–675.
163. A. MAJDA AND R. L. PEGO, *Stable viscosity matrices for systems of conservation laws*, *J. Differential Equations* **56** (1985), pp. 229–262.
164. C. MASCIA, *Twenty-eight years with “Hyperbolic conservation laws with relaxation”*, *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.* **35** (2015), no. 4, pp. 807–831.
165. C. MASCIA AND K. ZUMBRUN, *Pointwise Green’s function bounds and stability of relaxation shocks*, *Indiana Univ. Math. J.* **51** (2002), no. 4, pp. 773–904.
166. ———, *One-dimensional stability of viscous shock and relaxation profiles*, in *Hyperbolic problems: theory, numerics, applications*, T. Y. Hou and E. Tadmor, eds., Springer, Berlin, 2003, pp. 727–733.
167. ———, *Pointwise Green function bounds for shock profiles of systems with real viscosity*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **169** (2003), no. 3, pp. 177–263.
168. ———, *Stability of large-amplitude viscous shock profiles of hyperbolic-parabolic systems*, *Arch. Ration. Mech. Anal.* **172** (2004), no. 1, pp. 93–131.
169. ———, *Stability of small-amplitude shock profiles of symmetric hyperbolic-parabolic systems*, *Comm. Pure Appl. Math.* **57** (2004), no. 7, pp. 841–876.
170. ———, *Stability of large-amplitude shock profiles of general relaxation systems*, *SIAM J. Math. Anal.* **37** (2005), no. 3, pp. 889–913 (electronic).
171. ———, *Spectral stability of weak relaxation shock profiles*, *Comm. Partial Differential Equations* **34** (2009), no. 1-3, pp. 119–136.
172. R. MENIKOFF AND B. J. PLOHR, *The Riemann problem for fluid flow of real materials*, *Rev. Modern Phys.* **61** (1989), no. 1, pp. 75–130.
173. P. D. MILLER, *Applied asymptotic analysis*, vol. 75 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
174. O. A. OLEĬNIK, *Construction of a generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation of first order by the introduction of “vanishing viscosity”*, *Uspehi Mat. Nauk* **14** (1959), no. 2 (86), pp. 159–164.
175. ———, *Uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasi-linear equation*, *Uspehi Mat. Nauk* **14** (1959), no. 2 (86), pp. 165–170.
176. ———, *Discontinuous solutions of non-linear differential equations*, *Amer. Math. Soc. Transl. (2)* **26** (1963), pp. 95–172.
177. J. PEDLOSKY, *Geophysical fluid dynamics*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1987.
178. R. L. PEGO, *Linearized stability of extreme shock profiles in systems of conservation laws with viscosity*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **280** (1983), no. 2, pp. 431–461.
179. ———, *Stable viscosities and shock profiles for systems of conservation laws*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **282** (1984), no. 2, pp. 749–763.

180. ———, *Remarks on the stability of shock profiles for conservation laws with dissipation*, Trans. Amer. Math. Soc. **291** (1985), no. 1, pp. 353–361.
181. R. L. PEGO AND M. I. WEINSTEIN, *Eigenvalues, and instabilities of solitary waves*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **340** (1992), no. 1656, pp. 47–94.
182. ———, *On asymptotic stability of solitary waves*, Phys. Lett. A **162** (1992), no. 3, pp. 263–268.
183. ———, *Asymptotic stability of solitary waves*, Comm. Math. Phys. **164** (1994), no. 2, pp. 305–349.
184. ———, *Convective linear stability of solitary waves for Boussinesq equations*, Stud. Appl. Math. **99** (1997), no. 4, pp. 311–375.
185. B. K. QUINN, *Solutions with shocks: An example of an  $L_1$ -contractive semigroup*, Comm. Pure Appl. Math. **24** (1971), pp. 125–132.
186. W. J. M. RANKINE, *On the thermodynamic theory of waves of finite longitudinal disturbance [Philos. Trans. **160** (1870), part II, 277–288]*, in Classic papers in shock compression science, J. N. Johnson and R. Chéret, eds., High-press. Shock Compression Condens. Matter, Springer, New York, 1998, pp. 133–147.
187. P. I. RICHARDS, *Shock waves on the highway*, Operations Res. **4** (1956), pp. 42–51.
188. B. RIEMANN, *Über die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite*, Gott. Abh. Math. Cl. **8** (1860), pp. 43–65.
189. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series, No. 28, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1970.
190. W. RUDIN, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill Book Co., New York, third ed., 1987.
191. S. SALSA, *Partial differential equations in action. From modelling to theory*, Universitext, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
192. D. H. SATTINGER, *On the stability of waves of nonlinear parabolic systems*, Advances in Math. **22** (1976), no. 3, pp. 312–355.
193. ———, *Weighted norms for the stability of traveling waves*, J. Differential Equations **25** (1977), no. 1, pp. 130–144.
194. D. G. SCHAEFFER AND M. SHEARER, *The classification of  $2 \times 2$  systems of nonstrictly hyperbolic conservation laws, with application to oil recovery*, Comm. Pure Appl. Math. **40** (1987), no. 2, pp. 141–178.
195. D. SERRE, *Richness and the classification of quasilinear hyperbolic systems*, in Multidimensional hyperbolic problems and computations (Minneapolis, MN, 1989), J. Glimm and A. J. Majda, eds., vol. 29 of IMA Vol. Math. Appl., Springer, New York, 1991, pp. 315–333.
196. ———, *Temple's fields and integrability of hyperbolic systems of conservation laws*, in International Conference in Nonlinear PDEs, G. Dong and F. Lin, eds., International Academic Publishers, New York, 1993, pp. 233–251.
197. ———, *Systems of Conservation Laws 1. Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
198. ———, *Systems of Conservation Laws 2. Geometric structures, oscillations and initial-boundary value problems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Translated from the 1996 French original by I. N. Sneddon.
199. ———, *La transition vers l'instabilité pour les ondes de choc multi-dimensionnelles*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), no. 12, pp. 5071–5093 (electronic).
200. ———, *Local existence for viscous system of conservation laws:  $H^s$ -data with  $s > 1 + d/2$* , in Nonlinear partial differential equations and hyperbolic wave phenomena, H. Holden and K. H. Karlsen, eds., vol. 526 of Contemp. Math., Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010, pp. 339–358.
201. ———, *The structure of dissipative viscous system of conservation laws*, Phys. D **239** (2010), no. 15, pp. 1381–1386.
202. ———, *Five open problems in compressible mathematical fluid dynamics*, Methods Appl. Anal. **20** (2013), no. 2, pp. 197–209.
203. D. SERRE AND A. F. VASSEUR,  *$L^2$ -type contraction for systems of conservation laws*, J. Éc. polytech. Math. **1** (2014), pp. 1–28.
204. M. SHEARER, *The Riemann problem for a class of conservation laws of mixed type*, J. Differential Equations **46** (1982), no. 3, pp. 426–443.
205. ———, *Non-uniqueness of admissible solutions of Riemann initial value problems for a system of conservation laws of mixed type*, Arch. Rational Mech. Anal. **93** (1986), pp. 45–59.

206. Y. SHIZUTA AND S. KAWASHIMA, *Systems of equations of hyperbolic-parabolic type with applications to the discrete Boltzmann equation*, Hokkaido Math. J. **14** (1985), no. 2, pp. 249–275.
207. T. C. SIDERIS, *Formation of singularities in solutions to nonlinear hyperbolic equations*, Arch. Rational Mech. Anal. **86** (1984), no. 4, pp. 369–381.
208. ———, *Formation of singularities in three-dimensional compressible fluids*, Comm. Math. Phys. **101** (1985), no. 4, pp. 475–485.
209. ———, *Nonresonance and global existence of prestressed nonlinear elastic waves*, Ann. of Math. (2) **151** (2000), no. 2, pp. 849–874.
210. ———, *Nonlinear hyperbolic systems and elastodynamics*, in Phase Space Analysis of PDEs, Vol. II, Scuola Normale Superiore di Pisa, 2004, pp. 451–485.
211. M. SLEMROD, *Global existence, uniqueness, and asymptotic stability of classical smooth solutions in one-dimensional nonlinear thermoelasticity*, Arch. Rational Mech. Anal. **76** (1981), no. 2, pp. 97–133.
212. ———, *Admissibility criteria for propagating phase boundaries in a van der Waals fluid*, Arch. Rational Mech. Anal. **81** (1983), pp. 301–315.
213. J. SMOLLER, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, New York, Second ed., 1994.
214. J. J. STOKER, *Water waves. The mathematical theory with applications*, Wiley Classics Library, John Wiley & Sons Inc., New York, 1992. Reprint of the 1957 original, A Wiley-Interscience Publication.
215. M. E. TAYLOR, *Partial differential equations. Basic theory*, vol. 23 of Texts in Applied Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1996.
216. ———, *Partial differential equations I. Basic theory*, vol. 115 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
217. ———, *Partial differential equations II. Qualitative studies of linear equations*, vol. 116 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1996.
218. ———, *Partial differential equations III. Nonlinear equations*, vol. 117 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 1997.
219. B. TEXIER AND K. ZUMBRUN, *Entropy criteria and stability of extreme shocks: a remark on a paper of Leger and Vasseur*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 2, pp. 749–754.
220. E. F. TORO, *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics. A practical introduction*, Springer-Verlag, Berlin, third ed., 2009.
221. A. VANDERBAUWHEDE, *Centre manifolds, normal forms and elementary bifurcations*, in Dynamics Reported, Vol. 2, U. Kirchgraber and H. O. Walther, eds., A Series in Dynamical Systems and Their Applications, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, 1989, pp. 89–169.
222. A. VANDERBAUWHEDE AND S. A. V. GILS, *Center manifolds and contractions on a scale of Banach spaces*, J. of Funct. Anal. **72** (1987), pp. 209–224.
223. C. VILLANI, *Hypocoercivity*, Mem. Amer. Math. Soc. **202** (2009), no. 950, pp. iv + 141.
224. W. G. VINCENTI AND C. H. KRUGER, *Introduction to Physical Gas Dynamics*, Wiley & Sons, New York, 1965.
225. H. WEYL, *Shock waves in arbitrary fluids*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), pp. 103–122.
226. G. B. WHITHAM, *A general approach to linear and non-linear dispersive waves using a Lagrangian*, J. Fluid Mech. **22** (1965), pp. 273–283.
227. ———, *Non-linear dispersive waves*, Proc. Roy. Soc. Ser. A **283** (1965), pp. 238–261.
228. ———, *Nonlinear dispersive waves*, SIAM J. Appl. Math. **14** (1966), pp. 956–958.
229. ———, *Linear and Nonlinear Waves*, Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons Inc., New York, 1999. Reprint of the 1974 original, A Wiley-Interscience Publication.
230. K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Classics in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Sixth ed., 1980.
231. K. ZUMBRUN, *Stability of viscous shock waves*. Lecture Notes, Indiana University, 1998.
232. ———, *Dynamical stability of phase transitions in the  $p$ -system with viscosity-capillarity*, SIAM J. Appl. Math. **60** (2000), no. 6, pp. 1913–1924.
233. ———, *Multidimensional stability of planar viscous shock fronts*. Lecture Notes, Indiana University, 2000.
234. ———, *Stability of large-amplitude shock waves of compressible Navier-Stokes equations*, in Handbook of mathematical fluid dynamics. Vol. III, S. Friedlander and D. Serre, eds., North-Holland, Amsterdam, 2004, pp. 311–533.

235. ———, *Planar stability criteria for viscous shock waves of systems with real viscosity*, in *Hyperbolic systems of balance laws*, P. Marcati, ed., vol. 1911 of *Lecture Notes in Math.*, Springer, Berlin, 2007, pp. 229–326.
236. ———, *Stability and dynamics of viscous shock waves*, in *Nonlinear conservation laws and applications*, A. Bressan, G.-Q. G. Chen, M. Lewicka, and D. Wang, eds., vol. 153 of *IMA Vol. Math. Appl.*, Springer, New York, 2011, pp. 123–167.

# Índice alfabético

- agua poco profunda, 12
- Buckley-Leverett, 149
- Burgers, ecuación de
  - compleja, 49
  - no viscosa, 22
  - viscosa, 60
- electroforesis, 19
- entropía
  - desigualdad de, 54
  - flujo de, 54
  - función de, 53
  - par de, 54
- entropía, condición de
  - caso escalar, 80
  - generalizada, 84
  - Lax (caso escalar), 38, 91
  - Lax-Oleñnik, 38, 91
  - Oleñnik, 39, 92
- Euler, ecuaciones de, 6
  - caso barotrópico, 50, 73
  - forma lagrangiana, 9
  - hiperbolicidad, 43
- hiperelasticidad, 13
- Hopf-Cole, transformación de, 62
- Kawashima-Shizuta, clase de, 65
- Kružkov-Oleñnik, teoría de, 134
- Lax, fórmula de; ver Lax-Hopf, 97
- Legendre, transformada de, 200
- Legendre-Hadamard, condición de, 46
- localización, teorema de, 197
- magnetohidrodinámica, 18
- onda
  - $N$ , 116
  - simple, 171
- Rankine-Hugoniot, condiciones de, 28
- rarefacción, onda de, 34
- Riemann, problema de
  - escalar, 124
  - sistemas, 183
- semi-Hamiltonianos, sistemas, 20
- simetrizable, sistema, 49
- sistema  $p$ , 16
- solución
  - $C^1$  por pedazos, 28
  - débil, 25
  - entrópica, 82
- termoelasticidad, 15
- tráfico, modelo de, 10, 148
- variación acotada, función de, 201
- variedad central, teorema de, 207
- viscosa, aproximación, 58
- viscosidad
  - artificial, 59
  - idéntica, 59
  - parabólica, 59
  - real, 60