Introducción a Sistemas Hiperbólicos de Leyes de Conservación

Ramón G. Plaza

IIMAS-FENOMEC, UNAM

Curso Avanzado de Ecuaciones Diferenciales
Posgrado en Ciencias Matemáticas

http://www.fenomec.unam.mx/ramon/LeyesConservacion-2011-2.html

Motivación
- ¿Qué es un sistema de leyes de conservación?
- Hidrodinámica

Otros ejemplos

Estructura del curso
- Introducción
- Ley de conservación escalar en una dimensión
- Sistemas en una dimensión
- Perfiles viscosos

Bibliografía

Sistema de leyes de conservación

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, \qquad \text{(SLC)}$$

donde,

$$(x,t) \in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty),$$
$$u \in \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$
$$f^j \in C^2(\Omega,\mathbb{R}^n), \quad j = 1,\ldots,d,$$
$$d \geq 1, n \geq 1.$$

Sistema de leyes de conservación

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = 0, \qquad \text{(SLC)}$$

donde,

$$\begin{aligned} (x,t) &\in \mathbb{R}^d \times [0,+\infty), \\ u &\in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \\ f^j &\in C^2(\Omega, \mathbb{R}^n), \quad j = 1, \ldots, d, \\ d &\geq 1, n \geq 1. \end{aligned}$$

Terminología:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^n \ni u &= \text{variables conservadas o estados} \\
f^j &= \text{funciones de flujo} \\
\Omega &= \text{conjunto de estados admisibles} \\
n \geq 1 &= \text{número de cantidades conservadas} \\
d \geq 1 &= \text{dimensión del espacio físico}
\end{aligned}
$$

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Particularidades:

- Práctica: gran cantidad de modelos tienen la forma de un (SLC).
- Teoría: resolver el problema de Cauchy es *muy* difícil.
- Las soluciones relevantes son, generalmente, discontinuas.
- Se carece de una teoría matemática satisfactoria: falta de unicidad.
- Se requieren criterios adicionales para seleccionar soluciones "físicamente relevantes"
- Para sistemas en varias dimensiones espaciales prácticamente no se sabe *nada*.

Historia (incompleta)

- Ecuaciones de Euler para dinámica de gases.
- Condiciones de salto (Rankine-Hugoniot); ondas de "choque".
- Circa 1947: Courant, Friedrichs.
- Crucial: artículo de Lax (CPAM, 1957): matematización de (SLC).
- Ecuación escalar: Lax (1957), Oleinik (1963), Kruzkov (1970) (existencia y unicidad de soluciones entrópicas).
- Esquema de Glimm (1970's): primer resultado de existencia para sistemas.
- Bressan (1990's): Existencia con aproximación viscosa.

Ecuaciones de Navier-Stokes compresible

$$
\begin{aligned}
\rho_t + \mathrm{div}_x(\rho v) &= 0,\\
(\rho v)_t + \mathrm{div}_x(\rho v \otimes v) + \nabla_x p &= \mathrm{div}_x\Big(\mu(\mathrm{div}_x u) I +\\
&\quad + \lambda(\nabla_x u + (\nabla_x u)^\top)\Big),\\
(\rho(e + \tfrac{1}{2}|v|^2))_t + \mathrm{div}_x\big((e + \tfrac{1}{2}|v|^2)\rho v + p v\big) &= \mu \mathrm{div}_x((\mathrm{div}_x v) v) +\\
&\quad + \lambda \mathrm{div}_x\big((\nabla v + (\nabla v)^\top) v\big) +\\
&\quad + \kappa \Delta\theta.
\end{aligned}
\tag{CNS}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \ni (v_1, v_2, v_3)^\top = v &- \text{campo de velocidades}\\
0 < \rho &- \text{densidad de masa}\\
0 < e &- \text{densidad de energía interna}\\
p(\rho, e) = p &- \text{presión termodinámica}\\
0 < \theta &- \text{temperatura}\\
0 < \lambda, \mu, \kappa &- \text{coeficientes de viscosidad y conductividad térmica}
\end{aligned}
$$

Ecuación de estado:

$$p = p(\rho, e)$$

Segunda ley:

$$\theta dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \ni (v_1, v_2, v_3)^\top = v &- \text{campo de velocidades} \\
0 < \rho &- \text{densidad de masa} \\
0 < e &- \text{densidad de energía interna} \\
p(\rho, e) = p &- \text{presión termodinámica} \\
0 < \theta &- \text{temperatura} \\
0 < \lambda, \mu, \kappa &- \text{coeficientes de viscosidad y conductividad térmica}
\end{aligned}
$$

Ecuación de estado:

$$p = p(\rho, e)$$

Segunda ley:

$$\theta dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \ni (v_1, v_2, v_3)^\top = v &- \text{campo de velocidades}\\
0 < \rho &- \text{densidad de masa}\\
0 < e &- \text{densidad de energía interna}\\
p(\rho, e) = p &- \text{presión termodinámica}\\
0 < \theta &- \text{temperatura}\\
0 < \lambda, \mu, \kappa &- \text{coeficientes de viscosidad y conductividad térmica}
\end{aligned}
$$

Ecuación de estado:

$$p = p(\rho, e)$$

Segunda ley:

$$\theta dS = de - \frac{p}{\rho^2} d\rho.$$

Ecuaciones de Euler (sistema hiperbólico)

$$
\left.
\begin{aligned}
\rho_t + \operatorname{div}(\rho v) &= 0, \\
(\rho v)_t + \operatorname{div}(\rho v \otimes v) + \nabla p &= 0, \\
(\rho(e + \tfrac{1}{2}|v|^2))_t + \operatorname{div}((e + \tfrac{1}{2}|v|^2)\rho v + p v) &= 0,
\end{aligned}
\right.
\qquad \text{(E)}
$$

Generalización

$$u_t + \sum_{j=1}^{d} f^j(u)_{x_j} = \sum_{i,j=1}^{d} (B^{ij}(u,\varepsilon) u_{x_j})_{x_i}, \qquad \text{(VSLC)}$$

¿Por qué el estudio del sistema hiperbólico?

- En ciertos regímenes la viscosidad es despreciable
- El término de disipación no estabiliza los algoritmos numéricos
- El entendimiento de la "estructura hiperbólica" es crucial en el estudio de las ecuaciones con viscosidad
- Desde el punto de vista matemático: ¡es un reto!

¿Por qué el estudio del sistema hiperbólico?

- En ciertos regímenes la viscosidad es despreciable
- El término de disipación no estabiliza los algoritmos numéricos
- El entendimiento de la “estructura hiperbólica” es crucial en el estudio de las ecuaciones con viscosidad
- Desde el punto de vista matemático: ¡es un reto!

¿Por qué el estudio del sistema hiperbólico?

- En ciertos regímenes la viscosidad es despreciable
- El término de disipación no estabiliza los algoritmos numéricos
- El entendimiento de la "estructura hiperbólica" es crucial en el estudio de las ecuaciones con viscosidad
- Desde el punto de vista matemático: ¡es un reto!

¿Por qué el estudio del sistema hiperbólico?

- En ciertos regímenes la viscosidad es despreciable
- El término de disipación no estabiliza los algoritmos numéricos
- El entendimiento de la "estructura hiperbólica" es crucial en el estudio de las ecuaciones con viscosidad
- Desde el punto de vista matemático: ¡es un reto!

Motivación
¿Qué es un sistema de leyes de conservación?
Hidrodinámica
Otros ejemplos
Estructura del curso
Introducción
Ley de conservación escalar en una dimensión
Sistemas en una dimensión
Perfiles viscosos
Bibliografía

Flujo de tráfico (modelo de Lighthill-Whitham-Richards)

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0,$$

$$q(\rho) = \rho u_{\max} \left(1 - \rho/\rho_{\max}\right).$$

$\rho =$ no. de autos en una carretera, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.
$u = u_{\max}(1 - \rho/\rho_{\max})$ velocidad de los autos en cada punto (x,t).

Flujo de tráfico (modelo de Lighthill-Whitham-Richards)

$$\rho_t + q(\rho)_x = 0,$$

$$q(\rho) = \rho u_{\max} \left(1 - \rho/\rho_{\max}\right).$$

$\rho =$ no. de autos en una carretera, $(x,t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty)$.
$u = u_{\max}(1 - \rho/\rho_{\max})$ velocidad de los autos en cada punto (x,t).

Ecuaciones de agua poco profunda

$$
\begin{aligned}
\eta_t + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0,\\
(\eta u)_t + (\tfrac{1}{2} g\eta^2 + \eta u^2)_x + (\eta v)_y &= 0,\\
(\eta v)_t + (\eta u v)_x + (\tfrac{1}{2} g\eta^2 + \eta v^2)_y &= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\eta &- \text{profundidad del agua}\\
\mathbb{R}^2 \ni (u,v) &- \text{campo de velocidades}\\
(x,y,t) &\in \mathbb{R}^2 \times [0,+\infty)
\end{aligned}
$$

Ecuaciones de agua poco profunda

$$\begin{aligned} \eta_t + (\eta u)_x + (\eta v)_y &= 0, \\ (\eta u)_t + (\tfrac{1}{2} g\eta^2 + \eta u^2)_x + (\eta v)_y &= 0, \\ (\eta v)_t + (\eta u v)_x + (\tfrac{1}{2} g\eta^2 + \eta v^2)_y &= 0, \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} \eta &- \text{profundidad del agua} \\ \mathbb{R}^2 \ni (u, v) &- \text{campo de velocidades} \\ (x, y, t) &\in \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty) \end{aligned}$$

Materiales hiperelásticos

$$\partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i = 0, \quad i,j = 1,2,3$$

$$\partial_t V_i - \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{ij}} = 0, \quad i = 1,2,3.$$

$$(x,t) \ni \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty),$$

$$X(x,t) - \text{variable lagrangiana (deformación + I)}$$

$$\mathbb{R}_+^{3\times 3} \ni U, U_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} - \text{gradiente de deformación}$$

$$\mathbb{R}^3 \ni V, V_j = \frac{\partial X_j}{\partial t} - \text{velocidad local}$$

$$W : \mathbb{R}_+^{3\times 3} \to \mathbb{R}_+ - \text{función de densidad de energía.}$$

Materiales hiperelásticos

$$\partial_t U_{ij} - \partial_{x_j} V_i = 0, \quad i,j = 1,2,3$$
$$\partial_t V_i - \sum_{j=1}^{3} \partial_{x_j} \frac{\partial W}{\partial U_{ij}} = 0, \quad i = 1,2,3.$$

$$(x,t) \ni \mathbb{R}^3 \times [0,+\infty),$$
$$X(x,t) \text{ – variable lagrangiana (deformación + I)}$$
$$\mathbb{R}_+^{3\times 3} \ni U, U_{ij} = \frac{\partial X_i}{\partial x_j} \text{ – gradiente de deformación}$$
$$\mathbb{R}^3 \ni V, V_j = \frac{\partial X_j}{\partial t} \text{ – velocidad local}$$
$$W : \mathbb{R}_+^{3\times 3} \to \mathbb{R}_+ \text{ – función de densidad de energía.}$$

Magnetohidrodinámica

$$
\begin{aligned}
\rho_t + \sum_{j=1}^{3} (\rho v_j)_{x_j} &= 0 \\
(\rho v_i)_t + \operatorname{div}(\rho v_i v) + (p + \tfrac{1}{2}|\vec{B}|^2)_{x_i} - \operatorname{div}(B_i \vec{B}) &= 0, \qquad i = 1, 2, \\
(\tfrac{1}{2}\rho|v|^2 + \rho e + \tfrac{1}{2}|\vec{B}|^2)_t + \operatorname{div}(\tfrac{1}{2} v \rho |v|^2 + v\rho e + pv + \vec{E} \times \vec{B}) &= 0, \\
\vec{B}_t + \nabla \times \vec{E} &= 0,
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \ni (v_1, v_2, v_3)^\top = v &- \text{campo de velocidades}\\
0 < \rho &- \text{densidad de masa}\\
0 < e &- \text{densidad de energía interna}\\
p(\rho, e) = p &- \text{presión termodinámica}\\
\mathbb{R}^3 \ni (E_1, E_2, E_3) = \vec{E} &- \text{campo eléctrico}\\
\mathbb{R}^3 \ni (B_1, B_2, B_3) = \vec{B} &- \text{campo magnético}
\end{aligned}$$

Ecuación de estado:

$$p = p(\rho, e)$$

Las leyes de Gauss en forma de divergencia constituyen restricciones a los campos.

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^3 \ni (v_1, v_2, v_3)^\top = v &- \text{campo de velocidades}\\
0 < \rho &- \text{densidad de masa}\\
0 < e &- \text{densidad de energía interna}\\
p(\rho, e) = p &- \text{presión termodinámica}\\
\mathbb{R}^3 \ni (E_1, E_2, E_3) = \vec{E} &- \text{campo eléctrico}\\
\mathbb{R}^3 \ni (B_1, B_2, B_3) = \vec{B} &- \text{campo magnético}
\end{aligned}$$

Ecuación de estado:

$$p = p(\rho, e)$$

Las leyes de Gauss en forma de divergencia constituyen restricciones a los campos.

El sistema p

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned}$$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, donde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p'(v) < 0$. Ejemplos: dinámica de gases (caso isentrópico, formulación lagrangiana), barra elástica dimensional, ecuación de onda nolineal (con $\psi_x = v$, $\psi_t = w$),

$$\psi_{tt} + p(\psi_x)_x = 0,$$

velocidad $c = \sqrt{-p'(\psi_x)}$ (Fermi-Pasta-Ulam).

El sistema p

$$\begin{aligned} v_t - w_x &= 0, \\ w_t + p(v)_x &= 0, \end{aligned}$$

$(x,t) \in \mathbb{R} \times [0,+\infty)$, donde $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $p'(v) < 0$. Ejemplos: dinámica de gases (caso isentrópico, formulación lagrangiana), barra elástica dimensional, ecuación de onda nolineal (con $\psi_x = v$, $\psi_t = w$),

$$\psi_{tt} + p(\psi_x)_x = 0,$$

velocidad $c = \sqrt{-p'(\psi_x)}$ (Fermi-Pasta-Ulam).

Motivación
¿Qué es un sistema de leyes de conservación?
Hidrodinámica
Otros ejemplos
Estructura del curso
Introducción
Ley de conservación escalar en una dimensión
Sistemas en una dimensión
Perfiles viscosos
Bibliografía

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Introducción: Generalidades

- Ecuaciones de campo
- Ejemplos
- Convección nolineal
- Definición de *solución débil.* Pérdida de unicidad.
- Condiciones de salto de Rankine-Hugoniot
- Hiperbolicidad
- Sistemas simetrizables
- Definición de entropía
- Aproximación viscosa

Ecuación de Burgers no viscosa

$$u_t + \left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x = 0.$$

Condición inicial:

$$u_0(x) = e^{-x^2/\omega}$$

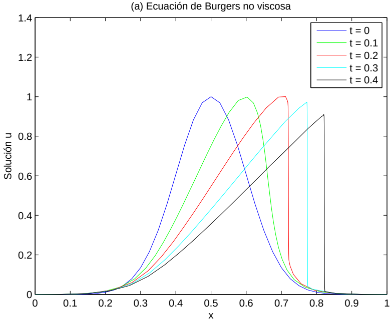


Figura: (a) Solución a la ecuación de Burgers no viscosa con condición inicial $u_0 = e^{-x^2/\omega}$.

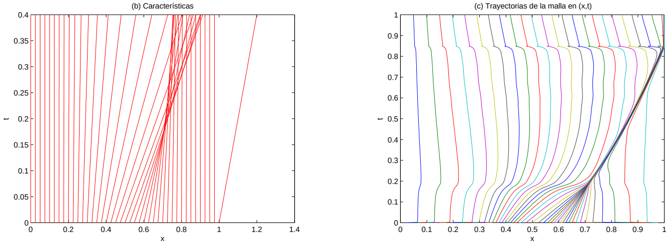


Figura: (b) Curvas “características” que se intersectan. (c) Malla en (x, t).

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

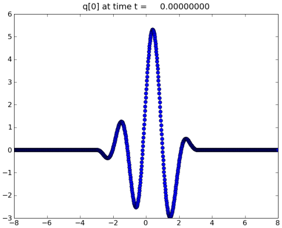
Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ley de conservación escalar en una dimensión

- Existencia local
- Condiciones de entropía: Lax, Oleinik, condición de entropía generalizada
- Caso convexo $f'' > 0$: la fórmula de Lax
- Decaimiento a ondas N
- Problema de Riemann
- Panorámica de la teoría de Kruzkov-Oleinik
- Ejemplos: Burgers, tráfico, Buckley-Leverett

Ecuación de Burgers no viscosa



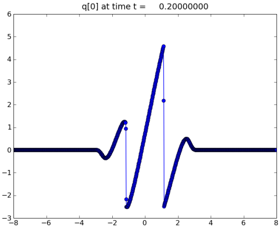


Figura: Ecuación de Burgers, datos iniciales oscilatorios. Decaimiento a una onda N. Cortesía: Randy LeVeque.

Ecuación de Burgers no viscosa

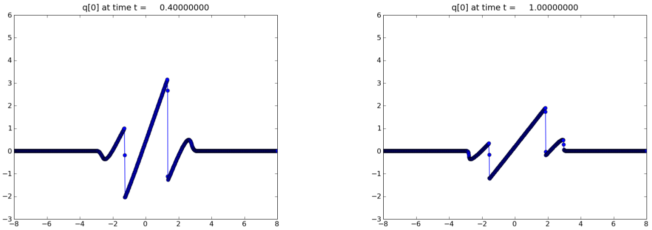


Figura: Ecuación de Burgers, datos iniciales oscilatorios. Decaimiento a una onda N. Cortesía: Randy LeVeque.

Ecuación de Burgers no viscosa

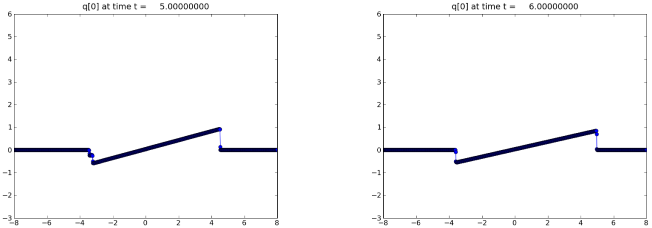


Figura: Ecuación de Burgers, datos iniciales oscilatorios. Decaimiento a una onda N. Cortesía: Randy LeVeque.

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Sistemas en una dimensión

- Hiperbolicidad; sistemas lineales
- Nolinealidad genuina y degeneración lineal
- Ondas de rarefacción e invariantes de Riemann
- Ondas de choque y discontinuidades de contacto
- Solución al problema de Riemann: el teorema de Lax
- El teorema de representación
- Ejemplo: las ecuaciones de Euler

Modelo de tráfico (luz verde)

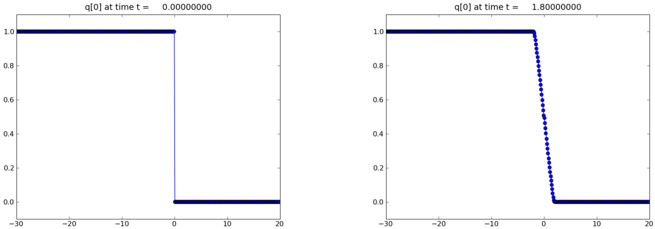


Figura: Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards. Luz verde: condicion inicial 1 (left), 0 (right). Onda de rarefacción. Cortesía: Randy LeVeque.

Modelo de tráfico (luz verde)

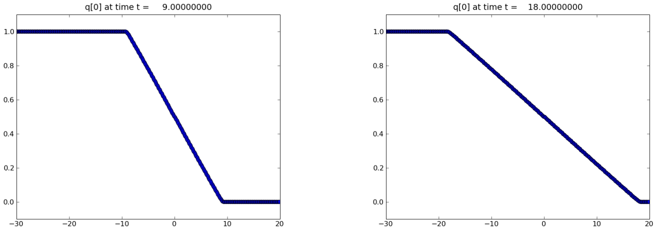


Figura: Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards. Luz verde: condicion inicial 1 (left), 0 (right). Onda de rarefacción. Cortesía: Randy LeVeque.

Modelo de tráfico (luz roja)

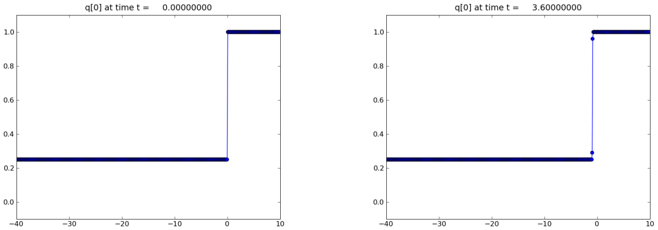


Figura: Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards. Luz verde: condicion inicial 0 (left), 1 (right). Onda de choque. Cortesía: Randy LeVeque.

Modelo de tráfico (luz roja)

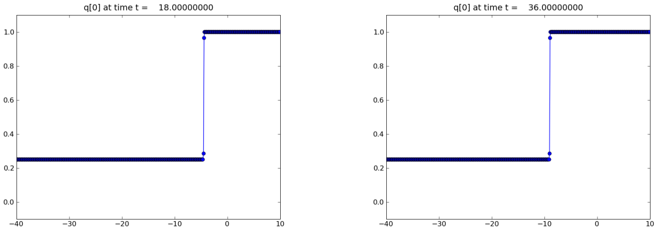


Figura: Modelo de tráfico de Lighthill-Whitham-Richards. Luz verde: condicion inicial 0 (left), 1 (right). Onda de choque. Cortesía: Randy LeVeque.

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Perfiles viscosos

- Ejemplo: Burgers con viscosidad y la transformación de Hopf-Cole.
- Existencia de perfiles viscosos escalares
- Estabilidad (caso escalar)
- Perfiles para sistemas: método de Koppell y Howard
- Criterio de admisibilidad de Majda-Pego
- Estabilidad (parte I): el método de diagonalización de Goodman
- Estabilidad (Parte II): estimaciones tipo Kawashima
- Panorámica del teorema de Liu; ondas de difusión

Omisiones notables:

- Sistemas con relajación, “radiativos” (acoplamiento elíptico), modelos visco-capilares, etc.
- Métodos numéricos
- Ondas de choque no clásicas $\Rightarrow$ transiciones de fase
- Esquema de Glimm
- Compacidad compensada (sistemas de 2×2)

Motivación
- ¿Qué es un sistema de leyes de conservación?
- Hidrodinámica

Otros ejemplos

Estructura del curso
- Introducción
- Ley de conservación escalar en una dimensión
- Sistemas en una dimensión
- Perfiles viscosos

Bibliografía

Textos generales

- EVANS, L.C. *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics vol. 19, A.M.S., 1998.
- RENARDY, M. Y ROGERS, R.C. *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 2004.

Textos sobre Leyes de Conservación

- SMOLLER, J. *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations*, Springer-Verlag, Second ed., 1994.
- DAFERMOS, C.M. *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer-Verlag, Third ed., 2010.
- SERRE, D. *Systems of Conservation Laws 1: Hyperbolicity, entropies, shock waves*, Cambridge University Press, 1999.
- LAX, P.D. *Hyperbolic Systems of Conservation Laws and the Mathematical Theory of Shock Waves*, SIAM, 1973.

Material adicional

- LIU, T.-P-. *Hyperbolic and Viscous Conservation Laws*, SIAM, 2000.
- WHITHAM, G.B. *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, 1974.
- COURANT, R. Y FRIEDRICHS, K.O. *Supersonic Flow and Shock Waves*, Wiley, 1948.

¡Bienvenidos!