



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

MÉTODOS ESPECTRALES EN EL ESTUDIO DE FRENTE DE ONDA PARA  
ECUACIONES DE REACCIÓN DIFUSIÓN

TESIS  
QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE:  
MAESTRO EN CIENCIAS

PRESENTA:  
JOSÉ ALEJANDRO BUTANDA MEJÍA

DIRECTOR DE LA TESIS: DR. RAMÓN GABRIEL PLAZA VILLEGAS  
IIMAS-UNAM

CIUDAD DE MÉXICO, FEBRERO 2016



**A mis padres**

Victor y Josefina

**A mis hermanos**

Arturo, Juan y Josué



---

# Agradecimientos

---

Sé que me he olvidado de ti en estos años, pero tu siempre has guiado mi camino, me has dado fuerza para seguir adelante y has cuidado de mí y de los que amo. Gracias Dios por los grandes y excepcionales regalos que me has dado en mi vida.

Por su amor incondicional, gracias a mi familia: Víctor y Josefina que han sabido ser unos padres excepcionales y me han aceptado con mis virtudes y defectos, a mis hermanos Arturo, Juan y Josué que me han dado fuerzas para seguir adelante. Gracias por apoyarme en todos los sentidos, ya que sin ustedes no hubiera sido esto posible.

A la Universidad Nacional Autónoma de México, tal vez no es mi primera universidad, pero sin duda es a la que amo más, donde realmente encontré una segunda casa y nuevas experiencias que siempre se quedarán conmigo. ¡Cómo no te voy a querer!

Al Dr. Ramón Plaza, gracias por su apoyo incondicional, su inmensa paciencia y entusiasmo para la culminación de este trabajo.

A mis profesores que contribuyeron a mi formación durante la maestría, en especial al Dr. Antonio Capella quien hizo surgir mi interés por las ecuaciones diferenciales parciales, y a la Dra. Luz por transmitirme sus conocimientos, y con ella aprendí el valor del trabajo duro.

A mis sinodales, el Dr. Manuel Falconi y al Dr. Carlos Malaga por sus valiosas observaciones, correcciones y sugerencias para enriquecer este trabajo.

A mis amigos de toda la vida: a Che, que ha sido un pilar en mi vida, una amiga incondicional y una de las mejores personas que he conocido; a Rafael que desde lejos se preocupa por mí y siempre ha tenido tiempo para platicar; a Jhordan, un gran amigo que conocí de la manera más inesperada; a Ana, una mujer que no tiene comparación; a Eric, gracias por todas esas pláticas acompañadas de una buena taza de café.

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por brindarme una beca para mis estudios de maestría con número (CVU/ becario) 508129/287179.



---

# Índice general

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>I</b>
<b>Introducción</b>	<b>V</b>
<b>1 Preliminares y Notación</b>	<b>1</b>
1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias . . . . .	1
1.2. Elementos de Análisis Funcional . . . . .	2
1.2.1. Espacios de Sobolev . . . . .	2
1.3. Operadores Cerrados y Acotados . . . . .	4
1.3.1. Resolvente y Espectro . . . . .	4
1.3.2. Operadores Adjuntos y Fredholm . . . . .	6
<b>2 Teoría Espectral de Operadores Diferenciales</b>	<b>9</b>
2.1. Espectro Esencial . . . . .	9
2.1.1. Espectro Esencial: Frentes y Pulsos . . . . .	9
2.2. Espectro Puntual: Teoría de Sturm-Liouville . . . . .	19
2.2.1. Operadores de Sturm-Liouville . . . . .	19
<b>3 Estabilidad Espectral Unidimensional</b>	<b>21</b>
3.1. Ondas Viajeras y Ecuaciones de Reacción Difusión . . . . .	21
3.2. Estabilidad de Ondas Viajeras . . . . .	28
3.3. Ecuación Biestable . . . . .	30
3.4. Ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (Fisher-KPP) . . . . .	37
<b>4 Estabilidad Espectral Multidimensional</b>	<b>47</b>
4.1. Ondas Viajeras para Ecuaciones de Reacción Difusión Multidimensionales . . . . .	47
<b>5 Simulaciones Numéricas</b>	<b>53</b>
<b>6 Conclusiones</b>	<b>63</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>65</b>





---

# Introducción

---

La difusión se puede describir como el proceso mediante el cual los individuos de una población (por ejemplo, moléculas, células u organismos) se desplazan de manera aleatoria y que deriva en una distribución más o menos uniforme, es decir, el proceso de difusión es el resultado de una mezcla gradual de los individuos para formar una concentración homogénea.

Este proceso ha sido ampliamente estudiado desde el siglo XIX y su enfoque termodinámico puede sintetizarse en la llamada ley de Fick:

*La cantidad de materia transportada en una dirección dada a través de una unidad de área transversal en una unidad de tiempo, esto es, el flujo  $\mathbf{J}$ , es proporcional al gradiente de la concentración de la materia.*

Sea  $u(x, t)$  la concentración de un reactivo en el punto  $x$  al tiempo  $t$ , entonces la ley de Fick se puede describir en términos matemáticos como:

$$\mathbf{J} = -D\nabla u,$$

donde  $D$  es el coeficiente de difusión.

Para relacionar el cambio temporal de la concentración del reactivo y el proceso de difusión usaremos leyes de conservación de masas. Este tipo de leyes establecen que la concentración local de una población cambia debido a que los individuos entran o salen debido al proceso de difusión.

Consideremos  $\Omega$  una región en el espacio con frontera  $\Gamma$ . Suponiendo que en la región  $\Omega$  no cambia en el tiempo y que no existe un proceso por el cual se generen nuevos individuos, entonces la razón de cambio en la cantidad de individuos en  $\Omega$  es debido al flujo que entra o sale a través de  $\Gamma$ , es decir,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u d\Omega = - \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \nu d\Gamma,$$

donde  $\nu$  es el vector unitario exterior a la frontera  $\Gamma$ . Al usar la ley de Fick y el teorema de la divergencia, llegamos a la ecuación

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial t} d\Omega = \int_{\Omega} \nabla \cdot (D\nabla u) d\Omega.$$

Ya que esta relación es válida para cualquier región  $\Omega$  y las derivadas de  $u$  son continuas, entonces podemos deducir que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u).$$

En el caso de que existan reacciones por las cuales se active o inhiba la aparición de individuos, es necesario añadir un término que modele este proceso:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u d\Omega = \int_{\Omega} f d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{J} \cdot \nu d\Gamma,$$

donde  $f(u, x, t)$  es una función que expresa la razón de producción neta de  $u$ .

De manera análoga, podemos derivar una ecuación que gobierne el proceso de reacción difusión:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla u) + f(u).$$

La teoría de ecuaciones de reacción difusión comenzó a principios de 1930 con los trabajos de Fisher [5] y Kolmogorov, Petrovsky, Piskunov [11] sobre la propagación de un gen dominante y por Zeldovich, Frank-Kamenetskii en teoría de combustión [6]. Ellos introdujeron la ecuación de reacción difusión escalar

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad (1)$$

definiendo soluciones por ondas viajeras y estudiando su existencia, estabilidad y velocidad de propagación. Estos trabajos fueron seguidos por muchos otros autores, quienes estudiaron las ondas viajeras en conexión con una amplia gama de problemas en química, física, biología, medicina; en los libros de J. D. Murray [15] y [16] se mencionan y estudian estos problemas.

Las soluciones en forma de ondas viajeras para las ecuaciones de reacción difusión son soluciones a (1) con la forma específica  $u(x, t) = \varphi(z)$ ,  $z = x + ct$ . Estas soluciones están definidas para todo  $z \in \mathbb{R}$  y satisfacen la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'' - c\varphi' + f(\varphi) = 0, \quad (2)$$

donde las primas denotan la derivada con respecto de  $z$ . La existencia y propiedades de tales soluciones dependen de la función  $f(u)$ . En dinámica de poblaciones dicha función  $f$  describe la razón de reproducción de la población. Muy a menudo se considera la función (vea [13])

$$f(u) = au^n(1 - u) - bu. \quad (3)$$

Si  $n = 1$ , entonces la razón de reproducción es proporcional a la densidad  $u$  de la población y a los recursos disponibles  $(1 - u)$ . El último término describe la mortalidad de la población. Si  $a > b$ , esto es, la mortalidad es pequeña, entonces la función  $f(u)$  tiene dos ceros  $\varphi_+ = 0$  y  $\varphi_- = 1 - b/a$ . En dinámica poblacional, la función  $f(u) = au(1 - u/K)$  (donde el parámetro  $K = \varphi_-$  es llamado capacidad de carga) describe una población con crecimiento logístico. Observemos que  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$  son puntos de equilibrio para ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{du}{dt} = f(u). \quad (4)$$

Se puede verificar que  $\varphi_+$  es inestable mientras que  $\varphi_-$  es estable.

En el caso  $n = 2$ , la función  $f(u)$  descrita en (3) toma en cuenta efectos colectivos, el ejemplo más simple de tales efectos es la reproducción sexual de la población. La función (3) puede tener de uno a tres ceros dependiendo de los parámetros  $a$  y  $b$ . Cuando existen tres ceros,  $\varphi_+ = 0$ ,  $\varphi_0$  y  $\varphi_-$ , donde  $\varphi_+ < \varphi_0 < \varphi_-$ , entonces los puntos  $\varphi_+$  y  $\varphi_-$  son puntos de equilibrio estables de la ecuación (3), mientras que el cero intermedio  $\varphi_0$  es inestable. En dinámica de poblaciones esto se conoce como *efecto Allee fuerte* (en [13] se estudia este efecto ampliamente).

Los dos ejemplos anteriores nos sugieren que busquemos soluciones a la ecuación (2) con los límites

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = \varphi_- \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \varphi_+. \quad (5)$$

Si los puntos  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$  son estables con respecto a la ecuación (4), entonces tenemos el caso biestable. Si el punto  $\varphi_+$  es inestable y  $\varphi_-$  es estable, tenemos el caso monoestable. En la gráfica 0.1 se muestran ejemplos de estos comportamientos.

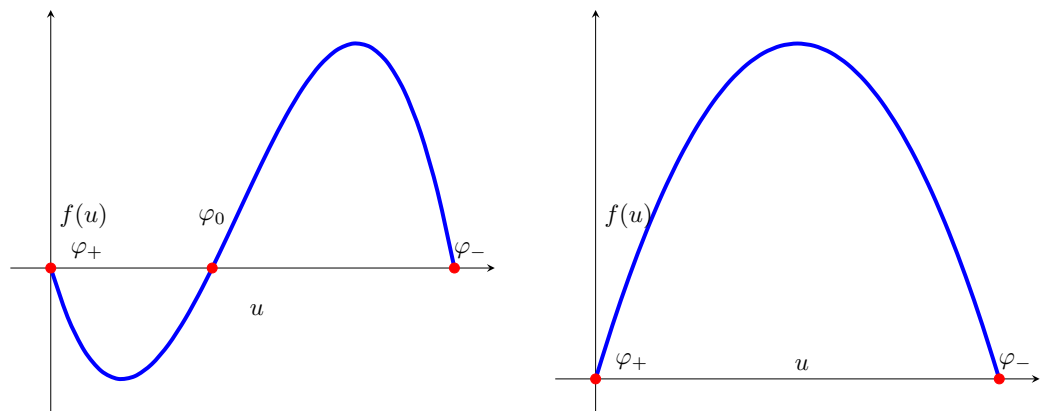


Figura 0.1: Ejemplos de funciones no lineales  $f(u)$  para la ecuación (1): a la izquierda el caso biestable, y a la derecha el monoestable.

La idea de construir ondas viajeras es representar soluciones de ecuaciones de reacción difusión como frentes que se mueven con velocidad constante en el espacio. El problema de encontrar tales soluciones se reduce a decidir si existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que la onda viajera  $\varphi$  es solución de (2) con la propiedad (5), donde  $\varphi_{\pm}$  son tales que  $f(\varphi_{\pm}) = 0$ . Diremos que  $c$  es la velocidad de la onda. Estas soluciones describen la invasión del estado  $\varphi_-$  al estado  $\varphi_+$  si  $c > 0$ ; en caso contrario, es decir, si  $c < 0$ , se tienen invasiones del estado  $\varphi_+$  al estado  $\varphi_-$ . Desde el punto de vista físico, las ondas viajeras representan un proceso de transición.

La ecuación diferencial ordinaria (2) puede ser reformulada como el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\begin{aligned} \varphi' &= \psi \\ \psi' &= c\psi - f(\varphi). \end{aligned} \quad (6)$$

De esta manera, el problema de hallar soluciones a (2)-(5) se convierte en encontrar orbitas heteroclínicas u homoclínicas para (6) en el plano fase  $(\varphi, \psi)$ .

La ecuación diferencial parcial (1) escrita en el sistema coordenado galileano, es decir, en el sistema

$$\tau = t, \quad z = x + ct,$$

toma la forma

$$u_\tau = u_{zz} - cu_z + f(u), \quad (7)$$

por lo tanto, las ondas viajeras son soluciones estacionarias de la ecuación (7). La linealización de (7) alrededor de la onda  $\varphi$  está dada por

$$u_t = u_{zz} - cu_z + uf'(\varphi). \quad (8)$$

(notemos que en (8) se ha intercambiado  $\tau$  por  $t$ ). El lado derecho de (8) define el operador lineal

$$\mathcal{L}u = u_{zz} - cu_z + uf'(\varphi). \quad (9)$$

Al buscar soluciones de (8) con la forma  $u(z, t) = v(z) \exp(\lambda t)$ , es decir, buscamos soluciones mediante separación de variables, llegamos al problema espectral

$$\mathcal{L}v = \lambda v. \quad (10)$$

Como  $v(z)$  es una función acotada, entonces si  $\text{Re } \lambda < 0$ ,

$$u(z, t) \rightarrow 0 \quad \text{si } t \rightarrow \infty.$$

Este comportamiento motiva la siguiente definición:

**Definición 0.1** (*D. Henry, [8]*) *Se dice que la onda viajera  $\varphi$  es espectralmente estable si existe  $\gamma > 0$  tal que el operador  $\mathcal{L}$  tiene la descomposición espectral*

$$\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda \leq -\gamma\}.$$

En este trabajo de tesis desarrollaremos las herramientas para estudiar la descomposición espectral del operador (9) y determinar cuando la onda viajera  $\varphi(z)$  es espectralmente estable. La tesis se encuentra organizada de la siguiente manera:

- El capítulo 1 es una breve recopilación de ecuaciones diferenciales ordinarias y elementos de análisis funcional que serán utilizados en este trabajo. En particular, se aborda el concepto de operadores de Fredholm, se hace una descomposición del espectro de un operador,  $\sigma(\mathcal{L})$ , en el espectro puntual y esencial. Al final del capítulo se enuncia el Teorema del espectro esencial de Weyl (Teorema 1.5) que jugará un rol fundamental en el capítulo 2.
- En el capítulo 2 se desarrollan las herramientas necesarias para caracterizar el espectro de operadores diferenciales asociados a linealizaciones alrededor de ondas viajeras. A través de perturbaciones relativamente compactas del operador  $\mathcal{L}$  se caracteriza su espectro esencial (Teorema 2.5) y sus fronteras (fronteras de Fredholm). Se reduce el problema de encontrar el espectro esencial al problema de calcular el índice de Morse para ciertas matrices.

- En el capítulo 3 definiremos la noción de ondas viajeras para ecuaciones de reacción difusión escalares, demostraremos su existencia y unicidad para los casos en que  $f(u)$  es monoestable (ecuación de Fisher-KPP) y biestable. Aplicaremos los resultados del capítulo 2 para dar la descomposición espectral del operador (9). En el teorema 3.2 se establece la localización del espectro puntual del operador  $\mathcal{L}$ .
- En el capítulo 4 se extiende la noción de soluciones en forma de ondas viajeras en el caso de frentes planos para ecuaciones de reacción difusión en varias dimensiones espaciales.
- En el capítulo 5 se realizan simulaciones numéricas usando el método de diferencias finitas para obtener soluciones de la ecuación (1).



---

# Preliminares y Notación

---

En el presente capítulo exponemos de una manera breve algunos resultados de ecuaciones diferenciales ordinarias, análisis funcional y espacios de Sobolev que serán utilizados a lo largo del presente trabajo. El lector puede encontrar una explicación más formal y profunda de estos resultados en los libros de Taylor [22], Brezis [2], Kato [10], Birman [1], Perko [19] y Hartman [7].

## 1.1. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Consideremos el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\partial_x \mathbf{y} = \mathbf{A}(x, \lambda) \mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(x_0, \lambda) = \mathbf{y}_0(\lambda), \quad (1.1)$$

donde  $\mathbf{A}(x, \lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $\lambda \in \mathbb{C}^m$  representa un parámetro asociado con el sistema. En esta sección enunciaremos resultados básicos concernientes a la existencia y unicidad de soluciones de (1.1) (para una demostración de estos resultados puede consultarse [7] y [19]).

**Lema 1.1** *Supongamos que para  $\lambda$  fijo, la matriz  $\mathbf{A}(x, \lambda)$  es continua en  $x$  sobre el intervalo  $I = (a, b)$ . Entonces para cada  $x_0 \in I$  y  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{C}^n$  existe una única solución a (1.1). Más aún, la solución es suave en  $x$  y  $\lambda$ .*

A continuación presentamos algunas definiciones que serán útiles.

**Definición 1.1** *Para cada matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  asociamos las siguientes estructuras: El espectro estable y espacio propio estable son definidos como*

$$\sigma^s(\mathbf{A}) := \{\mu \in \sigma(\mathbf{A}) \mid \operatorname{Re} \mu < 0\}, \quad \mathbb{E}^s := \bigoplus \{\mathbb{E}_{\mu_j} \mid \mu_j \in \sigma^s(\mathbf{A})\},$$

*el espectro central y el subespacio central se describen como*

$$\sigma^c(\mathbf{A}) := \{\mu \in \sigma(\mathbf{A}) \mid \operatorname{Re} \mu = 0\}, \quad \mathbb{E}^c := \bigoplus \{\mathbb{E}_{\mu_j} \mid \mu_j \in \sigma^c(\mathbf{A})\},$$

*el espectro inestable y el espacio propio inestable están dados por*

$$\sigma^u(\mathbf{A}) := \{\mu \in \sigma(\mathbf{A}) \mid \operatorname{Re} \mu > 0\}, \quad \mathbb{E}^u := \bigoplus \{\mathbb{E}_{\mu_j} \mid \mu_j \in \sigma^u(\mathbf{A})\}.$$

**Definición 1.2** Las cotas superiores de los espectros estables e inestables son denotadas por

$$\sigma_M^{s,u} := \text{máx} \{ \text{Re } \mu \mid \mu \in \sigma^{s,u}(\mathbf{A}) \},$$

y su correspondiente cota inferior

$$\sigma_m^{s,u} := \text{mín} \{ \text{Re } \mu \mid \mu \in \sigma^{s,u}(\mathbf{A}) \}.$$

Siempre se tiene el orden  $\sigma_m^s \leq \sigma_M^s < 0 < \sigma_m^u \leq \sigma_M^u$ .

**Definición 1.3** Sea  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces definimos la matriz exponencial  $\exp(\mathbf{A}x)$  como

$$\exp(\mathbf{A}x) := \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{A}^j \frac{x^j}{j!}.$$

El siguiente teorema será imprescindible en el capítulo 2, ya que nos ayudará a establecer cotas para soluciones de cierto sistema de ecuaciones diferenciales.

**Teorema 1.2** Para cada matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y para todo  $\epsilon > 0$  existen constantes  $m, M \geq 1$ , dependientes de  $\epsilon$  tal que para todo  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{E}^s$ ,

$$\begin{aligned} m \exp(\sigma_m^s x) \|\mathbf{y}_0\| &\leq \|\exp(\mathbf{A}x)\mathbf{y}_0\| \leq M \exp((\sigma_M^s + \epsilon)x) \|\mathbf{y}_0\|, & x > 0 \\ m \exp(\sigma_M^s x) \|\mathbf{y}_0\| &\leq \|\exp(\mathbf{A}x)\mathbf{y}_0\| \leq M \exp((\sigma_m^s + \epsilon)x) \|\mathbf{y}_0\|, & x < 0, \end{aligned}$$

y para todo  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{E}^u$ ,

$$\begin{aligned} m \exp(\sigma_m^u x) \|\mathbf{y}_0\| &\leq \|\exp(\mathbf{A}x)\mathbf{y}_0\| \leq M \exp((\sigma_M^u + \epsilon)x) \|\mathbf{y}_0\|, & x > 0 \\ m \exp(\sigma_M^u x) \|\mathbf{y}_0\| &\leq \|\exp(\mathbf{A}x)\mathbf{y}_0\| \leq M \exp((\sigma_m^u + \epsilon)x) \|\mathbf{y}_0\|, & x < 0, \end{aligned}$$

Más aún, existe  $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  con  $0 \leq k \leq n - 1$  tal que para todo  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{E}^c$ ,

$$m \|\mathbf{y}_0\| \leq \|\exp(\mathbf{A}x)\mathbf{y}_0\| \leq M(1 + \|x\|^k) \|\mathbf{y}_0\|, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

## 1.2. Elementos de Análisis Funcional

### 1.2.1. Espacios de Sobolev

La teoría de espacios de Sobolev es la base para estudiar la existencia y unicidad de soluciones (en el sentido débil) de ecuaciones diferenciales parciales. En esta sección, discutiremos de una manera breve la definición de estos espacios.

Consideremos  $p \geq 1$  y  $u : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ ; definimos la norma  $L^p$  de la función  $u$  como

$$\|u\|_p := \left( \int_{\mathbb{R}} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

La norma  $L^\infty$  está dada por

$$\|u\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x)|.$$



Para cualquier  $p \geq 1$  el espacio de Banach  $L^p(\mathbb{R})$  se define mediante el conjunto

$$L^p(\mathbb{R}) := \left\{ u \mid \|u\|_p < \infty \right\}.$$

Para funciones diferenciables definimos la norma  $W^{k,p}$  por

$$\|u\|_{W^{k,p}} := \left( \sum_{j=0}^k \|\partial_x^j u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

y el espacio asociado

$$W^{k,p} := \{ u \mid \|u\|_{W^{k,p}} < \infty \}.$$

Los espacios  $W^{k,p}$  son conocidos como *espacios de Sobolev*. El espacio  $H^k := W^{k,2}$  será usado con frecuencia a través del texto; en particular, destacamos que  $H^0(\mathbb{R}) = L^2(\mathbb{R})$ . Consideremos el producto interno

$$\langle f, g \rangle := \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{g(x)} dx,$$

donde la barra denota el complejo conjugado. Los espacios  $H^k(\mathbb{R})$  con el producto interior previo son espacios de Hilbert [12], y la norma es inducida por el producto interno es

$$\|u\|_{H^k}^2 = \sum_{j=0}^k \langle \partial_x^j u, \partial_x^j u \rangle.$$

La desigualdad de Young establece que para  $a, b \in \mathbb{R}$  y para cualesquiera  $p, q \geq 1$  exponentes conjugados

$$|ab| \leq \frac{|a|^p}{p} + \frac{|b|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (1.2)$$

La desigualdad de Young es usada para demostrar la desigualdad de Hölder, la cual establece que para  $p, q$  como en (1.2), se satisface

$$|\langle f, g \rangle| \leq \|f\|_p \|g\|_q. \quad (1.3)$$

La convolución de  $f$  y  $g$  está definida por

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)dy, \quad (1.4)$$

y para todo  $p, q, r \geq 1$  existe  $c > 0$  tal que se satisface la desigualdad de convolución

$$\|f * g\|_r \leq c \|f\|_p \|g\|_q, \quad 1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}. \quad (1.5)$$

Los espacios  $H^l(\mathbb{R}) \subset H^k(\mathbb{R})$  son densos para  $l > k$ , es decir, para cada  $u \in H^k(\mathbb{R})$  existe una sucesión  $\{u_j\} \subset H^l(\mathbb{R})$  tal que  $\|u_j - u\|_{H^k} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Por otra parte, si  $I \subset \mathbb{R}$  es compacto, entonces el encaje de  $H^l(I)$  en  $H^k(I)$  para  $k > l + \frac{1}{2}$  es compacto; esto es, sucesiones acotadas en  $H^k(I)$  tienen subsucesiones convergentes en  $H^l(I)$ . Este resultado es útil para demostrar que un operador lineal es compacto.

Para  $\mathbf{G} \in L^2(\mathbb{R})^{k \times l}$ , definimos el operador tensorial  $\otimes \mathbf{G} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto \mathbb{R}^{k \times l}$  como

$$[\otimes \mathbf{G} \cdot h]_{ij} = \langle g_{ij}, h \rangle. \quad (1.6)$$

Si  $\mathbf{F} \in L^2(\mathbb{R})^{j \times k}$ , entonces el producto tensorial  $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G}$  es un mapeo de rango finito que toma  $h \in L^2(\mathbb{R})$  a  $\mathbf{F} \otimes \mathbf{G} \cdot h \in L^2(\mathbb{R})^{j \times m}$  a través de la multiplicación usual de matrices de  $\mathbf{F}$  y  $\otimes \mathbf{G} \cdot h$ .

### 1.3. Operadores Cerrados y Acotados

En esta sección revisaremos ideas asociadas con operadores lineales actuando en espacios de Banach, para más detalles se puede consultar [2] y [1]. Sean  $X$  y  $Y$  dos espacios de Banach con normas  $\|\cdot\|_X$  y  $\|\cdot\|_Y$  respectivamente, y supongamos que  $Y \subset X$  es denso, es decir,  $\overline{Y} = X$ , por ejemplo  $X = L^2(\mathbb{R})$  y  $Y = H^k(\mathbb{R})$  para algún  $k \geq 1$ . Consideremos operadores lineales  $\mathcal{L}$ , con  $Y = D(\mathcal{L})$ , el dominio de  $\mathcal{L}$ , denso en  $X$  y  $\mathcal{L} : Y \mapsto X$ . El kernel y el rango del operador  $\mathcal{L}$  están dados por

$$\begin{aligned}\ker(\mathcal{L}) &:= \{u \in Y \mid \mathcal{L}u = 0\}, \\ \mathcal{R}(\mathcal{L}) &:= \{\mathcal{L}u \mid u \in D(\mathcal{L})\},\end{aligned}$$

respectivamente. Diremos que un operador lineal es cerrado si para cualquier sucesión  $\{u_j\} \subset Y$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|u_j - u\|_X = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathcal{L}u_j - v\|_X = 0,$$

entonces tenemos que  $u \in Y$  y  $\mathcal{L}u = v$ . Esto es equivalente a decir que el dominio  $D(\mathcal{L})$  es completo, equipado con la norma de la gráfica de  $\mathcal{L}$ ,

$$\|u\|_{\mathcal{G}(\mathcal{L})} := \|u\|_X + \|\mathcal{L}u\|_X.$$

Diremos que un operador es acotado de  $Y$  a  $X$  si

$$\sup \{\|\mathcal{L}u\|_X \mid u \in Y, \|u\|_Y = 1\} < \infty.$$

Denotaremos el espacio de operadores lineales acotados de  $Y$  a  $X$  como  $\mathcal{B}(Y, X)$  equipado con la norma

$$\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{B}(Y, X)} := \sup_{\|u\|_Y \neq 0} \frac{\|\mathcal{L}u\|_X}{\|u\|_Y}.$$

Si  $X = Y$  entonces el espacio es denotado por  $\mathcal{B}(X)$  y la norma inducida por  $\mathcal{L}$  como  $\|\mathcal{L}\|_{\mathcal{B}(X)}$  o por  $\|\mathcal{L}\|$  si el contexto es suficientemente claro. Diremos que un operador acotado  $\mathcal{L}$  es compacto si y sólo si para toda sucesión débilmente convergente  $\{u_j\} \in D(\mathcal{L})$ , la sucesión  $\{\mathcal{L}u_j\}$  es convergente. La suma de un operador cerrado y un operador acotado es un operador cerrado; sin embargo, si dos operadores cerrados tienen el mismo dominio, entonces su suma no necesariamente es un operador cerrado. Si  $\mathcal{L}$  es un operador cerrado con  $Y = X$ , entonces  $\mathcal{L}$  es un operador acotado. Si para cada sucesión  $\{u_j\} \subset Y$  la sucesión  $\{\mathcal{L}u_j\} \subset X$  tiene una subsucesión convergente, entonces se dice que el operador  $\mathcal{L}$  es compacto. Un operador compacto es acotado; más aún, la suma de dos operadores compactos es compacto y la composición de un operador compacto y un operador acotado es compacto (para más detalles, consulte [1]).

#### 1.3.1. Resolvente y Espectro

El conjunto resolvente de  $\mathcal{L}$ ,  $\rho(\mathcal{L})$ , es el conjunto de números complejos  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que

- a)  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es invertible,
- b)  $(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1}$  es un operador lineal acotado.

En este contexto  $\mathcal{I} : X \mapsto X$  es el operador identidad, es decir,  $\mathcal{I}u = u$ . Para  $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$  el operador  $(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1}$  es conocido como el operador resolvente de  $\mathcal{L}$ . El espectro de  $\mathcal{L}$  es el complemento del conjunto resolvente, es decir,

$$\sigma(\mathcal{L}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{L}).$$

Un número complejo  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$  es llamado un valor propio si el  $\ker(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}) \neq \{0\}$ . Si  $\mathcal{L}$  es un operador cerrado, entonces  $\sigma(\mathcal{L})$  es un conjunto cerrado. Si  $\mathcal{L}$  es un operador acotado, entonces  $\sigma(\mathcal{L})$  es un conjunto cerrado, acotado y no vacío (para una demostración formal de este enunciado puede consultarse [1]).

Supongamos que  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$  es un valor propio. La dimensión de  $\ker(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})$  es conocida como la multiplicidad geométrica del valor propio, y es denotada por  $m_g(\lambda)$ . Si  $m_g(\lambda) = 1$ , entonces el valor propio es llamado geoméricamente simple. Si el valor propio es aislado, entonces la multiplicidad algebraica del valor propio, expresada como  $m_a(\lambda)$ , es la dimensión del subespacio maximal  $Y_\lambda \subset Y$ , para el cual se satisface:

- a)  $Y_\lambda$  es invariante bajo  $\mathcal{L}$ , es decir, si  $u_\lambda \in Y_\lambda$ , entonces  $\mathcal{L}u_\lambda \in Y_\lambda$ .
- b)  $\sigma(\mathcal{L}|_{Y_\lambda}) = \{\lambda\}$ .

Si  $m_a(\lambda) = 1$ , entonces el valor propio es llamado algebraicamente simple, o simple. Siempre se satisface la desigualdad  $m_a(\lambda) \geq m_g(\lambda)$ . Un valor propio es llamado semi simple si  $m_a(\lambda) = m_g(\lambda)$ . Si  $\mathcal{L}$  es un operador compacto cuyo dominio  $Y$  es separable, es decir, existe un conjunto denso numerable, entonces

- a)  $0 \in \sigma(\mathcal{L})$ ,
- b) Si  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$  con  $\lambda \neq 0$ , entonces  $\lambda$  es aislado y  $m_a(\lambda) < \infty$ ,
- c)  $\sigma(\mathcal{L})$  es un conjunto contable, y el único posible punto de acumulación es  $\lambda = 0$ .

Sea  $\lambda$  es un valor propio aislado, y consideremos  $C \subset \mathbb{C}$  una curva simple cerrada, orientada positivamente que encierra a  $\lambda$ , que no interseca al espectro de  $\mathcal{L}$  y cuyo interior no contiene más elementos de  $\sigma(\mathcal{L})$ . El proyector espectral  $P(\lambda) : X \mapsto Y_\lambda$  se define mediante la fórmula integral de Dunford (en los libros de [22] y [10] se discute ampliamente este proyector):

$$P(\lambda) := \frac{1}{2\pi} \oint_C (\zeta\mathcal{I} - \mathcal{L})^{-1} d\zeta. \quad (1.7)$$

El operador  $P(\lambda)$  conmuta con  $\mathcal{L}$ , es decir,  $P(\lambda)\mathcal{L} = \mathcal{L}P(\lambda)$ ; más aún,  $P(\lambda)^2 := P(\lambda)P(\lambda) = P(\lambda)$ . Más importante, el rango de  $P(\lambda)$  es el subespacio  $\mathcal{L}$ -invariante  $Y_\lambda$  y  $\mathcal{L}|_{Y_\lambda} = \mathcal{L}P(\lambda)$ .

Un operador lineal  $\mathcal{L} : Y \mapsto X$  tiene resolvente compacto si

- a)  $\rho(\mathcal{L}) \neq \emptyset$ ,
- b) para algún  $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$  el operador resolvente  $(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1} : X \mapsto Y \subset X$  es compacto en  $\mathcal{B}(X, Y)$ .

Si  $(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1}$  es un operador compacto para algún  $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$ , entonces es compacto para todo  $\lambda \in \rho(\mathcal{L})$ . Si  $\mathcal{L}$  es un operador con resolvente compacto, entonces  $\sigma(\mathcal{L})$  es un conjunto contable de valores propios aislados con multiplicidad algebraica finita cuyo único posible punto de acumulación es  $\lambda = \infty$ .

### 1.3.2. Operadores Adjuntos y Fredholm

Supongamos que  $X$  es un espacio de Hilbert equipado con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y que  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset X \mapsto X$  es un operador cerrado cuyo dominio es denso. El dominio  $D(\mathcal{L}^a)$ , del operador adjunto,  $\mathcal{L}^a$ , es el conjunto de todos los  $v \in X$  para los cuales el funcional lineal

$$u \mapsto \langle \mathcal{L}u, v \rangle,$$

es continuo en la norma inducida por el producto interno. Del teorema de representación de Riesz deducimos que existe un único  $w \in X$  tal que

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, w \rangle.$$

Para tal  $v \in D(\mathcal{L}^a)$  el operador adjunto es definido por el mapeo  $\mathcal{L}^a v = w$ ; esto es, el operador adjunto es el único operador que satisface

$$\langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}^a v \rangle,$$

para todos  $u \in X$  y  $v \in D(\mathcal{L}^a)$ . El operador adjunto también es cerrado, y su dominio es denso en  $X$ . Por ejemplo, considere el operador diferencial de segundo orden

$$\mathcal{L} := \partial_x^2 + a_1(x)\partial_x + a_0(x) : H^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}),$$

cuyos coeficientes son suaves y uniformemente acotados. Integrando por partes tenemos que el operador adjunto está dado por

$$\mathcal{L}^a = \partial_x^2 - \partial_x[a_1(x)\cdot] + a_0(x) : H^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R}).$$

El conjunto resolvente y el espectro de un operador y de su adjunto se relacionan por

$$\rho(\mathcal{L}^a) = \overline{\rho(\mathcal{L})}, \quad \sigma(\mathcal{L}^a) = \overline{\sigma(\mathcal{L})},$$

y el operador resolvente está vinculado a través de

$$(\mathcal{L}^a - \bar{\lambda}\mathcal{I})^{-1} = \overline{(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1}}.$$

En particular, esta identidad implica que si  $\mathcal{L}$  tiene resolvente compacto, entonces también lo tiene  $\mathcal{L}^a$ . Un operador  $\mathcal{L}$  se dice autoadjunto si  $D(\mathcal{L}) = D(\mathcal{L}^a)$  y  $\mathcal{L}u = \mathcal{L}^a u$  para todo  $u \in D(\mathcal{L})$ . Para operadores autoadjuntos se tiene que  $\sigma(\mathcal{L}) \subset \mathbb{R}$ , y todos los valores propios son semi simples, es decir,  $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ . El operador  $\mathcal{L}$  es un operador de Fredholm si

- a)  $\ker(\mathcal{L})$  es finito dimensional,
- b)  $\mathcal{R}(\mathcal{L})$  es cerrado con codimensión finita.

Los índices de Fredholm de un operador de Fredholm están definidos por

$$\text{índ}(\mathcal{L}) = \dim[\ker(\mathcal{L})] - \text{codim}[\mathcal{R}(\mathcal{L})].$$

El operador  $\mathcal{L}$  es Fredholm si y sólo si  $\mathcal{L}^a$  es Fredholm, y los índices se relacionan por

$$\text{índ}(\mathcal{L}) = -\text{índ}(\mathcal{L}^a).$$

Si  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L})$  es un valor propio aislado con  $m_a(\lambda) < \infty$ , entonces  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es un operador de Fredholm con índice 0. Es fácil demostrar que el rango de  $\mathcal{L}$  debe ser ortogonal al kernel de  $\mathcal{L}^a$ ; en efecto, si  $v \in \ker(\mathcal{L}^a)$  y  $\mathcal{L}u = f$  entonces

$$\langle f, v \rangle = \langle \mathcal{L}u, v \rangle = \langle u, \mathcal{L}^a v \rangle = 0.$$

La suficiencia de esta condición a veces es llamada alternativa de Fredholm:

**Teorema 1.3** (Alternativa de Fredholm) *Suponga que  $X$  es un espacio de Hilbert con producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , y  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset X \mapsto X$  es un operador de Fredholm cerrado con dominio  $D(\mathcal{L})$  denso en  $X$ . Para  $f \in X$  el problema no homogéneo  $\mathcal{L}u = f$  tiene solución  $u \in D(\mathcal{L})$  si y sólo si  $f \in \ker(\mathcal{L}^a)^\perp$ ; en otras palabras,*

$$\mathcal{R}(\mathcal{L}) = \ker(\mathcal{L}^a)^\perp.$$

Más aún, se satisface que

$$\dim[\ker(\mathcal{L})] - \dim[\ker(\mathcal{L}^a)] = \text{índ}(\mathcal{L}).$$

Para cualquier operador de Fredholm el espacio  $X$  tiene la siguiente descomposición

$$X = \mathcal{R}(\mathcal{L}) \oplus \ker(\mathcal{L}^a).$$

Si además  $\text{índ}(\mathcal{L}) = 0$ , entonces  $\dim[\ker(\mathcal{L})] = \dim[\ker(\mathcal{L}^a)]$  en cuyo caso  $\mathcal{L}$  tiene kernel no trivial o el operador es uno a uno y sobre. Sin embargo, si  $\text{índ}(\mathcal{L}) \neq 0$ , entonces o bien  $\mathcal{L}$  tiene kernel no trivial, en cuyo caso  $\mathcal{L}$  no puede ser uno a uno, o  $\mathcal{L}^a$  tiene kernel no trivial, en cuyo caso  $\mathcal{L}$  no puede ser sobre. En ambos casos  $\mathcal{L}$  no puede ser invertible.

**Ejemplo 1.4** *El ejemplo clásico de un operador de Fredholm con índice no nulo es el operador desplazamiento. Sea  $\{e_j\}_{j=0}^\infty$  una base ortonormal de un espacio de Hilbert  $X$  separable. El operador desplazamiento derecho es definido en los elementos de la base como*

$$S e_j = e_{j+1}, \quad j \geq 0,$$

y en el resto de elementos de  $X$  por linealidad. El operador adjunto de  $S$  es el desplazamiento izquierdo

$$S^a e_j = e_{j-1}, \quad j \geq 1,$$

y  $S^a e_0 = 0$ . El operador  $S$  tiene kernel no trivial y es uno a uno, pero su rango tiene codimensión uno, generado por  $e_0$ , de modo que  $\text{índ}(S) = 0 - 1 = -1$ . Inversamente,  $S^a$  es sobre pero, como es requerido por la alternativa de Fredholm, tiene un kernel no trivial unidimensional generado por  $e_0$ . Tenemos que  $\text{índ}(S^a) = 1$ .

De esta discusión observamos que si el índice de Fredholm es distinto de cero, entonces no se espera tener invertibilidad, mientras que si el índice de Fredholm es cero, entonces la invertibilidad se sigue si  $\mathcal{L}$  tiene kernel trivial. Estas observaciones motivan la siguiente clasificación del espectro de un operador.

**Definición 1.4** *Sea  $X$  un espacio de Banach y sea  $\mathcal{L} : D(\mathcal{L}) \subset X \mapsto X$  un operador cerrado con dominio  $D(\mathcal{L})$  denso en  $X$ . El espectro de  $\mathcal{L}$  es separado en los dos siguientes conjuntos:*

a) El espectro esencial de un operador de Fredholm  $\mathcal{L}$ ,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ , es el conjunto de todos los  $\lambda \in \mathbb{C}$  tales que se cumple alguna de las siguientes condiciones

- $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  no es Fredholm, o
- $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es Fredholm, pero  $\text{ind}(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}) \neq 0$ .

b) El espectro puntual de un operador de Fredholm  $\mathcal{L}$  es el conjunto definido por

$$\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{ind}(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}) = 0, \text{ pero } \mathcal{L} - \lambda\mathcal{I} \text{ no es invertible}\}.$$

Los elementos del espectro puntual son llamados valores propios de  $\mathcal{L}$ . La definición anterior tiene la ventaja que el espectro puntual satisface que  $\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) = \sigma(\mathcal{L}) \setminus \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  y además, consiste de valores propios aislados de  $\mathcal{L}$  (consulte [9]).

La localización del espectro esencial requiere el cálculo del índice de Fredholm de un operador. Emplearemos dos técnicas para lograr este propósito. La primer técnica es perturbar un operador conocido.

**Definición 1.5** El operador  $\mathcal{L}$  es una perturbación relativamente compacta de  $\mathcal{L}_0$  si  $(\mathcal{L}_0 - \mathcal{L})(\mathcal{L}_0 - \lambda\mathcal{I})^{-1} : X \mapsto X$  es compacto para algún  $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_0)$ .

Existen varias versiones de teoremas de estabilidad para perturbaciones relativamente compactas de operadores de Fredholm. Estas son frecuentemente referidas al Teorema del espectro esencial de Weyl.

**Teorema 1.5** (Espectro esencial de Weyl) Sean  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_0$  operadores lineales cerrados en un espacio de Banach  $X$ . Si  $\mathcal{L}$  es una perturbación relativamente compacta de  $\mathcal{L}_0$ , entonces se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) El operador  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es Fredholm si y sólo si  $\mathcal{L}_0 - \lambda\mathcal{I}$  es Fredholm.
- b)  $\text{ind}(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}) = \text{ind}(\mathcal{L}_0 - \lambda\mathcal{I})$ .
- c) Los operadores  $\mathcal{L}$  y  $\mathcal{L}_0$  tienen el mismo espectro esencial, es decir  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_0)$ .

La segunda técnica para calcular el índice de Fredholm es demostrar que el operador tiene resolvente compacto. En este segundo caso el operador no puede tener espectro esencial, es decir,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L})$ , por lo tanto, el espectro consiste de valores propios aislados de  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 1.6** Si  $X$  es un espacio de Banach,  $Y \subset X$  es denso, y  $\mathcal{L} : Y \mapsto X$  es un operador lineal cerrado Fredholm con resolvente compacto, entonces  $\text{ind}(\mathcal{L}) = 0$ .

Para una demostración de los teoremas 1.5 y 1.6 puede consultarse [10].

---

# Teoría Espectral de Operadores Diferenciales

---

En este capítulo desarrollaremos la teoría necesaria para caracterizar el comportamiento espectral de los operadores diferenciales asociados a la linealización de ecuaciones diferenciales parciales. En la sección 2.1 estudiaremos el espectro esencial a través de las fronteras de Fredholm y la sección 2.2 está dedicada al estudio del espectro puntual de operadores diferenciales de segundo grado a través de la teoría de Sturm-Liouville.

## 2.1. Espectro Esencial

### 2.1.1. Espectro Esencial: Frentes y Pulsos

El prototipo usual de un operador diferencial obtenido de la linealización de una ecuación diferencial parcial no lineal alrededor de una orbita heteroclínica (frente) u homoclínica (pulso) es de la forma

$$\mathcal{L}p := \partial_x^n p + a_{n-1}(x)\partial_x^{n-1}p + \dots + a_1(x)\partial_x p + a_0(x)p, \quad (2.1)$$

donde  $n \geq 1$  es el orden del operador y  $x \in \mathbb{R}$  es la variable espacial.

**Definición 2.1** *El operador  $\mathcal{L}$  se dice exponencialmente asintótico si los coeficientes  $a_0, \dots, a_{n-1}$  son funciones suaves, real valuadas que decaen exponencialmente a constantes, es decir, existe  $r > 0$  tal que*

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(r|x|)|a_j(x) - a_j^\pm| = 0.$$

**Lema 2.1** *Si los coeficientes  $\{a_j\}_{j=0}^{n-1}$  pertenecen a  $W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , entonces el operador  $\mathcal{L} : H^n(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  es cerrado.*

**Demostración:** Supongamos que  $\{u_j\}_{j=0}^\infty \subset H^n(\mathbb{R})$  converge a  $u$  en  $L^2(\mathbb{R})$ , y  $v_j := \mathcal{L}u_j$  converge a  $v$  en  $L^2(\mathbb{R})$ . Debemos demostrar que  $u \in H^n(\mathbb{R})$  y  $\mathcal{L}u = v$ . Usando la transformada de Fourier tenemos que para todo  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  el operador  $\partial_x^n - i^{n-1}\lambda$  es invertible con la propiedad

$$\|(\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}u\|_{H^{s+n-1}} \leq C \|u\|_{H^s},$$

para  $s \geq 0$  y  $C$  independiente de  $u$ , más aún, su resolvente satisface el límite

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|(\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{B}(H^s, H^{s+n-1})} = 0.$$

Al restar  $i^{n-1}\lambda u_j$  de ambos lados de la definición de  $v_j$  y aplicando la inversa del operador  $\partial_x^n - i^{n-1}\lambda$  obtenemos

$$u_k + (\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}\mathcal{L}_{n-1}u_j = (\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}(v_j - i^{n-1}\lambda u_j),$$

donde  $\mathcal{L}_{n-1} := \mathcal{L} - \partial_x^n$  es de orden  $n - 1$ , en particular,  $\mathcal{L}_{n-1} \in \mathcal{B}(H^n, H^1)$ . Por lo tanto, el operador  $B := (\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}\mathcal{L}_{n-1} : H^n(\mathbb{R}) \mapsto H^n(\mathbb{R})$  es acotado y su norma inducida tiende a cero cuando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Sea  $\lambda \in \mathbb{R}^+$  fijo suficientemente grande, el operador  $\mathcal{I} + B : H^n(\mathbb{R}) \mapsto H^n(\mathbb{R})$  es invertible. Por lo tanto, la sucesión  $\{u_j\}$  es de Cauchy en  $H^n(\mathbb{R})$ , y tomando el límite cuando  $j \rightarrow \infty$  se obtiene

$$u = (\mathcal{I} + B)^{-1}(\partial_x^n - i^{n-1}\lambda)^{-1}(v - i^{n-1}\lambda u) \in H^n(\mathbb{R}).$$

Al desarrollar la igualdad anterior obtenemos que  $\mathcal{L}u = v$ . □

En el teorema 2.5 se demostrará que un operador exponencialmente asintótico  $\mathcal{L}$  es una perturbación relativamente compacta de un operador con coeficientes constantes a trozos, y así, usando el teorema 1.5, tenemos que los dos operadores tienen el mismo espectro esencial. Llamaremos al operador asociado con coeficientes constantes a trozos como *operador asintótico*.

**Definición 2.2** *El operador asintótico  $\mathcal{L}_\infty$  asociado con el operador exponencialmente asintótico  $\mathcal{L}$  de 2.1 está definido por*

$$\mathcal{L}_\infty p := \partial_x^n p + a_{n-1}^\infty \partial_x^{n-1} p + \dots + a_1^\infty \partial_x p + a_0^\infty p, \quad (2.2)$$

donde los coeficientes  $a_j^\infty$  son funciones constantes a trozos obtenidas reemplazando  $a_j$  con su valores límites en cada sección de la línea real. Específicamente, para  $j = 0, \dots, n - 1$ ,

$$a_j^\infty(x) = \begin{cases} a_j^- & : x < 0 \\ a_j^+ & : x \geq 0 \end{cases}.$$

Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$ , entonces  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_\infty)$  precisamente cuando el problema no homogéneo

$$(\mathcal{L}_\infty - \lambda)p = f \quad (2.3)$$

deja de tener una inversa acotada de  $L^2(\mathbb{R})$  en  $H^n(\mathbb{R})$ . Separemos la inversión del operador  $\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}$  en dos pasos. El primer paso consiste en construir soluciones  $p$ , que pueden no pertenecer a  $H^n(\mathbb{R})$ , reescribiendo el problema espectral como un problema de valores iniciales para un sistema de primer orden de ecuaciones diferenciales ordinarias. La existencia de tales soluciones es garantizada por el lema 1.1, del teorema 1.2 sabemos que crecen exponencialmente cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . El segundo paso es determinar, en términos de  $\lambda$  y los coeficientes  $a_j^\infty$ , si existe una elección de valores iniciales para los cuales la correspondiente solución  $p$  decaiga exponencialmente cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , teniendo así que  $p \in H^n(\mathbb{R})$ . Este proceso reemplaza la cuestión de solubilidad de (2.3) con una cuestión acerca de generar los espacios estables e inestables asociados con el problema asintótico. En muchas situaciones esta es la clave para caracterizar el espectro esencial de un operador diferencial asintótico.



Sean  $\mathbf{Y} = (p, \partial_x p, \dots, \partial_x^{n-1} p)^T$  y  $\mathbf{F} = (0, 0, \dots, f)^T$ , así se tiene que  $p$  es solución de (2.3) (sin la condición de que  $p \in H^n(\mathbb{R})$ ) si y sólo si  $\mathbf{Y}$  es solución del sistema de primer orden

$$\partial_x \mathbf{Y} = \mathbf{A}_\infty(x, \lambda) \mathbf{Y} + \mathbf{F}, \quad (2.4)$$

donde la matriz  $\mathbf{A}_\infty(x, \lambda) \in \mathbb{C}^{n \times n}$  es constante a trozos en  $x$ , y es definida via las matrices asintóticas

$$\mathbf{A}_\infty(x, \lambda) = \begin{cases} \mathbf{A}_-(\lambda) & : x < 0 \\ \mathbf{A}_+(\lambda) & : x \geq 0 \end{cases} \quad \mathbf{A}_\pm(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \lambda - a_0^\pm & -a_1^\pm & \dots & -a_{n-2}^\pm & -a_{n-1}^\pm \end{pmatrix}.$$

**Definición 2.3** *Los valores propios*

$$\left\{ \mu_j^\pm = \mu_j^\pm(\lambda) \mid j = 1, \dots, n \right\}$$

de  $\mathbf{A}_\pm(\lambda)$  son llamados valores propios espaciales. El parámetro  $\lambda$  es conocido como el parámetro espectral temporal.

Primero demostraremos que si las matrices asintóticas son hiperbólicas, es decir, sus valores propios tienen parte real distinta de cero ( $\sigma(\mathbf{A}_\pm(\lambda)) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ ), entonces el operador asintótico  $\mathcal{L}_\infty$  es Fredholm; en particular demostraremos que  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})$  es cerrado, y que tanto  $\dim[\ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})]$  y  $\text{codim}[\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})]$  son finitas. Nuestra construcción nos permitirá caracterizar explícitamente el índice de Fredholm en términos de los subespacios inestables de  $\mathbf{A}_\pm(\lambda)$ . Para facilitar la presentación suprimiremos la dependencia de  $\lambda$  de las matrices  $\mathbf{A}_\pm$ .

En el caso en que las matrices  $\mathbf{A}_\pm$  sean hiperbólicas, sus espacios propios estables e inestables (definición 1.1) admiten la descomposición

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E}_-^s \oplus \mathbb{E}_-^u = \mathbb{E}_+^s \oplus \mathbb{E}_+^u.$$

Sean  $P_\pm^s : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{E}_\pm^s$  y  $P_\pm^u : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{E}_\pm^u$  los proyectores espectrales sobre los subespacios estables e inestables de  $\mathbf{A}_\pm$  definidos de acuerdo a la integral de Dunford sobre  $\sigma^{s,u}(\mathbf{A}_\pm)$ , respectivamente (definición (1.7)). Los proyectores cumplen las siguientes propiedades para todo  $v \in \mathbb{C}^n$ ,

- $v = P_\pm^s v + P_\pm^u v$ ; más aún, si  $v \in \mathbb{E}_\pm^{u,s}$ , entonces  $P_\pm^{u,s} v = v$ ,
- $\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^s v = P_\pm^s \exp(\mathbf{A}_\pm x) v$  y  $\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^u v = P_\pm^u \exp(\mathbf{A}_\pm x) v$ ,
- del teorema 1.2 existen constantes  $C, \sigma > 0$  tales que

$$\begin{aligned} \|\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^u v\| &\leq C \exp(\sigma x) \|v\|, & x < 0 & \quad \|\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^s v\| \leq C \exp(-\sigma x) \|v\|, & x > 0, \\ \|\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^s v\| &\geq C \exp(-\sigma x) \|v\|, & x < 0 & \quad \|\exp(\mathbf{A}_\pm x) P_\pm^u v\| \geq C \exp(\sigma x) \|v\|, & x > 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Las cotas en (2.5) implican que  $\exp(\mathbf{A}_{\pm}x)v$  decaen exponencialmente en norma cuando  $x \rightarrow -\infty$  sólo si  $v \in \mathbb{E}_{\pm}^u$ , y crecen exponencialmente en otro caso. De manera análoga,  $\exp(\mathbf{A}_{\pm}x)v$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$  sólo si  $v \in \mathbb{E}_{\pm}^s$ . Esta dicotomía exponencial nos dirige al siguiente análisis.

Sea  $\mathbf{F} \in L^2(\mathbb{R})^n$ , esto es, cada uno de los  $n$  componentes de  $\mathbf{F}$  esta en  $L^2(\mathbb{R})$ , entonces para cada condición inicial  $\mathbf{y}_0$  el sistema (2.4) tiene una solución definida en todo  $\mathbb{R}$ . La pregunta es, ¿Existe una condición inicial  $\mathbf{y}_0$ , para la cual la correspondiente solución decaiga en norma cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ ? Más aún, ¿esta condición inicial es única? Ya que la elección de la condición inicial nos permite  $n$  grados de libertad, esperamos que la existencia y unicidad se desprenda cuando las condiciones de decaimiento impongan  $n$  condiciones linealmente independientes.

Para caracterizar estas restricciones, empezamos con  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{C}^n$  arbitrario, y resolvamos el sistema asintótico no homogéneo (2.4) para  $x < 0$ . Por la fórmula de variación de parámetros, obtenemos

$$\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_-x)\mathbf{y}_0 + \int_0^x \exp(\mathbf{A}_-(x-t))\mathbf{F}(t)dt, \quad x \leq 0.$$

Sin embargo,  $v = P_-^u v + P_-^s v$ , por lo que podemos descomponer a  $\mathbf{F}$  y  $\mathbf{y}_0$  en sus componentes estables e inestables, y reescribir la solución como

$$\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^u\mathbf{y}_0 + \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^s\mathbf{y}_0 + \int_0^x \exp(\mathbf{A}_-(x-t))P_-^u\mathbf{F}(t)dt + \int_0^x \exp(\mathbf{A}_-(x-t))P_-^s\mathbf{F}(t)dt.$$

Al introducir el vector

$$\mathbf{y}_0^- := \mathbf{y}_0 - \int_{-\infty}^0 \exp(\mathbf{A}_-(x-t))P_-^s\mathbf{F}(t)dt,$$

el cual garantiza que  $\mathbf{Y}(0) = \mathbf{y}_0$ , y al cambiar los limites de integración, obtenemos

$$\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^u\mathbf{y}_0^- + \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^s\mathbf{y}_0^- - \int_x^0 \exp(\mathbf{A}_-(x-t))P_-^u\mathbf{F}(t)dt + \int_{-\infty}^x \exp(\mathbf{A}_-(x-t))P_-^s\mathbf{F}(t)dt.$$

Al considerar la función de Green (matricial) para el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias  $\mathbf{A}_-$

$$\mathbf{G}_-(z) = \begin{cases} -\exp(\mathbf{A}_-z)P_-^u, & z < 0 \\ \exp(\mathbf{A}_-z)P_-^s, & z > 0 \end{cases},$$

una vez más, podemos reescribir la solución en términos de la convolución de la matriz  $\mathbf{G}_-$  con el vector  $\mathbf{F}_-$ ,

$$\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^u\mathbf{y}_0^- + \exp(\mathbf{A}_-x)P_-^s\mathbf{y}_0^- + (\mathbf{G}_- * \mathbf{F}_-)(x), \quad x \leq 0, \quad (2.6)$$

donde

$$\mathbf{F}_-(t) = \begin{cases} \mathbf{F}(t), & t \leq 0 \\ \mathbf{0}, & t > 0 \end{cases}.$$

Por la desigualdad de la convolución (1.5) vemos que para  $\mathbf{F} \in L^2(\mathbb{R})^n$  el término no homogéneo es acotado en  $L^q(\mathbb{R})$  para cualquier  $q \in [2, \infty)$ ,

$$\|\mathbf{G}_- * \mathbf{F}_-\|_q \leq C \|\mathbf{G}_-\|_r \|\mathbf{F}_-\|_2 \leq C \|\mathbf{G}_-\|_r \|\mathbf{F}\|_2, \quad r = \frac{2q}{q+2}. \quad (2.7)$$

Aquí hemos usado que  $\|\mathbf{F}_-\|_2 \leq \|\mathbf{F}\|_2$ , y  $\|\mathbf{G}_-\|_r$  es acotada debido al decaimiento exponencial de  $\mathbf{G}_-(z)$  cuando  $z \rightarrow \pm\infty$ . Ya que el término  $P_-^s \mathbf{y}_0^-$  en (2.6) crece exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$ , y el término  $P_-^u \mathbf{y}_0^-$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$ , observamos que  $\mathbf{Y}$  está en  $L^2(\mathbb{R}^-)^n$  si y sólo si  $P_-^s \mathbf{y}_0^- = \mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{E}_-^u$ . De otra manera,  $\mathbf{Y}$  crece exponencialmente cuando  $x \rightarrow -\infty$ . Un análisis similar para  $x \geq 0$  conduce a la expresión

$$\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_+ x) P_+^u \mathbf{y}_0^+ + \exp(\mathbf{A}_+ x) P_+^s \mathbf{y}_0^+ + (\mathbf{G}_+ * \mathbf{F}_+)(x), \quad x \geq 0, \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{G}_+$  y  $\mathbf{F}_+$  son las correspondientes funciones de Green y el término no homogéneo para  $x > 0$ . Concluimos que  $\mathbf{Y}$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R}^+)^n$  si y sólo si  $P_+^u \mathbf{y}_0^+ = \mathbf{0}$ , es decir,  $\mathbf{y}_0^+ \in \mathbb{E}_+^s$ , y en otro caso  $\mathbf{Y}$  crece exponencialmente cuando  $x \rightarrow \infty$ .

La función definida por

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{cases} \exp(\mathbf{A}_- x) \mathbf{y}_0^- + (\mathbf{G}_- * \mathbf{F}_-)(x), & x < 0 \\ \exp(\mathbf{A}_+ x) \mathbf{y}_0^+ + (\mathbf{G}_+ * \mathbf{F}_+)(x), & x > 0, \end{cases}$$

es solución de (2.4) en los intervalos  $(-\infty, 0)$  y  $(0, \infty)$ . Más significativamente, hemos establecido que  $\mathbf{Y}(x)$  decae exponencialmente cuando  $x \rightarrow \pm\infty$  si y sólo si  $\mathbf{y}_0^- \in \mathbb{E}_-^u$  y  $\mathbf{y}_0^+ \in \mathbb{E}_+^s$ . Sin embargo,  $\mathbf{Y}$  es solución de (2.4) sobre todos los reales si y sólo si es continua en  $x = 0$ , esto es, si y sólo si  $\mathbf{Y}(0^+) = \mathbf{Y}(0^-)$ . Recordando la notación tensorial (1.6) y la forma de  $\mathbf{F}$  dada en (2.4), la condición de continuidad puede ser expresada como

$$\mathbf{y}_0^- - \mathbf{y}_0^+ = (\mathbf{G}_+ * \mathbf{F}_+ - \mathbf{G}_- * \mathbf{F}_-)|_{x=0} = \otimes \mathbf{G} \cdot f, \quad (2.9)$$

sujeta a las restricciones  $\mathbf{y}_0^- \in \mathbb{E}_-^u$  y  $\mathbf{y}_0^+ \in \mathbb{E}_+^s$ . Aquí  $\mathbf{G}(x)$  es el vector dado por la última columna de la matriz  $\exp(-\mathbf{A}_- x) P_-^s$  para  $x \leq 0$  y la última columna de  $\exp(-\mathbf{A}_+ x) P_+^u$  para  $x \geq 0$ . En particular, las entradas de  $\mathbf{G}$  decaen exponencialmente cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ . Para  $f \in L^2(\mathbb{R})$  fija, el término  $\otimes \mathbf{G} \cdot f$  es un vector conocido de  $\mathbb{C}^n$ . Sean  $n_-^u$  y  $n_+^s$  determinadas por

$$n_-^u = \dim[\mathbb{E}_-^u], \quad n_+^s = \dim[\mathbb{E}_+^s],$$

y consideremos  $\{v_1^u, \dots, v_{n_-^u}^u\}$  y  $\{v_1^s, \dots, v_{n_+^s}^s\}$  bases de  $\mathbb{E}_-^u$  y  $\mathbb{E}_+^s$  respectivamente. Si construimos la matriz

$$\mathbf{M} = \{v_1^u, \dots, v_{n_-^u}^u, v_1^s, \dots, v_{n_+^s}^s\}, \quad (2.10)$$

el sistema (2.9) puede ser expresado en términos de  $\alpha \in \mathbb{C}^{n_-^u + n_+^s}$  como

$$\mathbf{M}\alpha = \otimes \mathbf{G} \cdot f. \quad (2.11)$$

Si la matriz  $\mathbf{M}$  es cuadrada, es decir,  $n_-^u + n_+^s = n$  y  $\det(\mathbf{M}) \neq 0$ , entonces existe una única solución al sistema lineal (2.11). En este caso

$$|\alpha| \leq C |\det \mathbf{M}|^{-1} \|\mathbf{G}\|_2 \|f\|_2,$$

de modo que podemos acotar cada uno de los términos del lado derecho de (2.8) en términos de  $\|f\|_2$ . En otras palabras, existe una constante  $C = C(\lambda) > 0$  tal que  $\|\mathbf{Y}\|_2 \leq C \|f\|_2$ . Regresando a la variable

original  $p$ , la condición (2.11) hace que las primeras  $n - 1$  derivadas de  $p$  sean continuas en  $x = 0$ , y el estimado para  $\mathbf{Y}$  se convierte en

$$\|p\|_{H^n} \leq C(\lambda) \|f\|_2, \quad (2.12)$$

que es precisamente la invertibilidad de  $\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}$ .

La existencia de  $\mathbf{M}^{-1}$  es equivalente a las siguientes condiciones

$$\dim[\mathbb{E}_-^u] + \dim[\mathbb{E}_+^s] = n, \quad \dim[\mathbb{E}_-^u \cap \mathbb{E}_+^s] = 0, \quad (2.13)$$

lo cual puede ser convenientemente establecido como

$$\mathbb{C}^n = \mathbb{E}_-^u \oplus \mathbb{E}_+^s.$$

**Lema 2.2** *Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  fijo. Si las matrices asintóticas  $\mathbf{A}_\pm$  son hiperbólicas, entonces  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  es cerrado; más aún,*

$$\dim[\ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})] = \dim[\ker(\mathbf{M}(\lambda))], \quad \text{codim}[\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})] = \text{codim}[\mathcal{R}(\mathbf{M}(\lambda))],$$

donde  $\mathbf{M}(\lambda)$  es la matriz definida en (2.10). Por otra parte,  $\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}$  es Fredholm con índice

$$\text{índ}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}) = n_-^u(\lambda) + n_+^s(\lambda) - n, \quad (2.14)$$

donde  $n_\pm^{s,u} := \dim[\mathbb{E}_\pm^{s,u}(\lambda)]$  son las dimensiones de los subespacios estables e inestables de  $\mathbf{A}_\pm(\lambda)$ .

**Demostración:** Para establecer la igualdad entre las dimensiones de los núcleos, observamos que de (2.11) y de la discusión anterior,  $f \in \mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  si y sólo si  $\otimes \mathbf{G} \cdot f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}(\lambda))$ . Como  $\mathcal{R}(\mathbf{M}(\lambda))$  es cerrado y  $f \mapsto \otimes \mathbf{G} \cdot f$  es continuo en  $L^2(\mathbb{R})$ , se sigue que  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  es cerrado. Para cada  $p \in \ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  existe una correspondencia uno a uno con  $\alpha \in \ker(\mathbf{M}(\lambda))$ . En efecto, si  $\dim \ker(\mathbf{M}(\lambda)) = \dim(\mathbb{E}_-^u \cap \mathbb{E}_+^s) = k$ , y consideremos  $\{\mathbf{y}_{01}, \dots, \mathbf{y}_{0k}\}$  una base de  $\mathbb{E}_-^u \cap \mathbb{E}_+^s$ . Para  $j = 1, \dots, k$ , la solución  $\mathbf{y}_j$  de (2.4) con  $f \equiv 0$  satisface  $\mathbf{y}_j(0) = \mathbf{y}_{j0}$  pertenece a  $L^2(\mathbb{R})^n$ . Por lo tanto, de la definición de  $\mathbf{y}_{j0}$  que su primer componente  $p_j$ , esta en  $L^2(\mathbb{R})^n$  y  $p$  satisface  $(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})p = 0$ .

Para demostrar las igualdades de las codimensiones, consideremos el caso  $\text{codim}[\mathcal{R}(\mathbf{M}(\lambda))] = 1$ , en cuyo caso  $\ker(\mathbf{M}(\lambda)) = \text{span}\{v\}$  para algún vector  $v$  con  $\|v\| = 1$ . De la teoría de Fredholm para matrices (para más detalles puede consultarse [20]) sabemos que  $\otimes \mathbf{G} \cdot f \in \mathcal{R}(\mathbf{M}(\lambda))$  si y sólo si  $v \perp \otimes \mathbf{G} \cdot f$ ; equivalentemente, si y sólo si  $v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f = 0$ . Sea  $\varsigma \in L^2(\mathbb{R})$  tal que  $\otimes \mathbf{G} \cdot \varsigma = v$ . Entonces, el proyector con codimensión uno sobre  $\mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  está dado por

$$\pi_\infty f := f - \varsigma(v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f).$$

En efecto,  $\pi_\infty f \in \mathcal{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I})$  ya que

$$\begin{aligned} v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot \pi_\infty f &= v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f - v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot \varsigma(v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f) \\ &= (v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f)(1 - v^\perp v) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cada  $f \in L^2(\mathbb{R})$  tiene la descomposición  $f = \pi_\infty f + \beta z$ , donde  $\beta := v^\perp \otimes \mathbf{G} \cdot f \in \mathbb{C}$ . Como  $\pi_\infty f \in \mathbf{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})$ , entonces

$$L^2(\mathbb{R}) = \mathbf{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}) \oplus \text{span}\{z\},$$

que es precisamente la definición de que  $\text{codim}[\mathbf{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})] = 1 = \text{codim}[\mathbf{R}(\mathbf{M}(\lambda))]$ .

Ahora podemos expresar el índice de Fredholm de  $\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}$  como la diferencia de  $\dim[\ker(\mathbf{M}(\lambda))] - \text{codim}[\mathbf{R}(\mathbf{M}(\lambda))]$ . Sin embargo, de un resultado de álgebra lineal sabemos que para cualquier matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{k+l} : \mathbb{C}^l \mapsto \mathbb{C}^k$ ,

$$\dim[\ker(\mathbf{A})] - \text{codim}[\mathbf{R}(\mathbf{A})] = l - k.$$

Como la matriz  $\mathbf{M}(\lambda) \in \mathbb{C}^{n \times (n_- + n_+^*)}$ , se sigue inmediatamente la igualdad (2.14).  $\square$

El caso en que las matrices asintóticas sean no hiperbólicas siempre produce un espectro esencial. Este es un caso particular del Teorema de Palmer; consulte [18] y [21].

**Lema 2.3** *Sea  $\lambda \in \mathbb{C}$  fijo. Si cualquiera de las matrices asintóticas  $\mathbf{A}_\pm(\lambda)$  es no hiperbólica, entonces el rango del operador  $\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I} : H^n(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  no es cerrado, y el operador no es Fredholm. En particular,  $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\infty)$ .*

**Demostración:** Hagamos un argumento por contradicción. Si el rango  $R_\lambda := \mathbf{R}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})$  es cerrado, entonces la restricción

$$\mathcal{L}_r := (\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})|_{\ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})} : \ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})^\perp \mapsto R_\lambda$$

tiene núcleo no trivial. Como el operador restringido es cerrado, su índice de Fredholm es cero. Usando el teorema de la gráfica cerrada se sigue que  $\mathcal{L}_r$  posee inversa acotada en  $R_\lambda$ . Sin embargo, bajo la hipótesis de que una de las matrices no es hiperbólica, construiremos una sucesión de Weyl  $\{u_j\} \subset \ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})^\perp$  con  $\|u_j\|_{H^n} = 1$  tal que  $\|\mathcal{L}_r u_j\|_{L^2} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . La existencia de tal sucesión de Weyl demuestra que la norma inducida por  $\mathcal{L}_r^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto H^n(\mathbb{R})$  es infinita, contradiciendo la invertibilidad de  $\mathcal{L}_r$ . Por tanto, el rango  $R_\lambda$  no puede ser cerrado.

Supongamos que  $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_-$  y definamos  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_\pm$ . La suposición de que  $\mathbf{A}_0$  es no hiperbólica significa que tiene espacio centro no trivial  $\mathbb{E}_0^c$ . Sea  $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{E}_0^c$  fijo, y consideremos  $\mathbf{Y}(x) = \exp(\mathbf{A}_0 x) \mathbf{y}_0$ . La norma  $\|\mathbf{Y}(x)\|$  de la solución  $\mathbf{Y}(x)$  es acotada lejos del origen para toda  $x \in \mathbb{R}$ . En particular,  $\mathbf{y}$  es periódica en  $x$  con algún periodo  $T > 0$ . La primer componente de  $\mathbf{Y}$ ,  $y_1$  satisface  $\|y_1\|_2 = \infty$ ; más aún,  $(\mathcal{L} - \lambda \mathcal{I})y_1 = 0$ . Para cada  $j \in \mathbb{N}$  sea  $\chi_j(x)$  la función de corte

$$\chi_j(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-jT, jT] \\ 0, & x \in (-\infty, -jT - 1] \cup [jT + 1, \infty) \end{cases}$$

y para la cual todas las derivadas son uniformemente acotadas, independientes de  $j$ . Para todo  $j \in \mathbb{N}$  definamos la sucesión de funciones

$$u_j(x) = \frac{1}{\|\chi_j y_1\|_{H^n}} \chi(x) y_1(x),$$

a fin de que  $\|u_j\|_{H^n} = 1$  para todo  $j \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, como  $y_1$  es una función suave y fija, y el divisor  $\|\chi_j y_1\|_{H^n} \rightarrow \infty$  cuando  $j \rightarrow \infty$ , se sigue que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \partial_x^k u_j \right\|_{\infty} = 0, \quad k = 0, 1, \dots, n;$$

esto es,  $\|u_j\|_{W^{n,\infty}} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$ . Sea  $K_j$  el conjunto en el cual la función de corte es no constante, es decir,

$$K_j := [-jT - 1, -jT] \cup [jT, jT + 1].$$

Como  $(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})u_j = 0$  para  $x \notin K_j$ , se sigue que

$$\|(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})u_j\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})u_j\|_{L^2(K_j)} \leq \|(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})u_j\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \sqrt{|K_j|}.$$

Sin embargo, existe una constante  $c > 0$  tal que  $\|(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})v\|_{L^\infty} \leq c \|v\|_{W^{n,\infty}}$ , para todo  $v \in W^{n,\infty}(\mathbb{R})$ . Ya que  $\|u_j\|_{W^{n,\infty}} \rightarrow 0$  cuando  $j \rightarrow \infty$  y  $|K_j|$  es uniformemente acotado, podemos concluir que  $\|(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})u_j\| \rightarrow 0$  si  $j \rightarrow \infty$ . Más aún, en  $L^2(\mathbb{R})$  el núcleo de  $\mathcal{L} - \lambda \mathcal{I}$  es trivial; ya que  $\mathbf{A}_\pm = \mathbf{A}_0$  el operador tiene coeficientes constantes y así la única solución uniformemente acotada de  $(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})p = 0$  es periódica. Consecuentemente,  $\{u_j\} \in \ker(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I})^\perp = L^2(\mathbb{R})$  y  $\{u_j\}$  es una sucesión de Weyl.  $\square$

El espectro esencial de  $\mathcal{L}_\infty$  puede ser completamente caracterizado en términos de los valores propios espaciales de sus matrices asintóticas. Una manera natural de hacer esto es a través de los índices de Morse de las matrices asintóticas:

**Definición 2.4** *Los índices de Morse para una matriz constante  $\mathbf{A}$ , denotados por  $i(\mathbf{A})$ , es la dimensión del subespacio inestables asociado a  $\mathbf{A}$ , es decir,*

$$i(\mathbf{A}) = \dim[E^u],$$

denotaremos el índice de Morse para las matrices asintóticas en (2.4) por

$$i_\pm(\lambda) := i(\mathbf{A}_\pm(\lambda)). \quad (2.15)$$

Resumiremos nuestros resultados en el siguiente lema

**Lema 2.4** *Para  $\lambda \in \mathbb{C}$ , el operador asintótico  $\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}$  es Fredholm si y sólo si las matrices asintóticas  $\mathbf{A}_\pm(\lambda)$  son hiperbólicas. El conjunto resolvente de  $\mathcal{L}_\infty$  es comprendido precisamente por aquellos  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales  $\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}$  es Fredholm y  $\mathbb{C}^n = \mathbb{E}_-^u(\lambda) \oplus \mathbb{E}_+^s(\lambda)$ , donde  $\mathbb{E}_\pm^{s,u}(\lambda)$  son los espacios propios estable e inestable de las matrices asintóticas. Más aún, para  $\lambda$  en el conjunto resolvente existe  $C = C(\lambda) > 0$  tal que*

$$\|\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}\|_{H^n} \leq C(\lambda) \|f\|_2.$$

Para aquellos  $\lambda \in \mathbb{C}$  para los cuales el operador es Fredholm, el índice de Fredholm es igual a la diferencia de los índices de Morse, (2.15), de las matrices asintóticas, es decir,

$$\text{índ}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}) = i_-(\lambda) - i_+(\lambda). \quad (2.16)$$

En particular, podemos caracterizar el espectro esencial de  $\mathcal{L}_\infty$  como

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid i_-(\lambda) \neq i_+(\lambda)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim \mathbb{E}^c(\mathbf{A}_\pm(\lambda)) \neq 0\}.$$

**Demostración:** Para caracterizar el índice de Fredholm en términos de los índices de Morse, observamos que si las matrices son hiperbólicas, entonces  $n_{\pm}^s(\lambda) = \dim[\mathbb{E}_{\pm}^s(\lambda)] = n - i_{\pm}(\lambda)$ . Esta observación nos lleva a la igualdad

$$n_-^u(\lambda) + n_+^s(\lambda) = n + i_-(\lambda) - i_+(\lambda).$$

La identidad (2.14) implica la igualdad (2.16). Resulta que  $\lambda \in \sigma(\mathcal{L}_{\infty})$  si y sólo si  $i_-(\lambda) \neq i_+(\lambda)$  o las matrices asintóticas son no hiperbólicas.  $\square$

Completaremos esta sección con una caracterización del espectro esencial del operador exponencialmente asintótico  $\mathcal{L}$  introducido en (2.1).

**Teorema 2.5** *Suponga que el operador dado en (2.1) es exponencialmente asintótico con coeficientes en  $H^1(\mathbb{R})$ . Entonces  $\mathcal{L}$  es una perturbación relativamente compacta del operador asintótico  $\mathcal{L}_{\infty}$  definido en (2.2). En particular,*

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid i_-(\lambda) \neq i_+(\lambda)\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \dim \mathbb{E}^c(\mathbf{A}_{\pm}(\lambda)) \neq 0\}.$$

Por otro lado, para  $\lambda \notin \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ , es decir,  $\dim[\ker(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})] \neq 0$  o existe  $C > 0$  tal que

$$\|(\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I})^{-1}f\|_{H^n(\mathbb{R})} \leq C \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (2.17)$$

**Demostración:** Sólo consideraremos el caso en el que los coeficientes  $a_j(x)$  de  $\mathcal{L}$  son constantes excepto en un intervalo compacto  $I \subset \mathbb{R}$ . Para demostrar que  $\mathcal{L}$  es una perturbación relativamente compacta de  $\mathcal{L}_{\infty}$ , fijaremos  $\lambda \in \rho(\mathcal{L}_{\infty})$  y observemos que la derivada de orden  $n$  del operador  $\mathcal{L}_{\infty} - \mathcal{L}$  se cancela, y dejando de lado la discontinuidad en  $x = 0$ , vemos que el operador  $\mathcal{L}_{\infty} - \mathcal{L}$  es un mapeo a trozos de  $H^n(\mathbb{R})$  en  $H^1(\mathbb{R}^+)$  y  $H^1(\mathbb{R}^-)$ . Usando el lema 2.4 se tiene que el operador  $(\mathcal{L}_{\infty} - \lambda\mathcal{I})^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto H^n(\mathbb{R})$  es continuo, por lo tanto, la composición  $(\mathcal{L}_{\infty} - \mathcal{L})(\mathcal{L}_{\infty} - \lambda\mathcal{I})^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto H^1(\mathbb{R}^+) \oplus H^1(\mathbb{R}^-)$  es continua. Como los coeficientes  $a_j(x)$  son constantes fuera de  $I \subset \mathbb{R}$ , el operador puede ser visto como  $(\mathcal{L}_{\infty} - \mathcal{L})(\mathcal{L}_{\infty} - \lambda\mathcal{I})^{-1} : L^2(\mathbb{R}) \mapsto H^1(I_+) \oplus H^1(I_-)$  donde  $I_- = I \cap (-\infty, 0]$  y  $I_+ = I \cap [0, \infty)$ . En particular el mapeo toma conjuntos acotados en conjuntos acotados. Ya que conjuntos de  $H^1(I_{\pm})$  son equicontinuos, y  $I_{\pm}$  son compactos, se sigue del Teorema de Arzelá-Ascoli que el operador  $(\mathcal{L}_{\infty} - \mathcal{L})(\mathcal{L}_{\infty} - \lambda\mathcal{I})^{-1}$  manda conjuntos acotados de  $L^2(\mathbb{R})$  en conjuntos precompactos, y de esta manera, se sigue que el operador es compacto. La caracterización del espectro esencial de  $\mathcal{L}$  se sigue del Teorema 1.5 y el lema 2.4. El enunciado (2.17) se sigue inmediatamente de la alternativa de Fredholm ya que  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I} : H^n(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  es un operador de Fredholm con índice cero.  $\square$

Ahora que hemos caracterizado por completo el espectro esencial, nos dedicaremos a estudiar sus fronteras. Como hemos visto en la prueba del lema 2.4, la frontera es determinada para aquellos valores de  $\lambda$  para los cuales la matriz asintótica pierde su hiperbolicidad, es decir, cuando los valores propios de tal matriz son puramente imaginarios. Los valores propios espaciales,  $\mu = \mu(\lambda)$ , son los ceros del polinomio característico de  $\mathbf{A}_{\pm}(\lambda)$ ,

$$d_{\pm}(\mu, \lambda) := \det(\mathbf{A}_{\pm} - \mu\mathbf{I}_n) = \mu^n + a_{n-1}^{\pm}\mu^{n-1} + \dots + a_1^{\pm}\mu + a_0^{\pm} - \lambda. \quad (2.18)$$

La ecuación  $d_{\pm}(\mu, \lambda) = 0$  es conocida como la relación de dispersión (compleja) para el operador  $\mathcal{L}$ .

Los valores propios espaciales dependen continuamente del parámetro  $\lambda$ ; por lo tanto, el índice de Fredholm puede cambiar sólo cuando existe un valor propio espacial con parte real nula. Las fronteras de Fredholm, denotadas por  $\sigma_F(\mathcal{L})$  son aquellas curvas en el plano complejo para las cuales existe un valor propio espacial con parte real nula, es decir,

$$\sigma_F(\mathcal{L}) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid d_{\pm}(ik, \lambda) = 0, \text{ para algún } k \in \mathbb{R} \}. \quad (2.19)$$

En otras palabras,  $\lambda \in \sigma_F(\mathcal{L})$  cuando uno de los valores propios espaciales satisface  $\mu(\lambda) = ik$  para algún  $k \in \mathbb{R}$ . De la relación de dispersión (2.18) tenemos que las curvas  $\lambda_{\pm}(k)$ , que conforman las fronteras de Fredholm pueden ser convenientemente parametrizadas por el valor  $k$  como

$$\lambda_{\pm}(k) := (ik)^n + a_{n-1}^{\pm}(ik)^{n-1} + \dots + a_1^{\pm}(ik) + a_0^{\pm}, \quad k \in \mathbb{R}. \quad (2.20)$$

En estas curvas las matrices asintóticas pierden la propiedad de hiperbolicidad: las fronteras de Fredholm son fronteras de regiones abiertas en el plano complejo para las cuales el operador  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es Fredholm.

**Teorema 2.6** *Sea  $\mathcal{L}$  un operador exponencialmente asintótico fijo como en (2.11) y sea  $\sigma_F(\mathcal{L})$  las fronteras de Fredholm. Entonces existe un número finito,  $N$ , de conjuntos abiertos, disjuntos y conexos  $S_j \subset \mathbb{C}$  tales que*

$$\mathbb{C} \setminus \sigma_F(\mathcal{L}) = \bigcup_{j=1}^N S_j.$$

*Para cada  $j$  el índice de Fredholm del operador  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  es independiente de  $\lambda \in S_j$ . Cada conjunto  $S_j$  cumple que bien es enteramente contenido en  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$  o pertenece completamente a  $\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) \cup \rho(\mathcal{L})$ . Si las matrices asintóticas son iguales,  $\mathbf{A}_- = \mathbf{A}_+$ , entonces las fronteras de Fredholm coinciden y comprenden todo el espectro esencial, es decir,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \sigma_F(\mathcal{L})$ .*

**Demostración:** Ya que las fronteras de Fredholm son construidas como el conjunto de ceros de polinomios de grado  $n$ , pueden cruzarse a lo más  $n$  veces; así, pueden separar a  $\mathbb{C}$  en un número finito de regiones. Como las matrices  $\mathbf{A}_{\pm}$  son hiperbólicas y los índices de Morse son constantes en cada conjunto  $S_j$ , el índice de Fredholm es o bien cero en todo  $S_j$ , y el conjunto está fuera del espectro esencial, o el índice es distinto de cero y  $S_j \subset \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ . Si las matrices asintóticas son iguales, entonces  $i_+(\lambda) = i_-(\lambda)$  fuera de las fronteras de Fredholm donde el índice de Fredholm es cero. Esto implica que el espectro esencial es precisamente la frontera de Fredholm  $\lambda_0(k) := \lambda_{\pm}(k)$ .  $\square$

La frontera de Fredholm (2.19) está compuesta por las dos curvas solución  $\lambda_{\pm}(k)$ , (2.20), de la relación de dispersión (2.18). Indiquemos las gráficas de las curvas solución por  $\sigma_F(\mathcal{L}_{\pm})$ , respectivamente. Las fronteras de Fredholm son curvas orientadas en el plano complejo por  $k \in \mathbb{R}$ , con la orientación coincidiendo con la dirección de crecimiento de  $k$ . En el momento que  $\lambda$  cruza una frontera de Fredholm que separa los dominios  $S_j$  y  $S_k$ , el índice de Fredholm del operador  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  puede cambiar. En efecto, se puede demostrar que

**Teorema 2.7** *(Teorema 2.3.1, [4]) El índice de Fredholm para el operador  $\mathcal{L} - \lambda\mathcal{I}$  aumentará en uno cuando cruce la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_+)$  de la derecha a la izquierda con respecto a su orientación; y disminuye en uno cuando cruza la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_-)$  de la derecha a la izquierda.*



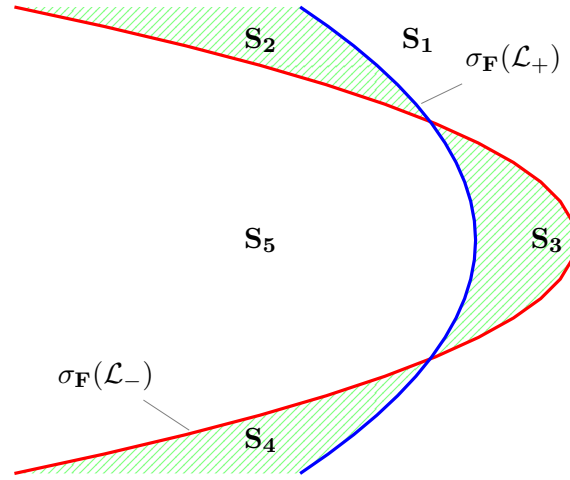


Figura 2.1: Descripción de los conjuntos  $\{S_j\}_{j=1}^N$  del teorema 2.6. En azul las fronteras de Fredholm correspondientes a  $\lambda_+$  y en rojo la correspondiente a  $\lambda_-$ .

## 2.2. Espectro Puntual: Teoría de Sturm-Liouville

Mientras que el espectro esencial de un operador puede ser determinado estudiando perturbaciones relativamente compactas, el espectro puntual puede cambiar bajo esta clase de perturbaciones. En efecto, para clases importantes de operadores diferenciales, se puede decir mucho acerca de la localización del espectro esencial, pero relativamente poco acerca del espectro puntual. Sin embargo, para muchos operadores de segundo grado existen importantes resultados.

### 2.2.1. Operadores de Sturm-Liouville

Un operador de Sturm-Liouville  $\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$  es de la forma

$$\mathcal{L}p := \partial_x^2 p + a_1(x)\partial_x p + a_0(x)p. \quad (2.21)$$

Se satisface que  $\mathcal{L}$  es auto adjunto en el producto interior

$$\langle u, v \rangle_\rho := \int_{\mathbb{R}} u(x)\overline{v(x)}\rho(x)dx, \quad (2.22)$$

donde

$$\rho(x) := \exp\left(\int_0^x a_1(x)dx\right) > 0.$$

El problema de valores propios asociado al operado  $\mathcal{L}$  está dado por

$$\mathcal{L}p = \lambda p. \quad (2.23)$$

Consideremos un operador de Sturm-Liouville actuando en  $H^2(\mathbb{R})$  con coeficientes suaves  $a_0(x)$  y  $a_1(x)$ , que decaen exponencialmente a constantes en  $x = \pm\infty$ , es decir,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(\nu|x|)|a_1(x) - a_1^\pm| = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(\nu|x|)|a_0(x) - a_0^\pm| = 0, \quad (2.24)$$

para algún  $\nu > 0$  y constantes  $a_1^\pm, a_0^\pm \in \mathbb{R}$ . Nos percatamos que la función de peso  $\rho(x)$  tiene el comportamiento asintótico

$$\rho_\pm := \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \exp(-a_1^\pm x) \rho(x). \quad (2.25)$$

Más aún, se satisface el siguiente teorema

**Teorema 2.8** *Considere el problema de valores propios (2.23) en el espacio  $H^2(\mathbb{R})$ , donde los coeficientes satisfacen (2.24). El espectro puntual  $\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L})$  es un subconjunto de  $\mathbb{R}$  que consiste de un número finito, posiblemente cero, de valores propios simples, que pueden ser enumerados en orden estrictamente decreciente*

$$\lambda_0 > \lambda_1 > \dots > \lambda_N > b := \max\{a_0^-, a_0^+\}.$$

Para  $j = 0, \dots, N$  las funciones propias  $p_j(x)$  asociadas al valor propio  $\lambda_j$  pueden ser normalizadas de modo que

- a)  $p_j(x)$  tiene  $j$  ceros simples.
- b) Las funciones propias son ortonormales en el producto interior (2.22).
- c)  $\lambda_0$  es caracterizado por

$$\lambda_0 = \sup_{\|u\|_\rho=1} \langle \mathcal{L}u, u \rangle_\rho,$$

mas aún, el supremo es alcanzado en  $u = p_0$ , que carece de ceros.

# Estabilidad Espectral Unidimensional

En el presente capítulo daremos la definición de ondas viajeras para ecuaciones diferenciales parciales, su existencia, unicidad y comportamiento; centrandó nuestra atención en ecuaciones de reacción difusión. A través de lo planteado en el capítulo anterior estudiaremos el operador  $\mathcal{L}$  asociado a la linealización de estas ecuaciones alrededor de ondas viajeras. Analizaremos el espectro puntual, los índices de Fredholm y determinaremos en que regiones del plano complejo se encuentra el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}$ . Específicamente, en la sección 3.3 daremos una descomposición espectral del operador  $\mathcal{L}$  para la ecuación de reacción difusión biestable; y en la sección 3.4 estudiaremos la ecuación Fisher-KPP que no es espectralmente estable, pero al considerar el problema en un espacio distinto podemos obtener la estabilidad.

## 3.1. Ondas Viajeras y Ecuaciones de Reacción Difusión

Consideremos la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}, \dots\right), \quad (3.1)$$

que puede ser analizada a través del cambio de variable  $u(x, t) = \varphi(z)$ , donde  $z = z(x, t)$  es una función que podemos escoger. De esta manera, la ecuación (3.1) es expresada como

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial t} = F\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}\right)\right], \dots\right) \\ &= F\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dz} \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{d\varphi}{dz} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2, \frac{d\varphi}{dz} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t}\right) + \frac{d^2\varphi}{dz^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right), \dots\right). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para el caso de que  $z = k(x + ct)$ , las derivadas parciales en (3.2) son

$$\frac{\partial z}{\partial t} = kc, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = k, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial t} = \dots = 0.$$

En este caso, a  $\varphi$  se le conoce como onda viajera y corresponde a una transformación lineal a lo largo del eje  $x$  con respecto a  $t$ ;  $k$  y  $c$  son constantes arbitrarias generalmente denominadas *frecuencia de onda* y *velocidad de la onda*, respectivamente. Así, la ecuación (3.2) se reduce a

$$kc \frac{d\varphi}{dz} = F\left(\varphi, k \frac{d\varphi}{dz}, k^2 \frac{d^2\varphi}{dz^2}, k^2 c \frac{d^2\varphi}{dz^2}, k^3 c \frac{d^3\varphi}{dz^3}, \dots\right), \quad (3.3)$$

o en su forma canónica

$$\frac{d\varphi}{dz} = F\left(\varphi, \frac{d\varphi}{dz}, \frac{d^2\varphi}{dz^2}, \frac{d^3\varphi}{dz^3}, \dots\right). \quad (3.4)$$

Observemos que la ecuación (3.4) es una ecuación diferencial ordinaria en  $z$ . Aquí reside la ventaja de las soluciones en forma de onda viajera, es decir, una ecuación diferencial parcial se reduce a una ecuación diferencial ordinaria.

En el proceso de solución para la ecuación (3.4) impondremos condiciones para la función  $\varphi$  y su derivadas, usualmente se pide que los límites

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z), \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi'(z), \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi''(z), \dots$$

existan. Estas condiciones y la elección apropiada de  $c$  determinarán cuando podemos obtener una solución en forma de onda viajera para la ecuación (3.1).

A la luz de este análisis podemos decir que las ondas viajeras son soluciones a ecuaciones diferenciales parciales que se mueven a una velocidad constante  $c$  y en el caso en que  $k = 1$  mantiene su forma, en la gráfica 3.1 se aprecia este comportamiento. Observemos que cuando  $c = 0$ , tenemos soluciones estacionarias, es decir, que no cambian con respecto al tiempo.

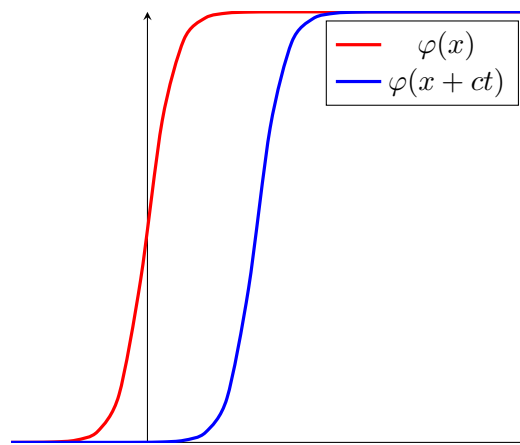


Figura 3.1: Evolución de una onda viajera en el caso de que  $c > 0$ .

Podemos distinguir varias formas de ondas viajeras: Frentes y pulsos son ondas viajeras que asintóticamente se comportan como constantes, es decir, convergen a estados estacionarios, en otras palabras,  $\varphi(z) \rightarrow \varphi_{\pm}$  si  $z \rightarrow \pm\infty$ , en el caso de que  $\varphi_- = \varphi_+$  tenemos una onda viajera tipo pulso, y en caso contrario, un frente. Trenes de onda son ondas viajeras periódicas, es decir, existe  $L \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi(z + L) = \varphi(z)$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ . Ondas homogéneas son estados estacionarios que no dependen de  $z$ , es decir  $\varphi(z) = \varphi_0$ .

**Observación** Notemos que no todas las ecuaciones diferenciales parciales tienen soluciones en forma de onda viajera; en efecto, consideremos la ecuación del calor unidimensional

$$u_t = u_{xx}.$$

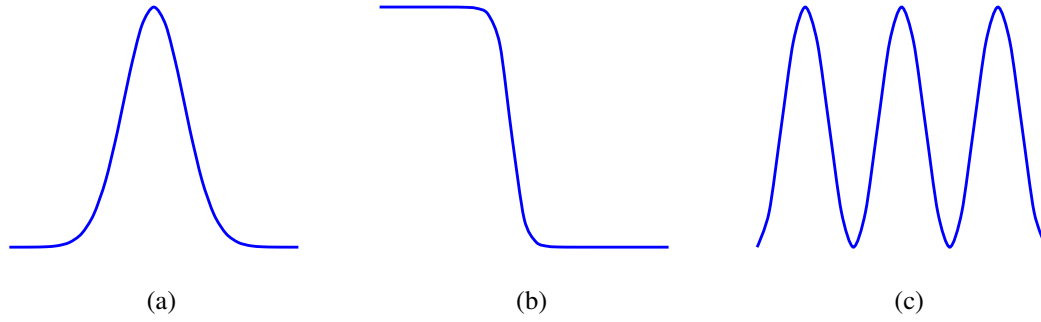


Figura 3.2: Ondas viajeras con distintas formas: Pulso en a), Frente en b), Trenes de onda en c)

Supongamos que existe una solución en forma de onda viajera para la ecuación del calor, es decir, existe  $u(x, t) = \varphi(z)$  no constante con  $z = x + ct$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = \varphi_- \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = \varphi_+. \quad (3.5)$$

Entonces,  $\varphi$  debe satisfacer la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'' - c\varphi' = 0,$$

cuya solución general es

$$\varphi(z) = Ae^{cz} + B, \quad A, B \in \mathbb{R}.$$

Al utilizar las condiciones (3.5), se debe satisfacer

$$\varphi_- = \varphi_+, \quad A = 0 \quad \text{y} \quad B = \varphi_+.$$

Por lo tanto,

$$\varphi(z) = B.$$

En este capítulo estudiaremos la existencia de ondas viajeras para la ecuación de reacción difusión unidimensional

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad (3.6)$$

donde  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  es una función suave y no lineal. La siguiente definición nos presenta la noción de onda viajera para la ecuación (3.6).

**Definición 3.1** Consideremos la ecuación de reacción difusión unidimensional (3.6). Diremos que  $u(x, t) = \varphi(z)$ ,  $z = x + ct$  es una solución en forma de onda viajera de (3.6) si existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que

$$\varphi'' - c\varphi' + f(\varphi) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z) = \varphi_{\pm}, \quad (3.7)$$

donde las primas denotan la derivada con respecto de  $z$  y  $\varphi_{\pm} \in \mathbb{R}$  son tales que  $f(\varphi_{\pm}) = 0$ . En el caso de que  $\varphi_- = \varphi_+$ , se dice que la onda viajera es un pulso y si  $\varphi_- \neq \varphi_+$  diremos que es un frente.

Observemos que si  $\varphi(z)$  es una solución de (3.7), entonces también lo es  $\varphi(z+z_0)$  para  $z_0$  fijo y arbitrario. Por lo tanto, cada solución en forma de onda viajera genera una familia uniparamétrica de soluciones de (3.7), que se obtiene de traslaciones en  $z$ .

Inmediatamente de la definición 3.1 se sigue que las ondas viajeras para la ecuación de reacción difusión (3.6) son orbitas heteroclínicas (frentes) u homoclínicas (pulsos) del sistema

$$\begin{aligned}\varphi' &= \psi \\ \psi' &= c\psi - f(\varphi)\end{aligned}\tag{3.8}$$

con puntos de equilibrio  $(\varphi_-, 0)$  y  $(\varphi_+, 0)$ . El jacobiano general del sistema es

$$\mathcal{J}(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(\varphi) & c \end{pmatrix}.$$

cuyo determinante y traza son

$$\det \mathcal{J} = f'(\varphi), \quad \text{tr } \mathcal{J} = c,\tag{3.9}$$

respectivamente. Por lo tanto, la naturaleza de los puntos de equilibrio será determinada por (3.9) y

$$D(\varphi, \psi) = c^2 - 4f'(\varphi).\tag{3.10}$$

Observemos que directamente de la definición, se tiene que

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi'(z) = 0,\tag{3.11}$$

más aún,  $\varphi''(z) \rightarrow 0$  si  $z \rightarrow \pm\infty$ ; en efecto,

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi''(z) &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \{c\varphi'(z) - f(\varphi(z))\} \\ &= c \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi'(z) - \lim_{z \rightarrow \pm\infty} f(\varphi(z)) \\ &= -f(\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z)) \\ &= -f(\varphi_{\pm}) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Para deducir el signo de  $c$  observemos que al multiplicar (3.7) por  $\varphi'$ , usando (3.11) e integrando de  $z = -\infty$  a  $z = \infty$

$$c \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi'(z)\}^2 dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(\varphi(s)) ds.$$

En otras palabras, si una solución en formas de onda viajera existe, entonces el signo de  $c$  es el mismo signo de la integral de  $f$  entre  $\varphi_-$  y  $\varphi_+$ .

En el sistema coordenado galileano

$$\tau = t, \quad z = x + ct,$$

la ecuación (3.6) se convierte en

$$u_\tau = u_{zz} - cu_z + f(u). \quad (3.12)$$

Observemos que las ondas viajeras son soluciones estacionarias de la ecuación diferencial parcial (3.12). Sin riesgo a confusión, podemos intercambiar  $\tau$  por  $t$ . Al linealizar alrededor de la onda viajera  $\varphi$  tenemos que

$$u_t = u_{zz} - cu_z + uf'(\varphi(z)). \quad (3.13)$$

El lado derecho de la ecuación (3.13) define el operador lineal cerrado y densamente definido  $\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}) \subset L^2(\mathbb{R}) \mapsto L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}u := u_{zz} - cu_z + uf'(\varphi(z)). \quad (3.14)$$

Sea  $\psi = \varphi'$ , al derivar (3.7) observamos que

$$\mathcal{L}\psi = 0, \quad (3.15)$$

es decir,  $\psi$  es función propia con valor propio  $\lambda = 0$ .

Al buscar soluciones de (3.13) con la forma  $u(z, t) = v(z) \exp(\lambda t)$ , es decir, buscamos soluciones mediante separación de variables, así, de manera natural llegamos al problema espectral

$$\mathcal{L}v = \lambda v. \quad (3.16)$$

Como  $v(z)$  es una función acotada, entonces si  $\text{Re } \lambda < 0$ ,

$$u(z, t) \leq |u(z, t)| \leq |v(z)| \exp(t \text{Re } \lambda) \leq K \exp(t \text{Re } \lambda),$$

por lo tanto, si  $\text{Re } \lambda < 0$ , entonces  $u(z, t) \rightarrow 0$  si  $t \rightarrow \infty$ . El análisis anterior nos lleva a la siguiente definición:

**Definición 3.2** (D. Henry, [8]) *Se dice que la onda viajera  $\varphi$  es espectralmente estable si existe  $\gamma > 0$  tal que el operador  $\mathcal{L}$  tiene la descomposición espectral*

$$\sigma(\mathcal{L}) \setminus \{0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda \leq -\gamma\}.$$

Por lo tanto, para determinar la estabilidad espectral de una onda viajeras nos interesa la localización y comportamiento del espectro del operador  $\mathcal{L}$ , para ello utilizaremos los resultados del capítulo anterior. El siguiente teorema nos muestra la localización del espectro puntual para el operador  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 3.2** *Sea  $\lambda \in \sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L})$ , entonces  $\text{Re } \lambda \leq 0$ .*

Para la demostración del teorema anterior requerimos el siguiente lema:

**Lema 3.3** *Sean  $\psi, w \in H^1(\mathbb{R})$ . Entonces*

$$\psi^2 \left\| \frac{d}{dz} \frac{w}{\psi} \right\|^2 = \|w'\|^2 - \psi' \frac{d}{dz} \left( \frac{\|w\|^2}{\psi} \right). \quad (3.17)$$

**Demostración:**

$$\begin{aligned}
\psi^2 \left\| \frac{d}{dz} \frac{w}{\psi} \right\|^2 &= \psi^2 \left\| \frac{\psi w' - w \psi'}{\psi^2} \right\|^2 \\
&= \frac{1}{\psi^2} \|\psi w' - w \psi'\|^2 \\
&= \frac{1}{\psi^2} [\psi w' - w \psi'] [\overline{\psi w' - w \psi'}] \\
&= \frac{1}{\psi^2} [\psi^2 \|w'\|^2 - \psi w' \overline{w \psi'} - w \psi' \overline{\psi w'} + \psi'^2 \|w\|^2] \\
&= \|w'\|^2 - \psi' \left[ \frac{w' \overline{w} + w \overline{\psi'}}{\psi} - \|w\|^2 \frac{\psi'}{\psi^2} \right] \\
&= \|w'\|^2 - \psi' \frac{d}{dz} \left( \frac{\|w\|^2}{\psi} \right).
\end{aligned}$$

□

**Demostración:** (Teorema 3.2) Sea  $w(z)$  la función dada por

$$w(z) = u(z) \exp\left(-\frac{cz}{2}\right),$$

entonces,

$$\begin{aligned}
w' &= \exp\left(-\frac{cz}{2}\right) \left[u' - \frac{cu}{2}\right], \\
w'' &= \exp\left(-\frac{cz}{2}\right) \left[u'' - cu' + \frac{c^2u}{4}\right],
\end{aligned}$$

usando (3.16) se tiene que

$$\begin{aligned}
w'' &= \exp\left(-\frac{cz}{2}\right) \left[-f'(\varphi)u + \lambda u + \frac{c^2u}{4}\right] \\
&= -f'(\varphi)w + \lambda w + \frac{c^2w}{4},
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$w'' + \left(f'(\varphi) - \frac{c^2}{4}\right)w = \lambda w. \quad (3.18)$$

Ya que esto último se cumple para toda función propia  $w$ , en particular se cumple para  $\psi = \varphi'$ , entonces

$$\frac{c^2}{4} + f'(\varphi) = -\frac{\psi''}{\psi}. \quad (3.19)$$

Combinando (4.11) y (3.19) obtenemos que

$$w'' - \frac{\psi''}{\psi}w = \lambda w. \quad (3.20)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3.20) por  $\overline{w}$ , integrando sobre todo  $\mathbb{R}$  y usando el lema 3.3

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\mathbb{R}} \|w\|^2 dz &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \overline{w} w'' - \frac{\psi''}{\psi} \|w\|^2 \right] dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left[ \psi' \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\|w\|^2}{\psi} \right\} - \|w'\|^2 \right] dz \\
&= - \int_{\mathbb{R}} \psi^2 \left\| \frac{d}{dz} \frac{w}{\psi} \right\|^2 dz.
\end{aligned}$$



De lo cual se sigue inmediatamente el resultado. □

Observamos que el operador  $\mathcal{L}$  es exponencialmente asintótico (definición 2.1) con

$$a_1^\pm = -c, \quad a_0^+ = f'(\varphi_+), \quad a_0^- = f'(\varphi_-), \quad (3.21)$$

y el operador asintótico  $\mathcal{L}_\infty$  (definición 2.2) asociado a  $\mathcal{L}$  es

$$\mathcal{L}_\infty = \begin{cases} \mathcal{L}_- & : z < 0 \\ \mathcal{L}_+ & : z > 0 \end{cases},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_- u &= u_{zz} - cu_z u + f'(\varphi_-)u, \\ \mathcal{L}_+ u &= u_{zz} - cu_z u + f'(\varphi_+)u, \end{aligned}$$

para este caso las matrices asintóticas son

$$A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(\varphi_-) & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(\varphi_+) & c \end{pmatrix}, \quad (3.22)$$

y los valores propios espaciales son

$$\begin{aligned} \mu_1^+ &= \frac{c + \sqrt{c^2 - 4(f'(\varphi_+) - \lambda)}}{2}, & \mu_2^+ &= \frac{c - \sqrt{c^2 - 4(f'(\varphi_+) - \lambda)}}{2}, \\ \mu_1^- &= \frac{c + \sqrt{c^2 - 4(f'(\varphi_-) - \lambda)}}{2}, & \mu_2^- &= \frac{c - \sqrt{c^2 - 4(f'(\varphi_-) - \lambda)}}{2}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

con vectores propios asociados  $(1, \mu_{1,2}^\pm)^\top$ .

En el proceso de localizar el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}$ ,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L})$ , será necesario calcular los índices de Morse para las matrices anteriores, es decir, necesitamos determinar el signo de  $\text{Re } \mu_{1,2}^\pm$ .

Las fronteras de Fredholm  $\sigma_F(\mathcal{L}_\pm)$  son las curvas en el plano complejo dadas por

$$\sigma_F(\mathcal{L}_-) = \{ \lambda = -k^2 - cik + f'(\varphi_-) \mid k \in \mathbb{R} \} \quad \text{y} \quad \sigma_F(\mathcal{L}_+) = \{ \lambda = -k^2 - cik + f'(\varphi_+) \mid k \in \mathbb{R} \}.$$

En el caso de que la solución en forma de onda viajera  $\varphi$  sea no estacionaria, es decir,  $c \neq 0$ , entonces

$$\sigma_F(\mathcal{L}_-) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda = f'(\varphi_-) - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \right\}$$

y

$$\sigma_F(\mathcal{L}_+) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \text{Re } \lambda = f'(\varphi_+) - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \right\},$$

que describen parábolas cuyos vértices son  $(f'(\varphi_-), 0)$  y  $(f'(\varphi_+), 0)$ , respectivamente. En la figura 3.3 se muestran estas curvas.

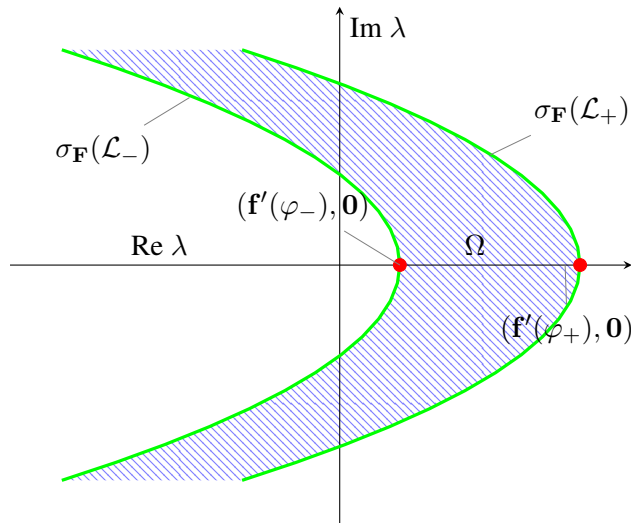


Figura 3.3: Fronteras de Fredholm  $\sigma_F(\mathcal{L}_{\pm})$  en el caso de que  $f'(\varphi_-) < f'(\varphi_+)$ .

Si  $c = 0$ , entonces las fronteras de Fredholm  $\sigma_F(\mathcal{L}_{\pm})$  están completamente contenidas en el eje real y descritas como

$$\sigma_F(\mathcal{L}_-) = \{ \lambda = -k^2 + f'(\varphi_-) \mid k \in \mathbb{R} \}$$

y

$$\sigma_F(\mathcal{L}_+) = \{ \lambda = -k^2 + f'(\varphi_+) \mid k \in \mathbb{R} \}.$$

Sean  $a, b$  definidos como

$$\begin{aligned} a &:= \min\{f'(\varphi_-), f'(\varphi_+)\}, \\ b &:= \max\{f'(\varphi_-), f'(\varphi_+)\}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $c \neq 0$  y consideremos el conjunto

$$\Omega := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid a - \left(\frac{\text{Im } \lambda}{c}\right)^2 \leq \text{Re } \lambda \leq b - \left(\frac{\text{Im } \lambda}{c}\right)^2 \right\}.$$

En los ejemplos que estudiaremos, ayudados con la estructura de la función  $f(u)$ , demostraremos que el conjunto  $\Omega$  coincide con el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}_{\infty}$ . Es decir, demostraremos que  $\text{ind}(\mathcal{L}_{\infty} - \lambda \mathcal{I}) \neq 0$  para  $\lambda \in \Omega$ .

### 3.2. Estabilidad de Ondas Viajeras

Uno de los temas más importantes e interesantes en matemáticas aplicadas es la estabilidad de un estado dado. Por ejemplo, una solución en forma de onda viajera para una ecuación de reacción difusión representa un estado que da lugar a una superficie  $u = \varphi(x + ct)$  definida en el espacio tiempo. Diremos que un estado es *asintóticamente estable* si imponemos una perturbación pequeña en algún tiempo

(digamos, en  $t = 0$ ) que eventualmente decae y el sistema regresa al estado original. Demostraremos que las soluciones por ondas viajeras a ecuaciones de reacción difusión son asintóticamente estables a perturbaciones pequeñas en el sistema coordinado galileano (sistema coordinado para la onda viajera), sujetas a ciertas condiciones.

Las ecuaciones de reacción difusión escritas en el sistema coordinado galileano toman la forma

$$u_t = u_{zz} - cu_z + f(u). \quad (3.24)$$

Hemos obtenido soluciones en forma de onda viajera  $\varphi(z)$  para la ecuación anterior, ahora consideremos soluciones de la forma

$$u(z, t) = \varphi(z) + w(z, t), \quad (3.25)$$

donde  $w(z, t)$  es una perturbación pequeña del estado  $\varphi(z)$ . Supondremos que

$$w(z, t) = 0 \quad \text{cuando} \quad z \rightarrow \pm\infty. \quad (3.26)$$

En la figura 3.4 se ilustra una perturbación de este tipo.

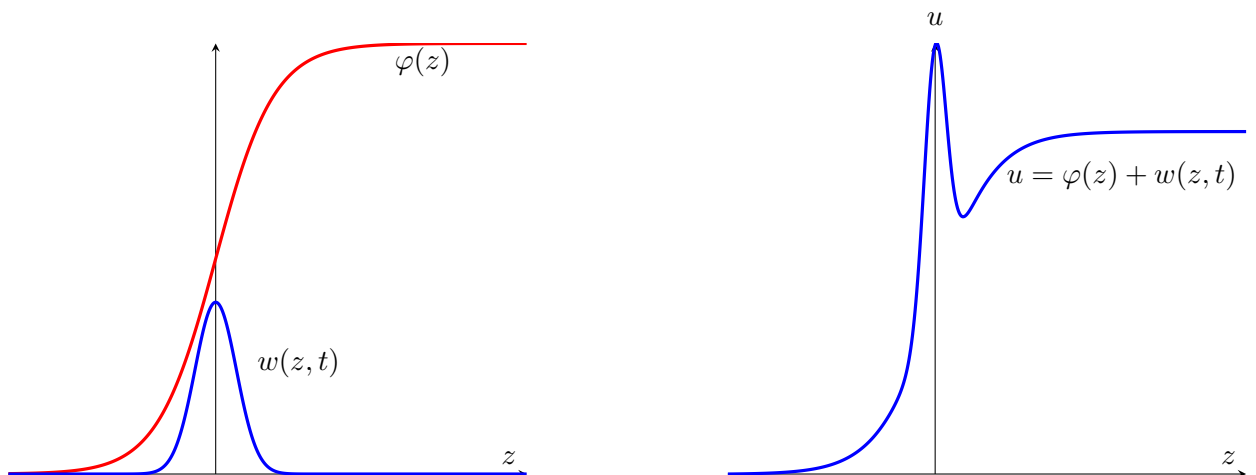


Figura 3.4: Solución en forma de onda viajera y perturbación.

Más aún, supongamos que la perturbación en el tiempo  $t = 0$  es dada. Sustituyendo (3.25) en (3.24) obtenemos la ecuación diferencial parcial para la perturbación

$$w_t = w_{zz} - cw_z + f(\varphi + w) - f(\varphi). \quad (3.27)$$

La ecuación (3.27) es llamada *ecuación perturbada no lineal*. Sin embargo, ya que  $w$  es pequeño, podemos linealizar para obtener una ecuación de perturbación lineal

$$w_t = w_{zz} - cw_z + wf'(\varphi). \quad (3.28)$$

Busquemos soluciones de la forma

$$w(z, t) = v(z) \exp(\lambda t). \quad (3.29)$$

Al sustituir (3.29) en (3.28) obtenemos la ecuación diferencial de segundo orden

$$v''(z) - cv'(z) + v(z)f'(\varphi) = \lambda v(z), \quad (3.30)$$

y las condiciones de frontera para  $w$  implican que

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} v(z) = 0. \quad (3.31)$$

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) forman un problema de valores propios para  $v(z)$ . Si existen valores propios con parte real positiva, (3.29) implica que la perturbación  $w$  crecerá exponencialmente y la onda viajera  $\varphi(z)$  es inestable. Sin embargo, si los valores propios tienen parte real negativa  $w$  decaerá exponencialmente cuando  $t \rightarrow \infty$  y  $\varphi(z)$  es asintóticamente estable. Este problema de valores propios puede ser analizado como en la demostración del Teorema 3.2. Concluyendo así, que bajo las condiciones (3.26) para  $w$ , los valores propios tienen parte real negativa y por tanto la solución en forma de onda viajera  $\varphi(z)$  es asintóticamente estable.

### 3.3. Ecuación Biestable

La ecuación biestable o ecuación de Nagumo describe la forma, velocidad y propagación de pulsos nerviosos en el axón de las neuronas [17], es ampliamente utilizada en biología y teoría de circuitos.

En esta sección estudiaremos la descomposición espectral de la ecuación de reacción-difusión biestable, es decir, la ecuación

$$u_t = u_{xx} + u(1-u)(u-\alpha), \quad \alpha \in (0, 1). \quad (3.32)$$

**Teorema 3.4** *Existe una solución en forma de onda viajera tipo frente para la ecuación (3.32). Más aún,*

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{z}{2\sqrt{2}} \right) \right], \quad z = x + ct \quad \text{con} \quad c = \frac{1-2\alpha}{\sqrt{2}},$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 1.$$

**Demostración:** Para hallar una solución en forma de onda viajera a la ecuación biestable, buscamos soluciones de (3.8) que conectan los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  en el plano fase  $(\varphi, \psi)$ . Tal trayectoria tiende a  $(0, 0)$  cuando  $z \rightarrow -\infty$  y  $(1, 0)$  si  $z \rightarrow \infty$ . Ya que  $f'(0) = -\alpha$ ,  $f'(1) = \alpha - 1$ , y usando (3.9) y (3.10) se sigue que los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  son puntos silla. Nuestro objetivo es determinar cuando el parámetro  $c$  puede ser escogido de tal manera que la trayectoria que sale de  $\varphi = 0$  en  $z = -\infty$  conecta con el punto silla  $\varphi = 1$  en  $z = \infty$ .

Supongamos que  $\int_0^1 f(u)du > 0$ . Probaremos diferentes valores de  $c$  para observar el comportamiento de las trayectorias que dejan el punto silla  $(0, 0)$ . Con  $c = 0$  podemos encontrar una expresión explícita para la solución multiplicando (3.7) por  $\varphi_z$  e integrando para obtener

$$\frac{\psi^2}{2} + \int_0^\varphi f(u)du = 0.$$

Si esta solución llegará a  $\varphi = 1$  para algún valor de  $\psi$ , tendríamos que

$$\frac{\psi^2}{2} + \int_0^1 f(u)du = 0,$$

en cuyo caso  $\int_0^1 f(u)du < 0$ . Ya que esto contradice nuestra suposición original, concluimos que  $\varphi$  no puede alcanzar el punto de equilibrio  $(1, 0)$ . Dicha trayectoria no puede permanecer en el primer cuadrante, ya que  $\psi > 0$  implica que  $\varphi$  es creciente. De esta manera, tal trayectoria debe intersectar al eje  $\psi$  en algún valor  $\varphi < 1$ . Por lo tanto, esta trayectoria no puede conectar los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .

Nuestra siguiente suposición es pensar que  $c$  es muy grande. En el plano fase  $(\varphi, \psi)$  la pendiente de la trayectoria inestable que deja el punto  $(0, 0)$  es la raíz positiva de  $\lambda^2 - c\lambda - \alpha = 0$ , que siempre es más grande que  $c$ . Sea  $K$  el número positivo más pequeño para el cual  $f(u)/u \leq K$  para todo  $u \in (0, 1]$ , y sea  $\sigma > 0$  fijo. Sobre la recta  $\psi = \sigma\varphi$  la pendiente de la trayectoria satisface

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = c - \frac{f(\varphi)}{\psi} = c - \frac{f(\varphi)}{\sigma\varphi} \geq c - \frac{K}{\sigma}. \quad (3.33)$$

Escogiendo  $c$  suficientemente grande, garantizamos que  $c - K/\sigma > \sigma$ , de manera que una vez que la trayectoria esta por arriba de la recta  $\psi = \sigma\varphi$ , permanece arriba de ella. Sabemos que para  $c$  muy grande, la trayectoria que deja el punto  $(0, 0)$  empieza por arriba de esta curva. Así, tal trayectoria siempre permanece por encima de la recta  $\psi = \sigma\varphi$ , y por lo tanto, pasa por arriba del punto de equilibrio  $(1, 0)$ .

Ahora tenemos dos trayectorias, una con  $c = 0$ , que no alcanza el punto  $(1, 0)$  y cruza el eje  $\psi$  para algún valor de  $\varphi < 1$ , y otra con  $c$  muy grande, que tampoco pasa por el punto  $(1, 0)$ . Ya que las trayectorias dependen continuamente de los parámetros del problema, entonces es una familia continua de trayectorias dependiendo de  $c$ , por lo tanto, entre las dos trayectorias encontradas existe por lo menos una que conecta los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$ .

El valor de  $c$  que conecta los puntos de equilibrio es único. Para demostrar este enunciado, de (3.33) se tiene que la pendiente  $d\psi/d\varphi$  de las trayectorias en el plano fase  $(\varphi, \psi)$  es una función monótona creciente del parámetro  $c$ . Supongamos que para algún valor de  $c = c_0$  existe una solución que une los puntos de equilibrio. Para cualquier valor de  $c$  más grande que  $c_0$ , la trayectoria que parte del punto silla punto  $(0, 0)$  debe estar por arriba de la solución que le corresponde a  $c_0$ . Por la misma razón, para  $c > c_0$ , la trayectoria que tiende al punto  $(1, 0)$  cuando  $z \rightarrow \infty$  debe de estar por debajo de la trayectoria correspondiente a  $c_0$ . Una curva simple, simultáneamente no puede estar abajo y arriba de otra curva, por lo tanto, no puede existir una trayectoria que conecte los puntos de equilibrio tal que  $c > c_0$ . Por un argumento similar, no puede existir una trayectoria con un valor más pequeño que  $c$ , por consiguiente, la trayectoria correspondiente al valor de  $c$  es única.

Ya que  $\psi(\varphi) = d\varphi/dz$ , la ecuación (3.7) se puede reescribir como

$$\psi\psi' - c\psi + f(\varphi) = 0, \quad (3.34)$$

donde  $\psi(\varphi)$  debe satisfacer las condiciones

$$\psi(0) = 0 = \psi(1).$$

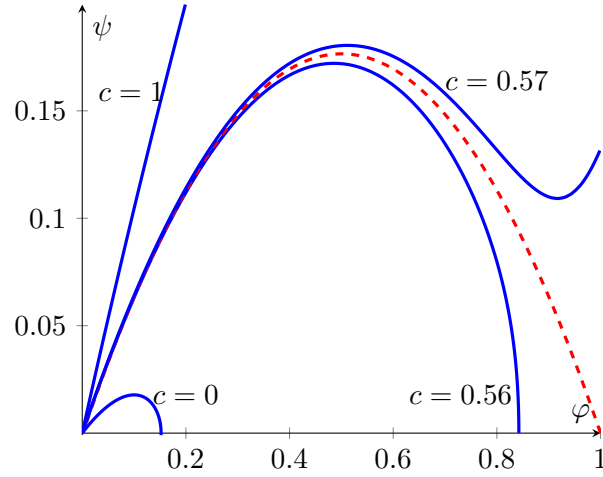


Figura 3.5: Trayectorias en el plano fase  $(\varphi, \psi)$  dejando el punto de equilibrio  $(0, 0)$  para la ecuación biestable con parámetro  $\alpha = 0.1$  y distintos valores de  $c$ . La curva punteada muestra la trayectoria heteroclínica.

Propongamos,

$$\psi = a(\varphi - \varphi^2), \quad (3.35)$$

donde  $a$  es un coeficiente a determinar. Al sustituir (3.35) en (3.34) obtenemos la ecuación

$$(1 - \varphi) [a^2\varphi(1 - 2\varphi) - ac\varphi + \varphi(\varphi - \alpha)] = 0.$$

Al comparar las potencias de  $\varphi$  de ambos lados de la ecuación anterior establecemos las relaciones

$$\begin{aligned} 1 - 2a^2 &= 0, \\ a^2 - ac - \alpha &= 0. \end{aligned}$$

Si escogemos  $a = 1/\sqrt{2}$ , entonces

$$c = \frac{1 - 2\alpha}{\sqrt{2}},$$

demostrando que la velocidad es una función decreciente de  $\alpha$  y la dirección de propagación de la onda cambia cuando  $\alpha = 1/2$ .

La solución exacta correspondientes, es la solución de la ecuación diferencial

$$\varphi' = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi - \varphi^2),$$

de la que se obtiene con facilidad

$$\varphi(z) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \tanh \left( \frac{z}{2\sqrt{2}} \right) \right].$$

□

**Espectro Puntual:** En este ejemplo, tenemos que

$$f'(0) = -\alpha \quad \text{y} \quad f'(1) = \alpha - 1.$$

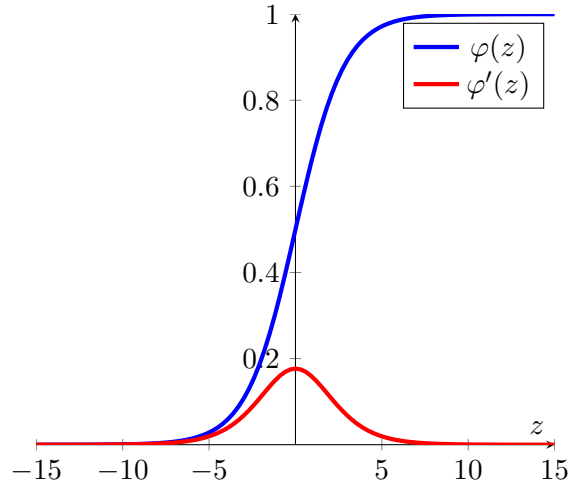


Figura 3.6: Perfil de la solución en forma de onda viajera para la ecuación biestable.

Ya que el coeficientes del operador  $\mathcal{L}$  asociado a la linealización decaen exponencialmente a constantes, por el teorema 2.8 tenemos que el espectro puntual  $\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L})$  se encuentra acotado inferiormente por

$$b = \max\{a_0^-, a_0^+\} = \max\{\alpha - 1, -\alpha\} < 0.$$

Al utilizar (3.15),  $\lambda = 0$  es un valor propio con función propia asociada  $\psi = \varphi'$ , del teorema 3.4  $\psi(z) \neq 0$  para todo  $z \in \mathbb{R}$ . Por lo tanto  $\lambda = 0$  es el valor propio más grande, teniendo así que

$$\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) \subset (b, 0).$$

**Espectro Esencial:** Consideremos el conjunto

$$\Omega := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid a - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \leq \text{Re } \lambda \leq b - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \right\},$$

donde

$$a := \min\{\alpha - 1, -\alpha\} \quad b := \max\{\alpha - 1, -\alpha\}.$$

Para determinar el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}$  asociado a la linealización alrededor de la onda  $\varphi$ , calculemos el índice de Fredholm en la región  $\Omega$ . Ya que el índice de Fredholm es independiente de  $\lambda$ , podemos escoger  $\lambda = -1/2$  (punto medio entre  $\alpha - 1$  y  $-\alpha$ ) y calculemos los índices de Morse para las matrices:

$$A_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{2\alpha-1}{2} & \frac{1-2\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1-2\alpha}{2} & \frac{1-2\alpha}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de las matrices anteriores son

$$\begin{aligned} \mu_1^- &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - 2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha - 3} \right), \\ \mu_2^- &= \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - 2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 + 4\alpha - 3} \right), \end{aligned}$$

y

$$\mu_1^+ = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - 2\alpha + \sqrt{4\alpha^2 - 12\alpha + 5} \right),$$

$$\mu_2^+ = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( 1 - 2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 12\alpha + 5} \right),$$

respectivamente.

Para el análisis, será conveniente observar el comportamiento de las funciones

$$f(\alpha) = 1 - 2\alpha,$$

$$g(\alpha) = 4\alpha^2 + 4\alpha - 3,$$

$$h(\alpha) = 4\alpha^2 - 12\alpha + 5.$$

Tenemos que  $\alpha = 1/2$  es una raíz para las tres funciones anteriores, además:

- $f(\alpha)$  y  $h(\alpha)$  son positivas para  $\alpha \in (0, 1/2)$ , negativas para  $\alpha \in (1/2, 1)$ .
- $g(\alpha)$  es negativa en  $(0, 1/2)$ , positiva para  $\alpha \in (1/2, 1)$ .

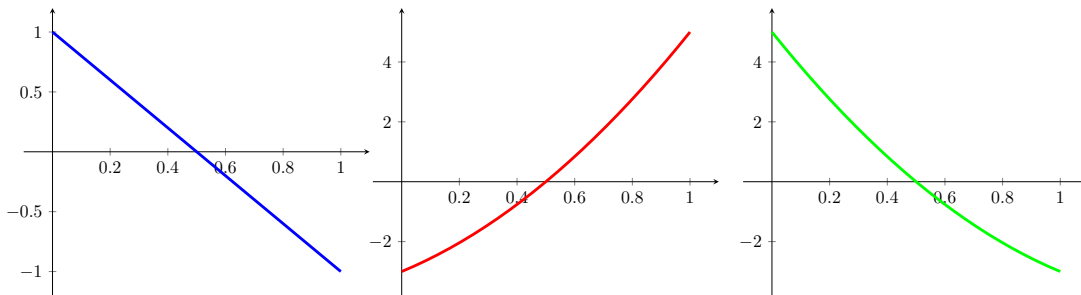


Figura 3.7: Gráfica de las funciones  $f(\alpha)$ ,  $g(\alpha)$  y  $h(\alpha)$  en  $[0, 1]$ , respectivamente.

Dividamos el estudio del espectro esencial en tres casos:

**Caso 1**,  $0 < \alpha < 1/2$ : Como  $f(\alpha) > 0$  y  $g(\alpha) < 0$ , entonces

$$\operatorname{Re} \mu_{1,2}^- = \frac{\sqrt{2}}{4} f(\alpha) > 0,$$

por lo tanto  $i(A_-) = 2$ . Por otro lado,

$$\operatorname{Re} \mu_1^+ = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( f(\alpha) + \sqrt{h(\alpha)} \right) > 0.$$

Además  $f(\alpha) < \sqrt{h(\alpha)}$ , por lo que

$$\operatorname{Re} \mu_2^+ = \frac{\sqrt{2}}{4} \left( f(\alpha) - \sqrt{h(\alpha)} \right) < 0,$$

teniendo así que  $i(A_+) = 1$ . Concluyendo que

$$\operatorname{ind}(\mathcal{L}_\infty - \lambda \mathcal{I}) = i(A_-) - i(A_+) = 1.$$



En este caso,  $\alpha - 1 < -\alpha$ , entonces la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_-)$  esta a la derecha de la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_+)$ . Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  las regiones a la derecha de  $\sigma_F(\mathcal{L}_-)$  y a la izquierda de  $\sigma_F(\mathcal{L}_+)$  respectivamente. Entonces, al usar el teorema 2.7 tenemos que

$$\text{índ}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}) = \begin{cases} 0 & \lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ 1 & \lambda \in \Omega \end{cases}$$

Finalmente, del teorema 2.5 se concluye que

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \Omega.$$

En la figura 3.8 se muestra una descripción del espectro puntual y esencial del operador  $\mathcal{L}$ .

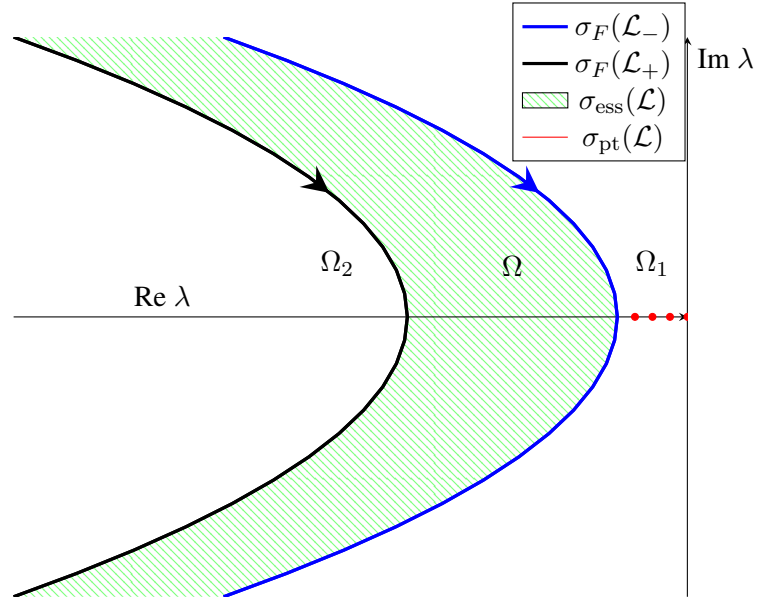


Figura 3.8: Espectro esencial y puntual del operador  $\mathcal{L}$  cuando  $\alpha \in (0, 1/2)$ .

**Caso 2,  $1/2 < \alpha < 1$ :** Como  $h(\alpha) < 0$ ,  $f(\alpha) + \sqrt{g(\alpha)} > 0$  y  $f(\alpha) - \sqrt{g(\alpha)} < 0$ , entonces

$$\text{Re } \mu_1^- = \frac{\sqrt{2}}{4} (f(\alpha) + \sqrt{g(\alpha)}) > 0,$$

$$\text{Re } \mu_2^- = \frac{\sqrt{2}}{4} (f(\alpha) - \sqrt{g(\alpha)}) < 0.$$

Por lo tanto,  $i(A_-) = 1$ . Por otro lado,

$$\text{Re } \mu_{1,2}^+ = \frac{\sqrt{2}}{4} f(\alpha) < 0.$$

De esta manera,  $i(A_+) = 0$ . Así

$$\text{índ}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}) = i(A_-) - i(A_+) = 1.$$

Ya que  $-\alpha < \alpha - 1$  para  $\alpha \in (1/2, 1)$  la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_+)$  esta a la derecha de la curva  $\sigma_F(\mathcal{L}_-)$ . Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  las regiones a la derecha de  $\sigma_F(\mathcal{L}_+)$  y a la izquierda de  $\sigma_F(\mathcal{L}_-)$  respectivamente. De manera similar al caso anterior

$$\text{ind}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}) = \begin{cases} 0 & \lambda \in \Omega_1 \cup \Omega_2 \\ 1 & \lambda \in \Omega \end{cases}$$

y por tanto,

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \Omega.$$

En la figura 3.9 se muestra la descomposición espectral para el operador  $\mathcal{L}$ .

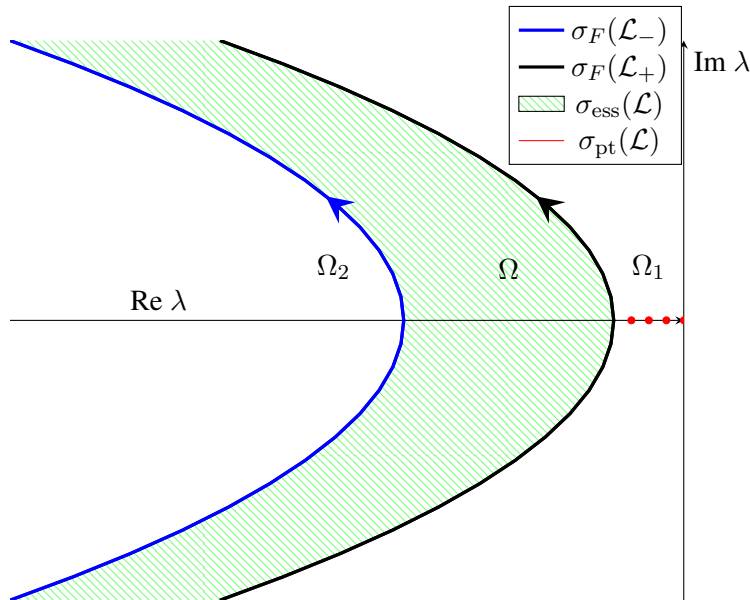


Figura 3.9: Espectro esencial y puntual del operador  $\mathcal{L}$  cuando  $\alpha \in (1/2, 1)$ .

**Caso 3,  $\alpha = 1/2$ :** En este caso,  $A_-(\lambda) = A_+(\lambda)$  para todo  $\lambda \in \mathbb{C}$ , al usar el teorema 2.6 se sigue inmediatamente

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \sigma_F(\mathcal{L}).$$

Ya que  $c = 0$ , entonces

$$\sigma_F(\mathcal{L}) = \{ \lambda = -k^2 - 1/2 \mid k \in \mathbb{R} \}.$$

Podemos sintetizar los resultados de esta sección en el siguiente teorema:

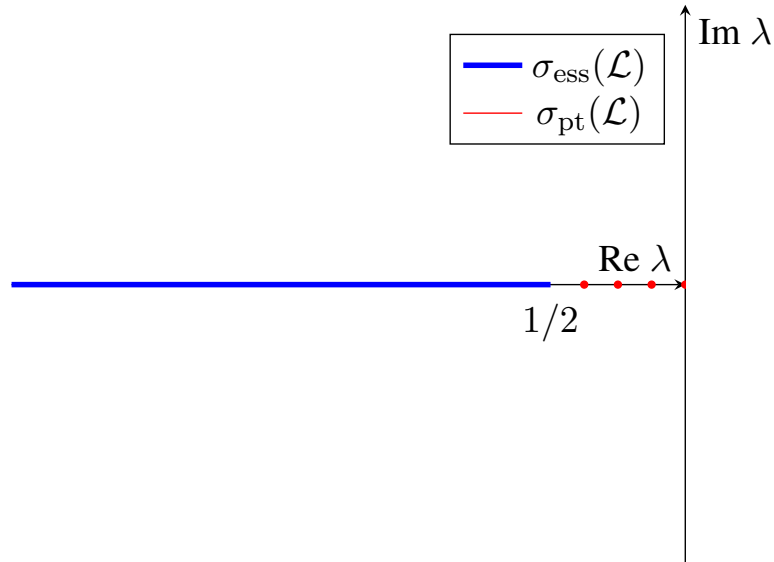


Figura 3.10: Descomposición espectral en el caso  $\alpha = 1/2$ .

**Teorema 3.5** *La solución en forma de onda viajera para la ecuación de reacción difusión biestable descrita en el teorema 3.4 es espectralmente estable.*

En seguida estudiaremos un caso más general de la ecuación de reacción difusión biestable, es decir,

**Teorema 3.6** *Consideremos la ecuación de reacción difusión*

$$u_t = u_{xx} + f(u), \quad (3.36)$$

con  $f \in C^2([0, 1])$ ,  $f(0) = f(1) = f(\alpha) = 0$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $f'(0) < 0$ ,  $f'(\alpha) > 0$ ,  $f'(1) < 0$ . Entonces existe una solución en forma de onda viajera  $u(x, t) = \varphi(z)$ ,  $z = x + ct$  para la ecuación (3.36) tal que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 1,$$

para un único valor de  $c$ .

La línea de argumentos para la demostración del teorema anterior es similar a la dada en la demostración del teorema 3.4. De manera análoga, podemos establecer la estabilidad espectral de la onda viajera como en el teorema 3.5.

### 3.4. Ecuación de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (Fisher-KPP)

En un artículo publicado por A. Fisher en 1937 [5] se consideró la propagación de un gen favorable (llamado  $a$ ) en una región en la que un segundo gen (llamado  $A$ ) estaba inicialmente presente. La propagación se supone aleatoria. Si  $u = \text{Prob}[a \text{ esté presente}]$ , entonces  $1 - u = \text{Prob}[A \text{ esté presente}]$ . Usando ciertas leyes de la genética (Ley de Hardy-Weinberg), se puede demostrar que la razón a la cual  $u$  evoluciona en el tiempo es descrita como

$$u_t = u_{xx} + u(1 - u). \quad (3.37)$$

Esta ecuación es conocida como *Ecuación de Fisher*.

En esta sección consideraremos un modelo más general de la ecuación de Fisher y analizaremos su estabilidad espectral.

**Teorema 3.7** Consideremos la ecuación de reacción difusión

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

donde  $f(u)$  es tal que  $f(0) = f(1) = 0$ ,  $f(u) > 0$  en  $(0, 1)$ ,  $f'(0) > 0$ ,  $f'(1) < 0$ , y  $f(u) \leq f'(0)u$  en  $(0, 1)$ . Entonces existe una onda viajera  $\varphi(z)$ ,  $z = x - ct$  para cada  $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$  tal que

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0.$$

**Demostración:** Se demostrará que para cada  $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$  existen soluciones del sistema (3.8) que conectan a los puntos de equilibrio  $(0, 0)$  y  $(1, 0)$  en el plano fase  $(\varphi, \psi)$ , más aún,  $\varphi \geq 0$ ,  $\psi \leq 0$  con  $0 \leq \varphi \leq 1$ . Tal trayectoria tiende a  $(0, 0)$  si  $z \rightarrow \infty$  y  $(1, 0)$  si  $z \rightarrow -\infty$ . Un análisis de estabilidad demuestra que los valores propios para los puntos de equilibrio son

$$(0, 0) : \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [-c \pm (c^2 - 4f'(0))^{1/2}] \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \text{nodo estable} & \text{si } c \geq 2\sqrt{f'(0)}. \\ \text{espiral estable} & \text{si } c < 2\sqrt{f'(0)}. \end{cases}$$

$$(1, 0) : \quad \lambda_{\pm} = \frac{1}{2} [-c \pm (c^2 - 4f'(1))^{1/2}] \quad \Rightarrow \quad \text{punto silla.}$$

Así, existe una trayectoria que comienza en  $(1, 0)$  tal que  $\psi \leq 0$ . Dicha trayectoria puede tener alguno de los comportamientos ilustrados en la figura 3.11.

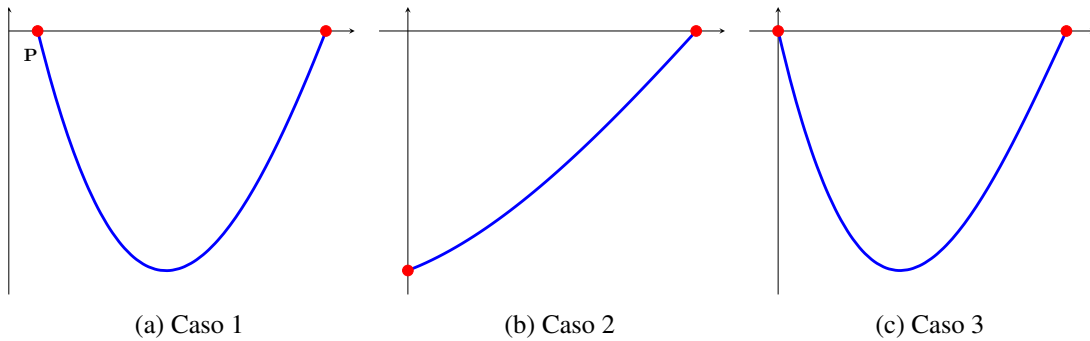


Figura 3.11: Los tres distintos comportamientos que puede tener una trayectoria que parte de  $(1, 0)$ .

**Caso 1.** En el punto  $P$ ,  $f(\varphi) > 0$  y  $\psi = 0$ , entonces  $\psi' < 0$ , mientras que de hecho  $\psi$  tiene un cambio de signo de negativo a positivo, por lo tanto  $\psi' > 0$ . De esta manera, el caso 1 no puede ocurrir.

**Caso 2.** Sea  $\lambda$  uno de los valores propios en  $(0, 0)$  (real y negativo ya que  $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$ ). Consideremos la recta  $\psi = \lambda\varphi$  en el plano fase. Entonces,

$$\frac{\psi'}{\varphi'} = -\frac{c\psi + f(\varphi)}{\psi} = -c - \frac{f(\varphi)}{\psi} < -c - \frac{f'(0)\varphi}{\psi} = -c - \frac{f'(0)}{\lambda} = \lambda,$$

ya que  $\lambda^2 + c\lambda + f'(0) = 0$ . En el punto  $Q$ ,  $\frac{\psi'}{\varphi'} < \lambda$ . Pero  $\frac{\psi'}{\varphi'} > \lambda$  (vea la figura 3.12). Así, el caso 2 tampoco puede ocurrir.

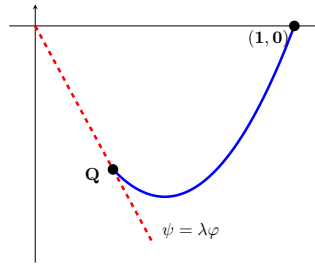


Figura 3.12: Intersección de la trayectoria con la recta  $\psi = \lambda\varphi$

Por lo tanto, el caso 3 es el único que puede ocurrir siempre que  $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$ . La trayectoria que deja el punto de equilibrio  $(1, 0)$  y termina en  $(0, 0)$  corresponde a una solución en forma de onda viajera.  $\square$

En la gráfica 3.13 se muestran perfiles de onda y orbitas heteroclínicas para la ecuación (3.37) con distintos valores de  $c$ .

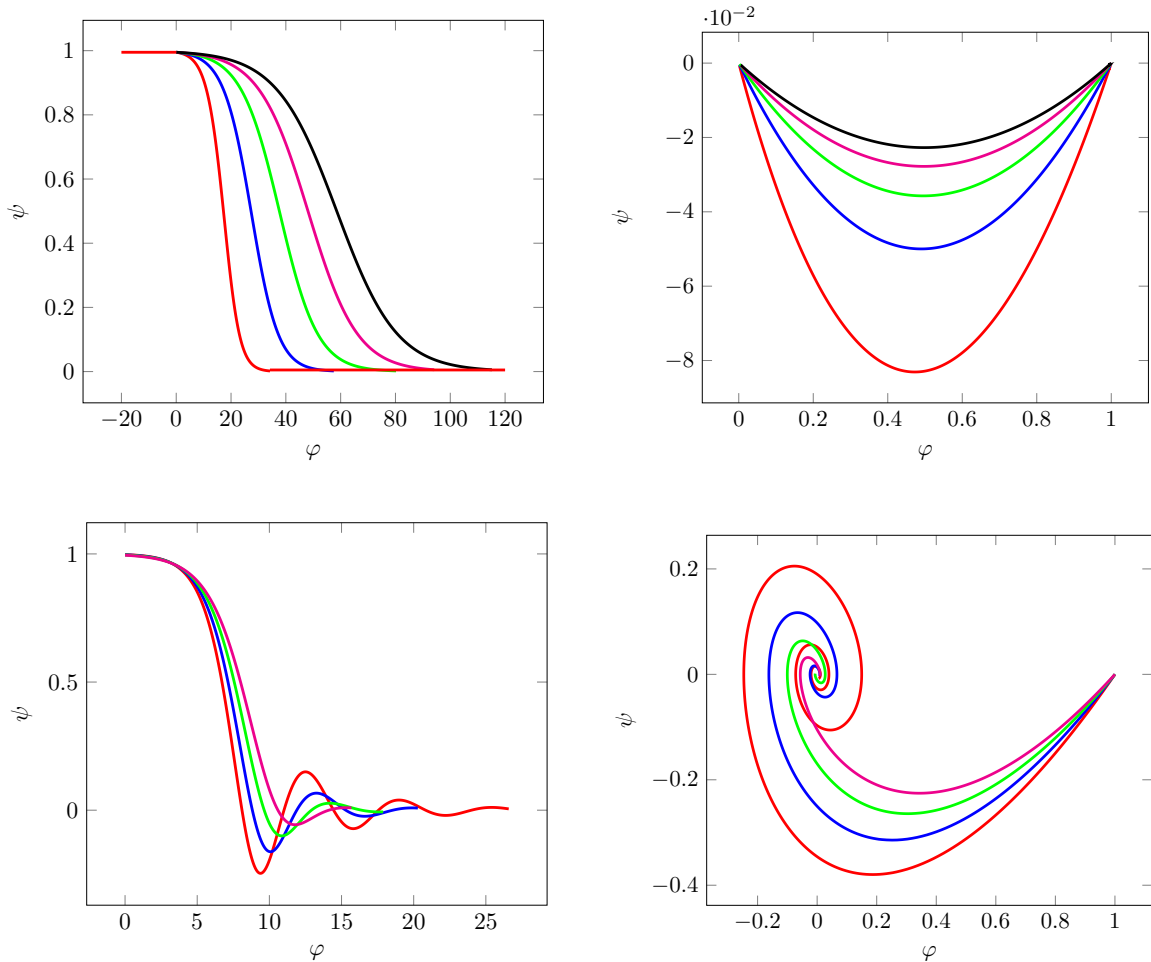


Figura 3.13: Perfiles de ondas viajeras (izquierda) y orbitas heteroclínicas (derecha) en el plano fase  $(\varphi, \psi)$  para la ecuación Fisher-KPP en el caso  $f(u) = u(1 - u)$ . En las gráficas superiores se consideró los valores de  $c = 3, 5, 7, 9, 11$ , mientras que para las gráficas inferiores se tomo  $c = 0.4, 0.6, 0.8, 1$ .

Hemos demostrado la existencia de soluciones en forma de ondas viajeras usando argumentos geométricos en el plano fase, pero no tenemos una fórmula para la solución. Consideremos el término de difusión  $f(u) = u(1 - u)$  y usemos un método de perturbación para obtener una aproximación de la

solución en el caso  $c \geq 2$ . Un método de perturbación es un intento de encontrar una expansión para la solución del problema en términos de series de potencias en algún parámetro pequeño.

Buscamos una solución aproximada al problema de valores en la frontera

$$\varphi'' + c\varphi' + \varphi(1 - \varphi) = 0, \quad -\infty < z < \infty, \quad (3.38)$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \varphi(z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \varphi(z) = 0, \quad (3.39)$$

donde  $c \geq 2$ . Observemos que si  $\varphi(z)$  es una solución, entonces también lo es  $\varphi(z + z_0)$  para cualquier constante fija  $z_0$ . En otras palabras, la curva solución puede ser trasladada a la derecha o a la izquierda, y seguiremos teniendo una solución. Por lo tanto, podemos establecer

$$\varphi(0) = \frac{1}{2}, \quad (3.40)$$

ya que el valor en  $z = 0$  puede ser escogido de tal manera que sea cualquier número en el rango de  $\varphi$ . Ahora identificamos un parámetro pequeño en el problema definiendo

$$\varepsilon = \frac{1}{c^2} \leq 0.25.$$

De esta manera, la ecuación diferencial (3.38) puede ser escrita como

$$\sqrt{\varepsilon}\varphi'' + \varphi' + \sqrt{\varepsilon}\varphi(1 - \varphi) = 0. \quad (3.41)$$

En (3.41), el término dominante es  $\varphi'$  cuando  $\varepsilon$  es pequeño, y la ecuación es aproximadamente,  $\varphi' = 0$ , que tiene soluciones constantes; de esta manera, esta aproximación es válida para valores grandes de  $z$  ya que  $\varphi = 0$  para valores grandes de  $z$  positivos, y  $\varphi = 1$  para valores grandes y negativos. En el intervalo donde  $\varphi$  cambia de 1 a 0, un comportamiento distinto debe ocurrir. Por lo tanto, podemos reescalar el intervalo donde ocurre dicho cambio a un intervalo de longitud uno; para esto introduzcamos el cambio de variables

$$s = \sqrt{\varepsilon}z = \frac{z}{c}, \quad g(s) = \varphi\left(\frac{s}{\sqrt{\varepsilon}}\right). \quad (3.42)$$

Entonces la ecuación diferencial (3.41) se convierte en

$$\varepsilon g'' + g' + g(1 - g) = 0, \quad (3.43)$$

donde las primas denotan la derivada con respecto de  $s$ . Así, en términos de la variable  $s$ , los dos últimos términos en (3.43) dominan el término con la segunda derivada. Las condiciones auxiliares (3.39) y (3.40) se traducen como

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} g(s) = 1, \quad g(0) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0. \quad (3.44)$$

Para encontrar una solución aproximada de (3.43)-(3.44) supongamos que  $g(s)$  la podemos escribir como

$$g(s) = g_0(s) + \varepsilon g_1(s) + \varepsilon^2 g_2(s) + \dots, \quad (3.45)$$

que es una expansión en potencias de un parámetro pequeño  $\varepsilon$ , y donde los coeficientes  $g_0, g_1, \dots$  tienen que ser determinados. Al substituir (3.45) en la ecuación diferencial (3.43) con las condiciones auxiliares

(3.44), e igualando coeficientes de las potencias de  $\varepsilon$  a cero, obtenemos la siguiente sucesión de problemas para  $g_0, g_1, \dots$ :

$$g_0' = -g_0(1 - g_0), \quad g_0(0) = \frac{1}{2}, \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} g_0(s) = 1, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} g_0(s) = 0, \quad (3.46)$$

$$g_1' = -g_1(1 - g_0) + g_0'', \quad \lim_{s \rightarrow -\infty} g_1(s) = 0, \quad g_1(0) = 0, \quad \lim_{s \rightarrow \infty} g_1(s) = 0, \dots, \quad (3.47)$$

Al resolver la ecuación (3.46) obtenemos

$$g_0(s) = (1 + \exp(s))^{-1}, \quad (3.48)$$

que cumple las condiciones de frontera en (3.46). Entonces (3.48) puede ser resuelta para obtener

$$g_1(s) = \exp(s)(1 + \exp(s))^{-2} \ln \left( \frac{4 \exp(s)}{(1 + \exp(s))^2} \right). \quad (3.49)$$

Por lo tanto, en términos de las variables originales  $\varphi$  y  $z$ , la expansión (3.45) se convierte en

$$\varphi(z) = \frac{1}{1 + \exp(z/c)} + \frac{1}{c^2} \exp(z/c)(1 + \exp(z/c))^{-2} \ln \left( \frac{4 \exp(z/c)}{(1 + \exp(z/c))^2} \right) + O \left( \frac{1}{c^4} \right). \quad (3.50)$$

Por tanto, hemos obtenido una aproximación a la onda viajera  $\varphi(z)$  cuando  $c \geq 2$ . En [14] se demuestra que el término  $O(1/c^4)$  es uniforme para todo  $z \in \mathbb{R}$ , más aún, demuestran que el primer término,  $(1 + \exp(z/c))^{-1}$  es muy cercano a una solución numérica.

**Espectro Esencial:** La técnica para estudiar el espectro esencial será análoga a la utilizada en la sección anterior.

Sea  $c \geq 2\sqrt{f'(0)} > 0$  y consideremos el conjunto

$$\Omega := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid f'(1) - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \leq \text{Re } \lambda \leq f'(0) - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c} \right)^2 \right\}.$$

En este caso, el operador asociado a la linealización alrededor de la onda viajera es

$$\mathcal{L}u = u_{zz} + cu_z + uf'(\varphi).$$

Para determinar el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}$ , calculemos el índice de Fredholm en la región  $\Omega$ . Ya que el índice de Fredholm es independiente de  $\lambda$ , podemos escoger  $\lambda = 0$  (ya que  $f'(1) < 0 < f'(0)$ ) y calcular los índices de Morse para las matrices:

$$A_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(1) & -c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -f'(0) & -c \end{pmatrix}.$$

Los valores propios de las matrices anteriores son

$$\begin{aligned} \mu_1^- &= \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}, \\ \mu_2^- &= \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\mu_1^+ &= \frac{-c + \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}, \\ \mu_2^+ &= \frac{-c - \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2},\end{aligned}$$

respectivamente.

Observemos que

$$c^2 - 4f'(1) \geq 4(f'(0) - f'(1)) > 0,$$

entonces

$$\operatorname{Re} \mu_{1,2}^- = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(1)}}{2}.$$

Ya que  $f'(1) < 0$ , entonces

$$c^2 < c^2 - 4f'(1),$$

por lo tanto  $\operatorname{Re} \mu_1^- > 0$ ; es claro que  $\operatorname{Re} \mu_2^- < 0$ . Así,

$$i(A_-) = 1.$$

Por otro lado, ya que  $c \geq 2\sqrt{f'(0)}$ , entonces

$$\operatorname{Re} \mu_{1,2}^+ = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4f'(0)}}{2}.$$

Observemos que  $\sqrt{c^2 - 4f'(0)} < c$ , entonces  $\operatorname{Re} \mu_1^+ < 0$ . Más aún,  $\operatorname{Re} \mu_2^+ < 0$ . Por lo tanto,

$$i(A_+) = 0.$$

De esta manera,

$$\operatorname{ind}(\mathcal{L}_\infty - \lambda\mathcal{I}) = i(A_-) - i(A_+) = 1.$$

Concluyendo que

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}) = \Omega.$$

En la figura 3.14 se esboza el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}$ .

De la discusión anterior observamos que la solución en forma de onda viajera para las ecuaciones de reacción-difusión tipo Fisher-KPP no es espectralmente estable, pero sin embargo, podemos reformular el problema para obtener estabilidad espectral en otros espacios.

El espectro esencial no es afectado por perturbaciones relativamente compactas (Teorema 2.5), pero si replanteamos el problema en un espacio de funciones distinto, el espectro esencial y las fronteras de



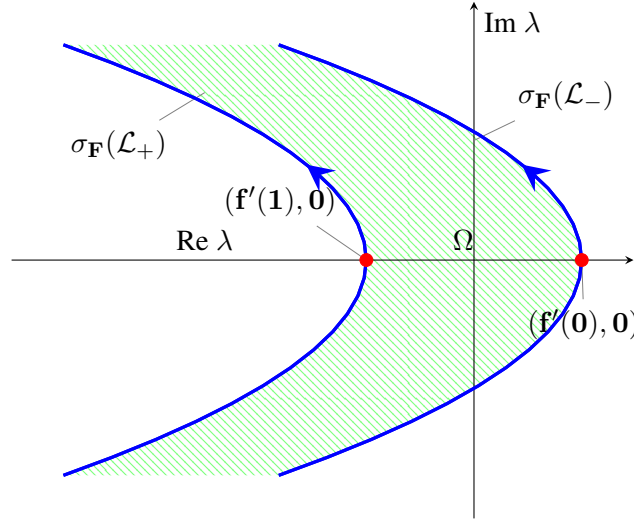


Figura 3.14: Espectro esencial para ecuaciones de reacción-difusión Fisher-KPP.

Fredholm pueden desplazarse. Consideremos el problema de valores propios asociado a la ecuación de reacción-difusión tipo Fisher-KPP en un espacio de funciones pesadas  $H_a^k(\mathbb{R})$  con la norma

$$\|u\|_{H_a^k} := \|\exp(ax)u\|_{H^k}.$$

Sea  $v(z) = \exp(az)u(z)$ , de modo que  $u \in L_a^2(\mathbb{R})$  si y sólo si  $v \in L^2(\mathbb{R})$  y consideremos el operador  $\mathcal{L}_a$  definido como

$$\mathcal{L}_a v := \exp(az)\mathcal{L}\exp(-az)v.$$

Observemos que  $\sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}_a)$ . En efecto, sea  $\lambda \in \sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L})$  y  $u$  su correspondiente función propia, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a v &= \exp(az)\mathcal{L}\exp(-az)\exp(az)u \\ &= \exp(az)\mathcal{L}u \\ &= \exp(az)\lambda u \\ &= \lambda v \end{aligned}$$

Al desarrollar el operador  $\mathcal{L}_a$  obtenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_a v &= \exp(az)\mathcal{L}\exp(-az)v \\ &= \exp(az)\{[\exp(-az)v]_{zz} + c[\exp(-az)v]_z + \exp(-az)v f'(\varphi)\} \\ &= v_{zz} + (c - 2a)v_z + (a^2 - ac + f'(\varphi))v. \end{aligned}$$

Observamos que el operador  $\mathcal{L}_a$  es exponencialmente asintótico (definición 2.1) con

$$a_{a,1}^\pm = c - 2a, \quad a_{a,0}^+ = a^2 - ac + f'(0), \quad a_{a,0}^- = a^2 - ac + f'(1),$$

y el operador asintótico  $\mathcal{L}_{a,\infty}$  (definición 2.2) asociado a  $\mathcal{L}_a$  es

$$\mathcal{L}_{a,\infty} = \begin{cases} \mathcal{L}_{a,-} & : z < 0 \\ \mathcal{L}_{a,+} & : z > 0 \end{cases}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{a,-}v &= v_{zz} + cv_z + (a^2 - ac + f'(1))v, \\ \mathcal{L}_{a,+}v &= v_{zz} + cv_z + (a^2 - ac + f'(0))v. \end{aligned}$$

En este caso, las matrices asintóticas están dadas mediante

$$A_{a,-}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - a^2 + ac - f'(1) & -c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{a,+}(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - a^2 + ac - f'(0) & -c \end{pmatrix} \quad (3.51)$$

y la relación de dispersión para el operador  $\mathcal{L}_a$  (ecuación (2.18)) es

$$d_{\pm}^a(\mu, \lambda) := \mu^2 + a_{a,1}^{\pm}\mu + a_{a,0}^{\pm} - \lambda = 0.$$

Siempre se cumple que

$$d_{\pm}^a(ik, \lambda) = d_{\pm}(ik - a, \lambda),$$

donde  $d_{\pm}(\mu, \lambda)$  es la relación de dispersión asociada al operador  $\mathcal{L}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} d_{\pm}^a(ik, \lambda) &= (ik)^2 + a_{a,1}^{\pm}(ik) + a_{a,0}^{\pm} - \lambda \\ &= -k^2 + ik(c - 2a) + a^2 - ac + a_0^{\pm} - \lambda \\ &= (ik - a)^2 + c(ik - a) + a_0^{\pm} - \lambda \\ &= (ik - a)^2 + a_0^{\pm}(ik - a) + a_0^{\pm} - \lambda \\ &= d_{\pm}(ik - a, \lambda), \end{aligned}$$

donde  $a_1^{\pm} = c$ ,  $a_0^+ = f'(0)$  y  $a_0^- = f'(1)$  son los coeficientes requeridos para que el operador  $\mathcal{L}$  sea exponencialmente asintótico.

Por lo tanto, las fronteras de Fredholm para el operador  $\mathcal{L}_a$  son

$$\sigma_F(\mathcal{L}_a) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid d_{\pm}(ik - a, \lambda) = 0, \quad \text{para algún } k \in \mathbb{R} \},$$

más específicamente,

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{a,-}) = \{ \lambda = -k^2 - ac + f'(1) + i(ck - 2ak) \mid k \in \mathbb{R} \} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = f'(1) - ac - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c - 2a} \right)^2 \right\}$$

y

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{a,+}) = \{ \lambda = -k^2 - ac + f'(0) + i(ck - 2ak) \mid k \in \mathbb{R} \} = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = f'(0) - ac - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c - 2a} \right)^2 \right\}.$$

A continuación describiremos el espectro esencial para el operador  $\mathcal{L}_a$ , para ello calcularemos los índices de Morse para las matrices (3.51) en cierta región del plano complejo.

En el caso de que  $c - 2a = 0$ , entonces

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{a,-}) \subset \sigma_F(\mathcal{L}_{a,+}) = \left\{ -k^2 - \frac{c^2}{2} + f'(0) \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

e inmediatamente concluimos que  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_a) = \sigma_F(\mathcal{L}_{a,+})$ . Observemos que

$$-\frac{c^2}{2} + f'(0) \leq -\frac{c^2}{2} + \frac{c^2}{4} = -\frac{c^2}{4} < 0,$$

de esta manera,  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_a) \subset \mathbb{R}^-$ .

Sea  $2a - c \neq 0$  y  $\Omega_a$  el subconjunto de  $\mathbb{C}$  definido por

$$\Omega_a := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid f'(1) - ac - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c - 2a} \right)^2 \leq \text{Re } \lambda \leq f'(0) - ac - \left( \frac{\text{Im } \lambda}{c - 2a} \right)^2 \right\},$$

y consideremos  $\lambda = c^2 + a^2 - ac + f'(0)$ , observemos que  $\lambda \in \mathbb{R}$  y además se encuentra a la derecha del conjunto  $\Omega_a$ . De esta manera,

$$A_{a,-} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 + f'(0) - f'(1) & -c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_{a,+} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 & -c \end{pmatrix},$$

cuyos valores propios son

$$\mu_{1,2}^- = \frac{-c \pm \sqrt{5c^2 + 4f'(0) - 4f'(1)}}{2} \quad \text{y} \quad \mu_{1,2}^+ = \frac{-c \pm \sqrt{5c^2}}{2}.$$

Como  $5c^2 + 4f'(0) - 4f'(1) > 0$ , entonces  $\mu_{1,2}^- \in \mathbb{R}$ . Observando que  $0 < c^2 + f'(0) - f'(1)$ , entonces

$$c < \sqrt{5c^2 + 4f'(0) - 4f'(1)},$$

por lo tanto,

$$\text{Re } \mu_1^- > 0 \quad \text{y} \quad \text{Re } \mu_2^- < 0.$$

Así,  $i_-(\lambda) = 1$ . Es fácil demostrar que  $i_+(\lambda) = 1$ . Concluyendo que  $\text{índ}(\mathcal{L}_{a,\infty} - \lambda\mathcal{I}) = 0$ . Finalmente, al usar el Teorema 2.7 concluimos

$$\text{índ}(\mathcal{L}_{a,\infty} - \lambda\mathcal{I}) = \begin{cases} 1 & \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Omega_a \\ 0 & \lambda \in \Omega_a, \end{cases}$$

demostrando que  $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}_a) = \Omega_a$ .

El punto más a la derecha del espectro esencial ocurre cuando  $k = 0$ , en cuyo caso

$$\text{Re } \lambda = f'(0) - ac.$$

Si  $a > f'(0)/c$ , entonces el espectro esencial está estrictamente contenido en la mitad izquierda del plano complejo, teniendo así estabilidad espectral. Inmediatamente se observa que el conjunto de las perturbaciones que podemos escoger para que la solución en forma de onda viajera sea espectralmente

estable consta de aquellas funciones que pertenecen al espacio  $H_a^k$ . Si  $a > 0$ , el hecho de que el espectro esencial este del lado izquierdo del plano complejo, cuando el dominio del operador  $\mathcal{L}$  es  $H_a^k$  (funciones que decaen exponencialmente en  $+\infty$ ) implica que la onda viajera para la ecuación F-KPP es más sensible a perturbaciones localizadas en frente de la onda que aquellas que están detrás.

En el siguiente teorema sintetizamos los resultados de esta sección

**Teorema 3.8** Sea  $u \in H_a^2(\mathbb{R})$  y consideremos la ecuación de reacción difusión

$$u_t = u_{xx} + f(u),$$

donde  $f$  cumple las hipótesis del Teorema 3.7. Entonces para  $a > f'(0)/c$  existe una constante  $\gamma > 0$  tal que el operador  $\mathcal{L}_a$  asociado a la linealización alrededor de la onda viajera  $\varphi$  tiene la descomposición espectral

$$\sigma(\mathcal{L}_a) \setminus \{0\} \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma\}.$$

---

# Estabilidad Espectral Multidimensional

---

En este capítulo extenderemos la noción de solución en forma de onda viajera en el caso de frentes planos para ecuaciones de reacción difusión en varias dimensiones espaciales. A través de una familia de operadores se estudiará el comportamiento espectral del operador asociado a la linealización de ecuaciones de reacción difusión, la ventaja de esta familia reside en que cada elemento es susceptible a la teoría desarrollada en el capítulo 2.

## 4.1. Ondas Viajeras para Ecuaciones de Reacción Difusión Multidimensionales

Consideremos ecuaciones diferenciales parciales de reacción difusión

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (4.1)$$

donde  $u : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$ ,  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función suave. Supondremos que  $n \geq 2$ . Una onda viajera  $\varphi(z)$  es una función suave en la variable  $z = k \cdot x + ct$ , para  $k \in \mathbb{S}^{n-1}$  y algún  $c \in \mathbb{R}$ , que es solución de (4.1). Supondremos que existen  $\varphi_{\pm} \in \mathbb{R}$ , con

$$\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z) = \varphi_{\pm},$$

tales que  $f(\varphi_{\pm}) = 0$ . Ya que la ecuación (4.1) es invariante bajo rotaciones, podemos suponer sin pérdida de generalidad que  $k = (1, 0, \dots, 0)$ . Bajo el cambio de variable  $z = x_1 + ct$ , la onda  $\varphi$  es una solución independiente del tiempo de la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'' - c\varphi' + f(\varphi) = 0.$$

Este análisis nos lleva a la siguiente definición

**Definición 4.1** Consideremos la ecuación diferencial parcial de reacción difusión (4.1). Diremos que  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , es una solución en forma de onda viajera para (4.1) si existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $\varphi$  es solución de la ecuación diferencial ordinaria

$$\varphi'' - c\varphi' + f(\varphi) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \varphi(z) = \varphi_{\pm}, \quad (4.2)$$

donde las primas denotan la derivada con respecto de  $z$  y  $\varphi_{\pm}$  son tales que  $f(\varphi_{\pm}) = 0$ . En el caso de que  $\varphi_- = \varphi_+$ , se dice que la onda viajera es un pulso y si  $\varphi_- \neq \varphi_+$  diremos que es un frente.

De manera análoga al capítulo anterior podemos estudiar la existencia de ondas viajeras mediante análisis del plano fase.

En el sistema coordenado

$$z = x_1 + ct, \quad y = (x_2, x_3, \dots, x_n), \quad \tau = t,$$

la ecuación de reacción difusión (4.1) toma la forma

$$u_{\tau} = \Delta u - cu_z + f(u), \quad (4.3)$$

con la notación  $\Delta = \partial_z^2 + \partial_{x_2}^2 + \dots + \partial_{x_n}^2$ . Al linealizar (4.3) alrededor de la onda  $\varphi$  obtenemos la ecuación diferencial parcial

$$u_t = \Delta u - cu_z + f'(\varphi)u, \quad (4.4)$$

observemos que en la ecuación anterior hemos intercambiado  $t$  por  $\tau$ . El lado derecho de la ecuación (4.4) define el operador lineal, cerrado y densamente definido  $\mathcal{L} : H^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L}u := \Delta u - cu_z + f'(\varphi)u. \quad (4.5)$$

Notemos que  $\mathcal{L}\varphi' = 0$ , es decir,  $\lambda = 0$  es un valor propio con función propia asociada  $\varphi'$ .

Sea  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$  fijo. Al buscar soluciones de (4.4) con la forma

$$u(z, y, t) = v(z) \exp(i\xi \cdot y) \exp(\lambda t), \quad (4.6)$$

es decir, buscamos soluciones mediante separación de variables, obtenemos de forma natural el problema de valores propios

$$\mathcal{L}u = \lambda u. \quad (4.7)$$

Como  $v(z)$  es una función acotada, entonces si  $\text{Re } \lambda < 0$ ,

$$|u(z, y, t)| \leq |v(z)| \exp(t \text{Re } \lambda) \leq K \exp(t \text{Re } \lambda),$$

por lo tanto,  $u(z, y, t) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . De este análisis nos percatamos que la definición de estabilidad espectral (Definición 3.2) es inherente al número de dimensiones.

Sea  $u(z, y, t)$  como en (4.6), entonces el problema de valores propios (4.7) se convierte en

$$\lambda v(z) = v''(z) - \|\xi\|^2 v(z) - cv'(z) + v(z)f'(\varphi). \quad (4.8)$$

Para cada  $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$ , el lado derecho de la ecuación (4.8) define el operador lineal

$$\mathcal{L}_{\xi}v(z) := v''(z) - cv'(z) + (f'(\varphi) - \|\xi\|^2)v(z), \quad (4.9)$$

por lo tanto, la ecuación (4.8) puede ser escrita de manera sintética como

$$\mathcal{L}_\xi v(z) = \lambda v(z). \quad (4.10)$$

Observemos que  $\psi = \varphi' \in \ker(\mathcal{L}_\xi + \|\xi\|^2 \mathcal{I})$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \psi &= \varphi^{(3)} - \|\xi\|^2 \varphi' - c\varphi'' + \varphi' f'(\varphi) \\ &= c\varphi'' - \varphi' f'(\varphi) - \|\xi\|^2 \varphi' - c\varphi'' + \varphi' f'(\varphi) \\ &= -\|\xi\|^2 \psi. \end{aligned}$$

La estabilidad espectral de la onda  $\varphi$  es determinada por el espectro del operador  $\mathcal{L}_\xi$ , es decir, por el problema de valores propios (4.10).

El siguiente teorema nos muestra la localización del espectro puntual del operador  $\mathcal{L}_\xi$  y es análogo al discutido en el capítulo anterior (Teorema 3.2).

**Teorema 4.1** *Sea  $\lambda \in \sigma_{pt}(\mathcal{L}_\xi)$ , entonces  $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ .*

**Demostración:** Sea  $g(z)$  la función definida por

$$g(z) = v(z) \exp\left\{-\frac{cz}{2}\right\},$$

así,

$$\begin{aligned} g''(z) &= \left\{v''(z) - cv'(z) + \frac{c^2}{4}v(z)\right\} \exp\left\{-\frac{cz}{2}\right\} \\ &= \left\{\lambda v(z) + \|\xi\|^2 v(z) - v(z)f'(\varphi) + \frac{c^2}{4}v(z)\right\} \exp\left\{-\frac{cz}{2}\right\} \quad \text{usando (4.8)} \\ &= \lambda g(z) + \|\xi\|^2 g(z) - f'(\varphi)g(z) + \frac{c^2}{4}g(z), \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$g''(z) + \left\{f'(\varphi) - \|\xi\|^2 - \frac{c^2}{4}\right\}g(z) = \lambda g(z). \quad (4.11)$$

Ya que (4.11) se cumple para toda función propia del operador  $\mathcal{L}_\xi$ , en particular se cumple para  $\psi(z) = \varphi'(z)$ , entonces

$$f'(\varphi) - \frac{c^2}{4} = -\frac{\psi''(z)}{\psi(z)}. \quad (4.12)$$

Combinando (4.11) y (4.12) obtenemos

$$g''(z) + \left\{-\|\xi\|^2 - \frac{\psi''(z)}{\psi(z)}\right\}g(z) = \lambda g(z). \quad (4.13)$$

Recordemos que del lema 3.3 se tiene la siguiente identidad

$$\psi^2(z) \left\| \frac{d}{dz} \frac{g(z)}{\psi(z)} \right\|^2 = \|g'(z)\|^2 - \psi'(z) \frac{d}{dz} \left( \frac{\|g(z)\|^2}{\psi(z)} \right). \quad (4.14)$$

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (4.13) por  $\overline{g(z)}$  e integrar sobre todo  $\mathbb{R}$  y usando (4.14), se tiene que

$$\begin{aligned} \lambda \int_{\mathbb{R}} \|g(z)\|^2 dz &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \overline{g(z)} g''(z) - \frac{\psi''(z)}{\psi(z)} \|g(z)\|^2 - \|\xi\|^2 \|g(z)\|^2 \right] dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left[ \psi'(z) \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\|g(z)\|^2}{\psi(z)} \right\} - \|g'(z)\|^2 - \|\xi\|^2 \|g(z)\|^2 \right] dz \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \psi^2(z) \left\| \frac{d}{dz} \frac{g(z)}{\psi(z)} \right\|^2 dz - \|\xi\|^2 \int_{\mathbb{R}} \|g(z)\|^2 dz. \end{aligned}$$

De lo cual se sigue inmediatamente el resultado.  $\square$

Observemos que para cada elemento de la familia de operadores

$$\mathcal{U} = \{ \mathcal{L}_\xi \mid \xi \in \mathbb{R}^{n-1} \},$$

donde  $\mathcal{L}_\xi$  está definido como en (4.9), es susceptible a la teoría desarrollada en el capítulo 2.

Para cada  $\mathcal{L}_\xi \in \mathcal{U}$ , el operador es asintóticamente estable (definición 2.1) con

$$a_1^\pm = -c, \quad a_0^+ = f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2, \quad a_0^- = f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2, \quad (4.15)$$

y el operador asintótico  $\mathcal{L}_{\xi, \infty}$  (definición 2.2) asociado a  $\mathcal{L}_\xi$  es

$$\mathcal{L}_{\xi, \infty} = \begin{cases} \mathcal{L}_{\xi, -} & : z < 0 \\ \mathcal{L}_{\xi, +} & : z > 0 \end{cases},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\xi, -} v &= \Delta v - cv_z + (f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2)v, \\ \mathcal{L}_{\xi, +} v &= \Delta v - cv_z + (f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2)v, \end{aligned}$$

para este caso las matrices asintóticas son

$$A_-(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(\varphi_-) + \|\xi\|^2 & c \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A_+(\lambda) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda - f'(\varphi_+) + \|\xi\|^2 & c \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Para estudiar el comportamiento del espectro esencial del operador  $\mathcal{L}_\xi$  será necesario calcular los índices de Morse de la matrices anteriores, es decir, será necesario determinar  $\text{Re } \mu_{1,2}^\pm$ .

En este caso, las fronteras de Fredholm,  $\sigma_F(\mathcal{L}_{\xi, \pm})$ , son las curvas en el plano complejo dadas por

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{\xi, -}) = \left\{ \lambda = -k^2 - cik + f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2 \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

y

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{\xi, +}) = \left\{ \lambda = -k^2 - cik + f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2 \mid k \in \mathbb{R} \right\}.$$



En el caso de que  $c \neq 0$ , entonces

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{\xi,-}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2 - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c} \right)^2 \right\}$$

y

$$\sigma_F(\mathcal{L}_{\xi,+}) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda = f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2 - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c} \right)^2 \right\},$$

que describen parábolas cuyos vértices son  $(f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2, 0)$  y  $(f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2, 0)$ , respectivamente.

Sean  $a, b$  definidos como

$$\begin{aligned} a &:= \min\{f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2, f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2\}, \\ b &:= \max\{f'(\varphi_-) - \|\xi\|^2, f'(\varphi_+) - \|\xi\|^2\}. \end{aligned}$$

Supongamos que  $c \neq 0$  y consideremos el conjunto

$$\Omega_\xi := \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid a - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c} \right)^2 \leq \operatorname{Re} \lambda \leq b - \left( \frac{\operatorname{Im} \lambda}{c} \right)^2 \right\}.$$

La técnica para encontrar el espectro esencial del operador  $\mathcal{L}_\xi$  consiste en demostrar que  $\operatorname{ind}(\mathcal{L}_{\xi,\infty} - \lambda\mathcal{I}) = 1$  para  $\lambda \in \Omega_\xi$ .



## Capítulo 5

---

# Simulaciones Numéricas

---

Para corroborar los resultados de las secciones anteriores se realizaron simulaciones numéricas usando el método de diferencias finitas considerando el problema

$$\begin{aligned}u_t &= u_{xx} + f(u), & (x, t) \in \Omega = (a, b) \times (0, T], \\u(x, 0) &= g(x), & x \in [a, b] \\u_x(a, t) &= u_x(b, t) = 0, & t \in [0, T],\end{aligned}\tag{5.1}$$

donde  $g(x)$  es el perfil de onda  $\varphi(z) = \varphi(x + ct)$  evaluado en  $t = 0$ . Las razones para considerar las condiciones de frontera es que suponemos que el dominio es cerrado, por lo que no tenemos flujo de entrada o salida en las fronteras.

Lo subsecuente es una descripción del método de diferencias finitas usado en este trabajo de tesis para resolver numéricamente las ecuaciones de reacción difusión escalares.

Sean  $\Delta x$  y  $\Delta t$  pequeños. Usando expansiones en series de Taylor podemos aproximar  $u_t(x, t)$  por el cociente diferencial

$$u_t(x, t) \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}.\tag{5.2}$$

Similarmente, podemos aproximar la derivada espacial  $u_x(x, t)$  como

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x, t)}{\Delta x},\tag{5.3}$$

o por

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x, t) - u(x - \Delta x, t)}{\Delta x}.\tag{5.4}$$

Al sumar (5.3) y (5.4), se tiene que

$$u_x(x, t) \approx \frac{u(x + \Delta x, t) - u(x - \Delta x, t)}{2\Delta x}.\tag{5.5}$$

Para obtener una aproximación de  $u_{xx}(x, t)$  observemos que

$$\begin{aligned}
u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t) &= \{u(x, t) - 2u(x, t) + u(x, t)\} + \{-u_x(x, t) + u_x(x, t)\} \Delta x \\
&+ \left\{ \frac{1}{2}u_{xx}(x, t) + \frac{1}{2}u_{xx}(x, t) \right\} (\Delta x)^2 \\
&+ \left\{ -\frac{1}{6}u_{xxx}(x, t) + \frac{1}{6}u_{xxx}(x, t) \right\} (\Delta x)^3 \\
&+ \left\{ \frac{1}{24}u_{xxxx}(x, t) + \frac{1}{24}u_{xxxx}(x, t) \right\} (\Delta x)^4 + \dots \\
&= u_{xx}(x, t)(\Delta x)^2 + \frac{1}{12}u_{xxxx}(x, t)(\Delta x)^4 + \dots
\end{aligned}$$

Finalmente, dividiendo por  $(\Delta x)^2$  obtenemos la aproximación

$$u_{xx}(x, t) \approx \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2}. \quad (5.6)$$

Aproximaremos la ecuación diferencial parcial de la siguiente manera. Dividiremos el intervalo  $[a, b]$  en subintervalos de longitud  $\Delta x$  donde  $(n + 1)\Delta x = b$  y consideremos una discretización en el tiempo usando pasos de longitud  $\Delta t$  empezando en  $t = 0$ . Definamos los puntos espaciales  $x_j = j\Delta x$  para  $j = 0, 1, \dots, n + 1$  y los niveles de tiempo  $t_m = m\Delta t$  con  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Sea  $u_j^m$  una aproximación de  $u(x, t)$  en  $(x_j, t_m)$ , es decir,

$$u_j^m \approx u(j\Delta x, m\Delta t).$$

El siguiente paso es suponer que hemos calculado  $u_j^m$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$  con algún  $m \geq 0$  y deseamos calcular  $u_j^{m+1}$  para todo  $j \in \{0, 1, \dots, n + 1\}$ . Para esto, observemos que las aproximaciones (5.2) y (5.6) dan lugar al esquema

$$\frac{u_j^{m+1} - u_j^m}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^m - 2u_j^m + u_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} + f(u_j^m) \quad \text{para } j = 1, 2, \dots, n, \quad m \geq 0,$$

que puede ser escrito en la forma

$$u_j^{m+1} = ru_{j-1}^m + (1 - 2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta t f(u_j^m), \quad j = 1, \dots, n, \quad (5.7)$$

donde  $r = \Delta t / \Delta x^2$  y  $m \geq 0$ . Inicializamos el esquema usando la condición inicial

$$u_j^0 = g(x_j), \quad j = 0, \dots, n + 1. \quad (5.8)$$

Las condiciones de frontera de (5.1) en  $x = a$  y  $x = b$  son incorporadas introduciendo los puntos auxiliares  $x_{-1} = a - \Delta x$  y  $x_{n+2} = b + \Delta x$ . Como  $u_x(a, t) = u_x(b, t) = 0$ , usamos las siguientes condiciones de frontera discretas:

$$\frac{u_1^m - u_{-1}^m}{2\Delta x} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{u_{n+2}^m - u_n^m}{2\Delta x} = 0. \quad (5.9)$$

Combinando (5.7) y (5.9), obtenemos

$$u_0^{m+1} = 2ru_1^m + (1 - 2r)u_0^m + \Delta t f(u_0^m), \quad m \geq 0 \quad (5.10)$$

en la frontera izquierda y

$$u_{n+1}^{m+1} = 2ru_n^m + (1 - 2r)u_{n+1}^m + \Delta t f(u_{n+1}^m), \quad m \geq 0 \quad (5.11)$$

en la frontera derecha. Por lo tanto, el esquema de diferencias finitas está completamente especificado por las condiciones iniciales (5.8), el esquema (5.7) y las condiciones de frontera (5.10) y (5.11). Para facilitar futuras referencias, podemos sintetizar el esquema como

$$\begin{aligned}
 u_j^0 &= g(x_j), \quad j = 0, \dots, n+1 \quad \text{para } m \geq 0 \\
 u_0^{m+1} &= 2ru_1^m + (1-2r)u_0^m + \Delta t f(u_0^m), \\
 u_j^{m+1} &= ru_{j-1}^m + (1-2r)u_j^m + ru_{j+1}^m + \Delta t f(u_j^m), \quad 1 \leq j \leq n \\
 u_{n+1}^{m+1} &= 2ru_n^m + (1-2r)u_{n+1}^m + \Delta t f(u_{n+1}^m).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

El esquema (5.12) es denominado *Método de Euler hacia adelante*. La estabilidad y convergencia para este esquema son ampliamente estudiadas en [24] y [23]. En particular se establece que si

$$\lambda := \frac{\Delta t}{\Delta x^2} < \frac{1}{2},$$

el esquema es estable.

**Ecuación Biestable:** Consideramos el caso en el que el término de difusión es

$$f(u) = u(1-u)(u-0.25).$$

Y la simulación fue realizada en el dominio

$$\Omega = (-10, 10) \times (0, 10).$$

Obteniéndose los siguientes resultados

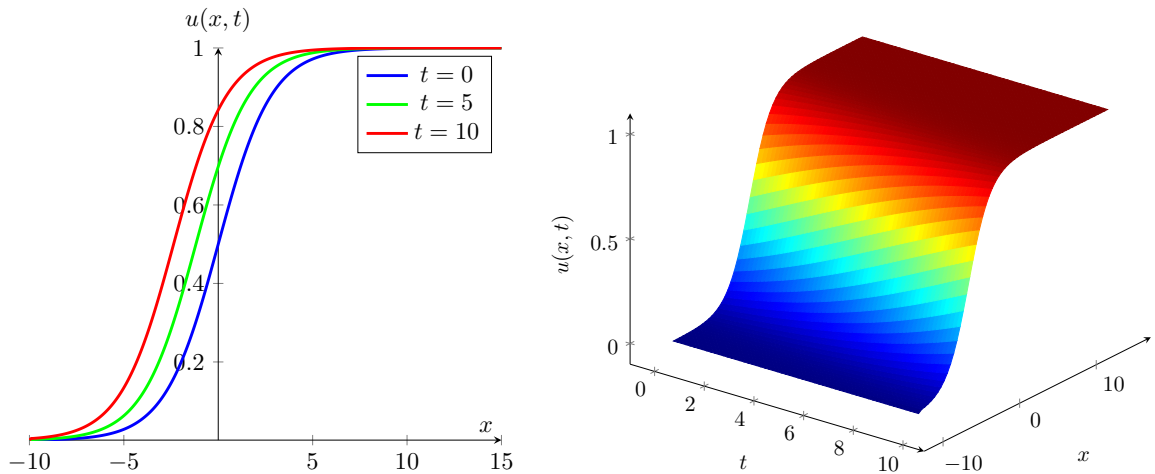


Figura 5.1: Simulación de la ecuación biestable con parámetro  $\alpha = 0.25$ .

Observemos que el perfil de onda (gráfica de la izquierda) viaja de derecha a izquierda, que es acorde a lo discutido en la sección 3.3.

En las tablas 5.1 y 5.2 se hace una comparación entre la solución numérica obtenida  $u(x, t)$  y la solución analítica  $u_a(x, t)$  para ciertos valores de  $x$  y  $t = 5, 10$ , así como el error relativo, es decir,

$$\text{Error Relativo} = \frac{|u(x, t) - u_a(x, t)|}{|u_a(x, t)|}.$$

$t$	$x$	$u(x, t)$	$u_a(x, t)$	Error Relativo
5.00	-10.000	0.002 956	0.002 956	0.000 001
5.00	-9.000	0.005 976	0.005 976	0.000 000
5.00	-8.000	0.012 047	0.012 047	0.000 000
5.00	-7.000	0.024 133	0.024 133	0.000 001
5.00	-6.000	0.047 759	0.047 759	0.000 001
5.00	-5.000	0.092 328	0.092 328	0.000 000
5.00	-4.000	0.171 018	0.171 018	0.000 001
5.00	-3.000	0.294 979	0.294 980	0.000 001
5.00	-2.000	0.459 038	0.459 039	0.000 000
5.00	-1.000	0.632 485	0.632 485	0.000 000
5.00	0.000	0.777 300	0.777 300	0.000 000
5.00	1.000	0.876 220	0.876 219	0.000 000
5.00	2.000	0.934 882	0.934 882	0.000 000
5.00	3.000	0.966 796	0.966 796	0.000 000
5.00	4.000	0.983 348	0.983 348	0.000 000
5.00	5.000	0.991 719	0.991 719	0.000 000
5.00	6.000	0.995 900	0.995 900	0.000 000
5.00	7.000	0.997 974	0.997 974	0.000 000
5.00	8.000	0.999 000	0.999 000	0.000 000
5.00	9.000	0.999 507	0.999 507	0.000 000
5.00	10.000	0.999 757	0.999 757	0.000 000

**Cuadro 5.1:** Comparación entre la solución analítica y la numérica para la ecuación biestable cuando  $t = 5$ .

$t$	$x$	$u(x, t)$	$u_a(x, t)$	Error Relativo
10.00	-10.000	0.010 241	0.010 241	0.000 000
10.00	-9.000	0.020 553	0.020 553	0.000 000
10.00	-8.000	0.040 822	0.040 822	0.000 000
10.00	-7.000	0.079 457	0.079 457	0.000 000
10.00	-6.000	0.148 978	0.148 978	0.000 001
10.00	-5.000	0.262 012	0.262 013	0.000 001
10.00	-4.000	0.418 623	0.418 623	0.000 001
10.00	-3.000	0.593 554	0.593 555	0.000 000
10.00	-2.000	0.747 587	0.747 587	0.000 000
10.00	-1.000	0.857 282	0.857 282	0.000 000
10.00	0.000	0.924 142	0.924 142	0.000 000
10.00	1.000	0.961 101	0.961 101	0.000 000
10.00	2.000	0.980 434	0.980 434	0.000 000
10.00	3.000	0.990 256	0.990 256	0.000 000
10.00	4.000	0.995 172	0.995 172	0.000 000
10.00	5.000	0.997 613	0.997 613	0.000 000
10.00	6.000	0.998 822	0.998 822	0.000 000
10.00	7.000	0.999 419	0.999 419	0.000 000
10.00	8.000	0.999 713	0.999 713	0.000 000
10.00	9.000	0.999 859	0.999 859	0.000 000
10.00	10.000	0.999 930	0.999 930	0.000 000

**Cuadro 5.2:** Comparación entre la solución analítica y la numérica para la ecuación biestable cuando  $t = 10$ .

Las comparaciones entre las soluciones numéricas y analíticas muestran una buena concordancia entre estas. Cabe mencionar que para este ejemplo se ha utilizado  $\Delta x = 0.2$  y  $\Delta t = 0.01$ .

Se ha omitido tabular los errores cuando  $t = 0$  ya que por construcción (ver el esquema (5.12)) los errores son cero.

**Fisher-KPP:** En este caso, consideremos el termino de difusión dado por

$$f(u) = u(1 - u^q), \quad q > 0$$

En [15] se da la fórmula de solución explícita

$$u(x, t) = \frac{1}{(1 + a \exp(bz))^s}, \quad z = x - ct,$$

donde

$$s = \frac{2}{q} \quad b = \frac{q}{\sqrt{2(q+2)}}, \quad c = \frac{q+4}{\sqrt{2(q+2)}}, \quad a = \sqrt{2} - 1.$$

Para la simulación se escogió el valor de  $q = 1$ , y se consideró el dominio

$$\Omega = (-20, 20) \times (0, 5)$$

A continuación presentamos los resultados

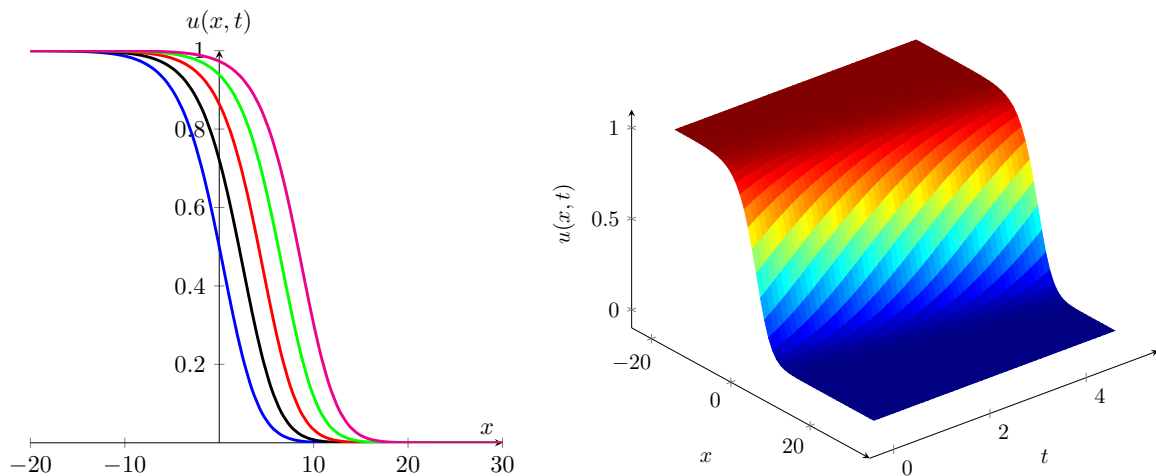


Figura 5.2: Simulación de la ecuación Fisher-KPP. En la gráfica de la izquierda se presenta el perfil de onda, de izquierda a derecha con los tiempos  $t = 0, 1, 2, 3, 4$ , respectivamente.

En las tablas 5.3, 5.4 y 5.5 se realiza una comparación entre la solución numérica obtenida  $u(x, t)$  y la solución analítica  $u_a(x, t)$  cuando  $t = 2, 3, 4$ .

$t$	$x$	$u(x, t)$	$u_a(x, t)$	Error Relativo
2.00	-20.000	0.999 955	0.999 955	0.000 000
2.00	-19.000	0.999 933	0.999 933	0.000 000
2.00	-18.000	0.999 899	0.999 899	0.000 000
2.00	-17.000	0.999 849	0.999 849	0.000 000
2.00	-16.000	0.999 772	0.999 772	0.000 000
2.00	-15.000	0.999 657	0.999 657	0.000 000
2.00	-14.000	0.999 485	0.999 485	0.000 000
2.00	-13.000	0.999 225	0.999 225	0.000 000
2.00	-12.000	0.998 835	0.998 835	0.000 000
2.00	-11.000	0.998 248	0.998 248	0.000 000
2.00	-10.000	0.997 366	0.997 366	0.000 000
2.00	-9.000	0.996 042	0.996 042	0.000 000
2.00	-8.000	0.994 056	0.994 056	0.000 000
2.00	-7.000	0.991 079	0.991 079	0.000 000
2.00	-6.000	0.986 626	0.986 626	0.000 000
2.00	-5.000	0.979 985	0.979 985	0.000 000
2.00	-4.000	0.970 121	0.970 121	0.000 000
2.00	-3.000	0.955 562	0.955 562	0.000 000
2.00	-2.000	0.934 272	0.934 272	0.000 000
2.00	-1.000	0.903 564	0.903 564	0.000 000
2.00	0.000	0.860 148	0.860 148	0.000 000
2.00	1.000	0.800 508	0.800 508	0.000 000
2.00	2.000	0.721 837	0.721 837	0.000 000
2.00	3.000	0.623 673	0.623 673	0.000 000
2.00	4.000	0.509 841	0.509 841	0.000 000
2.00	5.000	0.389 446	0.389 446	0.000 000
2.00	6.000	0.275 224	0.275 224	0.000 000
2.00	7.000	0.179 089	0.179 089	0.000 000
2.00	8.000	0.107 483	0.107 483	0.000 000
2.00	9.000	0.059 958	0.059 958	0.000 000
2.00	10.000	0.031 451	0.031 451	0.000 000
2.00	11.000	0.015 713	0.015 713	0.000 000
2.00	12.000	0.007 567	0.007 567	0.000 000
2.00	13.000	0.003 549	0.003 549	0.000 001
2.00	14.000	0.001 633	0.001 633	0.000 001
2.00	15.000	0.000 742	0.000 742	0.000 001
2.00	16.000	0.000 334	0.000 334	0.000 001
2.00	17.000	0.000 149	0.000 149	0.000 001
2.00	18.000	0.000 067	0.000 067	0.000 001
2.00	19.000	0.000 030	0.000 030	0.000 001
2.00	20.000	0.000 013	0.000 013	0.000 001

Cuadro 5.3: Comparación entre la solución analítica y la numérica en el caso de la ecuación Fisher-KPP cuando  $t = 2$ .



$t$	$x$	$u(x, t)$	$u_a(x, t)$	Error Relativo
3.00	-20.000	0.999 981	0.999 981	0.000 000
3.00	-19.000	0.999 971	0.999 971	0.000 000
3.00	-18.000	0.999 956	0.999 956	0.000 000
3.00	-17.000	0.999 934	0.999 934	0.000 000
3.00	-16.000	0.999 901	0.999 901	0.000 000
3.00	-15.000	0.999 851	0.999 851	0.000 000
3.00	-14.000	0.999 776	0.999 776	0.000 000
3.00	-13.000	0.999 663	0.999 663	0.000 000
3.00	-12.000	0.999 493	0.999 493	0.000 000
3.00	-11.000	0.999 238	0.999 238	0.000 000
3.00	-10.000	0.998 854	0.998 854	0.000 000
3.00	-9.000	0.998 277	0.998 277	0.000 000
3.00	-8.000	0.997 410	0.997 410	0.000 000
3.00	-7.000	0.996 108	0.996 108	0.000 000
3.00	-6.000	0.994 155	0.994 155	0.000 000
3.00	-5.000	0.991 227	0.991 227	0.000 000
3.00	-4.000	0.986 848	0.986 848	0.000 000
3.00	-3.000	0.980 314	0.980 314	0.000 000
3.00	-2.000	0.970 609	0.970 609	0.000 000
3.00	-1.000	0.956 280	0.956 280	0.000 000
3.00	0.000	0.935 316	0.935 316	0.000 000
3.00	1.000	0.905 058	0.905 058	0.000 000
3.00	2.000	0.862 236	0.862 236	0.000 000
3.00	3.000	0.803 330	0.803 330	0.000 000
3.00	4.000	0.725 475	0.725 475	0.000 000
3.00	5.000	0.628 075	0.628 075	0.000 000
3.00	6.000	0.514 745	0.514 745	0.000 000
3.00	7.000	0.394 381	0.394 381	0.000 000
3.00	8.000	0.279 645	0.279 645	0.000 000
3.00	9.000	0.182 588	0.182 588	0.000 000
3.00	10.000	0.109 936	0.109 936	0.000 000
3.00	11.000	0.061 499	0.061 499	0.000 000
3.00	12.000	0.032 333	0.032 333	0.000 000
3.00	13.000	0.016 182	0.016 182	0.000 000
3.00	14.000	0.007 804	0.007 804	0.000 001
3.00	15.000	0.003 663	0.003 663	0.000 002
3.00	16.000	0.001 687	0.001 687	0.000 002
3.00	17.000	0.000 766	0.000 766	0.000 002
3.00	18.000	0.000 345	0.000 345	0.000 002
3.00	19.000	0.000 154	0.000 154	0.000 002
3.00	20.000	0.000 069	0.000 069	0.000 002

Cuadro 5.4: Comparación entre la solución analítica y la numérica en el caso de la ecuación Fisher-KPP cuando  $t = 3$ .

$t$	$x$	$u(x, t)$	$u_a(x, t)$	Error Relativo
4.00	-20.000	0.999 992	0.999 992	0.000 000
4.00	-19.000	0.999 987	0.999 987	0.000 000
4.00	-18.000	0.999 981	0.999 981	0.000 000
4.00	-17.000	0.999 971	0.999 971	0.000 000
4.00	-16.000	0.999 957	0.999 957	0.000 000
4.00	-15.000	0.999 935	0.999 935	0.000 000
4.00	-14.000	0.999 903	0.999 903	0.000 000
4.00	-13.000	0.999 854	0.999 854	0.000 000
4.00	-12.000	0.999 780	0.999 780	0.000 000
4.00	-11.000	0.999 669	0.999 669	0.000 000
4.00	-10.000	0.999 502	0.999 502	0.000 000
4.00	-9.000	0.999 251	0.999 251	0.000 000
4.00	-8.000	0.998 873	0.998 873	0.000 000
4.00	-7.000	0.998 306	0.998 306	0.000 000
4.00	-6.000	0.997 453	0.997 453	0.000 000
4.00	-5.000	0.996 173	0.996 173	0.000 000
4.00	-4.000	0.994 252	0.994 252	0.000 000
4.00	-3.000	0.991 373	0.991 373	0.000 000
4.00	-2.000	0.987 065	0.987 065	0.000 000
4.00	-1.000	0.980 638	0.980 638	0.000 000
4.00	0.000	0.971 089	0.971 089	0.000 000
4.00	1.000	0.956 986	0.956 986	0.000 000
4.00	2.000	0.936 344	0.936 344	0.000 000
4.00	3.000	0.906 530	0.906 530	0.000 000
4.00	4.000	0.864 296	0.864 296	0.000 000
4.00	5.000	0.806 119	0.806 119	0.000 000
4.00	6.000	0.729 080	0.729 080	0.000 000
4.00	7.000	0.632 449	0.632 449	0.000 000
4.00	8.000	0.519 636	0.519 636	0.000 000
4.00	9.000	0.399 326	0.399 326	0.000 000
4.00	10.000	0.284 097	0.284 097	0.000 000
4.00	11.000	0.186 131	0.186 131	0.000 000
4.00	12.000	0.112 432	0.112 432	0.000 000
4.00	13.000	0.063 073	0.063 073	0.000 000
4.00	14.000	0.033 237	0.033 237	0.000 000
4.00	15.000	0.016 665	0.016 665	0.000 000
4.00	16.000	0.008 047	0.008 047	0.000 001
4.00	17.000	0.003 780	0.003 780	0.000 002
4.00	18.000	0.001 742	0.001 742	0.000 002
4.00	19.000	0.000 792	0.000 792	0.000 002
4.00	20.000	0.000 357	0.000 357	0.000 002

Cuadro 5.5: Comparación entre la solución analítica y la numérica en el caso de la ecuación Fisher-KPP cuando  $t = 4$ .

Las tablas anteriores pueden ser utilizadas para estimar la velocidad de la onda viajera. Por ejemplo, podemos determinar la distancia (en  $x$ ) entre dos valores de la solución  $u(x, t) = 0.5$  para  $t = 3$  y  $t = 4$ . Para  $u(x, t = 3) = 0.5$ , el valor de  $x$  puede ser estimado por interpolación lineal con los valores en la tabla 5.4.

$$x = 6 + \frac{(7 - 66)(0.5 - 0.514745)}{0.394381 - 0.514745} = 6.122503406.$$

Similarmente, para  $t = 4$ , la interpolación lineal para determinar  $x$  cuando  $u(x, t = 4) = 0.5$  obtenemos

$$x = 8 + \frac{(9 - 8)(0.5 - 0.519636)}{0.399326 - 0.519636} = 8.163211703.$$

Así, el estimado para la velocidad es

$$c = \frac{dx}{dt} = \frac{8.163211703 - 6.122503406}{4 - 3} = 2.0400708297,$$

que concuerda con el valor analítico de  $c = 5/\sqrt{6}$  expuesto al inicio del ejemplo.

**Perturbación:** Consideramos una perturbación de la función  $u$  con la forma

$$u(z, t) = \varphi(z) + w(z, t),$$

donde  $w(z, t) = N(\mu, \sigma^2)$  es una distribución normal con media  $\mu$  y desviación estándar  $\sigma^2$ , es decir, consideramos que la perturbación es constante para todo tiempo  $t$ . Para esta simulación elegimos

$$\Omega = (-10, 15) \times (0, 10), \quad \mu = 0, \quad \sigma^2 = 0.6.$$

Y consideremos el término de difusión

$$f(u) = u(1 - u)(u - 0.75).$$

Sea  $E(x, t)$  la función definida como

$$E(x, t) = |u(x, t) - u_a(x, t)|,$$

donde la función  $u$  es la aproximación numérica del problema perturbado y  $u_a$  es la solución analítica obtenida en la sección 3.3, es decir,  $E(x, t)$  representa el error numérico. En las gráficas 5.3 se muestran  $u(x, t)$  y los perfiles de onda en el dominio  $\Omega$ , mientras que en 5.4 se esboza el comportamiento de la función  $E(x, t)$ .

De la gráfica 5.4 podemos observar que el error numérico tiene el comportamiento

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(x, t) = 0,$$

corroborando lo discutido en la sección 3.2.

Observemos que estas simulaciones computacionales proporcionan evidencia numérica de la estabilidad lineal a partir de estabilidad no lineal.

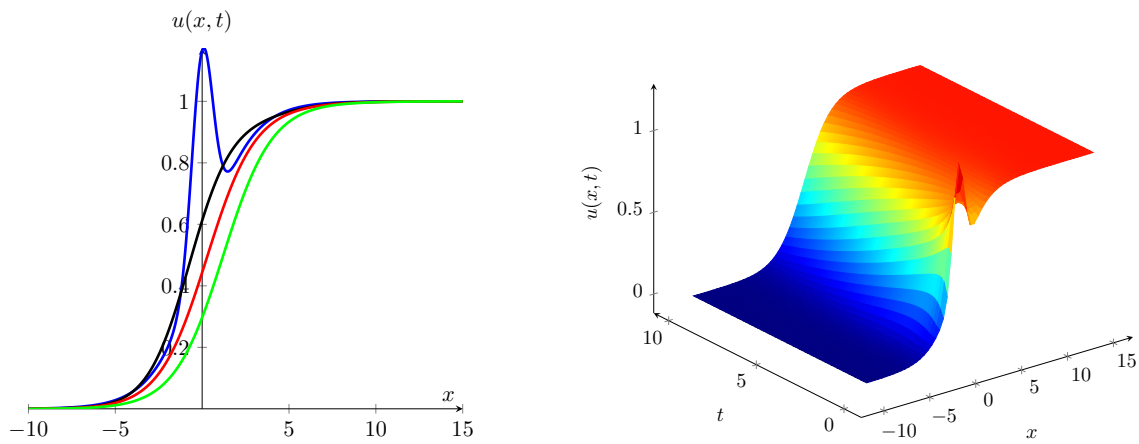


Figura 5.3: Simulación de la ecuación biestable perturbada con parámetro  $\alpha = 0.75$  . En la gráfica de la izquierda se presenta el perfil de onda, de izquierda a derecha con los tiempos  $t = 0, 2, 4, 6, 8$ , respectivamente.

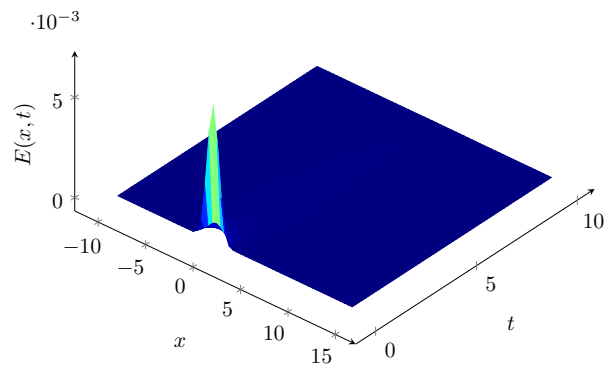


Figura 5.4: Gráfica de la función  $E(x,t)$

---

# Conclusiones

---

Tres de las técnicas más relevantes para estudiar ecuaciones diferenciales parciales no lineales son:

- Métodos de linealización.
- Expansión de funciones.
- Soluciones numéricas.

En este trabajo de tesis nos enfocamos en ecuaciones diferenciales parciales de reacción difusión usando métodos de linealización al rededor de soluciones con cierto comportamiento (ondas viajeras), para estudiar su estabilidad espectral, que consiste básicamente en:

- Demostrar la existencia de ondas viajeras mediante argumentos geométricos en el plano fase.
- Linealizar la ecuación de reacción difusión al rededor de la onda viajera.
- Estudiar el espectro del operador  $\mathcal{L}$  que se obtiene al linealizar.
- Estudiar las fronteras del espectro del operador  $\mathcal{L}$  (fronteras de Fredholm).
- Calcular los índices de Morse en los subconjuntos de  $\mathbb{C}$  en los que fue dividido por las fronteras de Fredholm, y así decidir donde se localiza el espectro.

Se estudió la existencia, unicidad y comportamiento de soluciones en forma de ondas viajeras para las ecuaciones de reacción difusión usando técnicas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Específicamente se trataron las ecuaciones tipo Fisher-KPP y bistable.

Se estableció la noción de estabilidad espectral para ondas viajeras que llevó al problema de estudiar la descomposición espectral de un cierto operador  $\mathcal{L}$ . Específicamente, se descompuso el espectro del operador  $\mathcal{L}$ ,  $\sigma(\mathcal{L})$ , en los el espectro puntual y el espectro esencial, es decir,

$$\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_{\text{pt}}(\mathcal{L}) \cup \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{L}).$$

La localización y comportamiento del espectro puntual se estableció en el Teorema 3.2. Para el estudio del espectro esencial se ocuparon técnicas en espacios de Hilbert, específicamente, se planteó la noción de

operadores de Fredholm que fueron la clave para caracterizar el espectro esencial.

Se demostró la estabilidad espectral para ecuaciones de reacción difusión en una dimensión espacial tipo biestable y Fisher-KPP. En este último caso no se obtuvo directamente la estabilidad espectral, pero se reformuló el problema en un espacio de funciones distinto para obtener la estabilidad, con lo cual observamos que el espacio de perturbaciones que podemos tomar en cuenta es más restrictivo.

Finalmente, se implementaron simulaciones computacionales de la ecuaciones de reacción difusión, que proporcionaron evidencia numérica de la estabilidad lineal a partir de estabilidad no lineal.

La ventaja de las técnicas usadas en este trabajo radica en que son fácilmente generalizadas a sistemas de ecuaciones de reacción difusión, para este propósito se introducen las ideas de dicotomías exponenciales [3] y el teorema de Palmer [18] que relaciona las dicotomías exponenciales con los operadores de Fredholm.

---

# Bibliografía

---

- [1] Birman, M. S. Solomjak, M. Z. (1987). *Spectral Theory of Self-Adjoint Operators in Hilbert Space*. Mathematics and its Applications. Springer.
- [2] Brezis, H. (2010). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Number 223 in Universitext. Springer-Verlag.
- [3] Coppel, W. A. *Dichotomies in Stability Theory*.
- [4] Fiedler, B. Scheel, A. (2003). *Spatio-Temporal Dynamics of Reaction-Diffusion Patterns*. In *Trends in Nonlinear Analysis*. Springer-Verlag, Berlin.
- [5] Fisher, A. (1937). The wave of advance of advantageous genes. *Annals of Eugenics*, 7(4):355–369.
- [6] Frank-Kamenetskii, D. A. Zeldovich, Y. (1938). A theory of thermal propagation of flame. *Acta Physicochim USSR*, 9:341–350.
- [7] Hartman, P. (1964). *Ordinary Differential Equations*. John Wiley, New York,.
- [8] Henry, D. (1981). *Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations*. Number 840 in Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, second edition.
- [9] Kapitula, T. Promislow, K. (2013). *Spectral and Dynamical Stability of Nonlinear Waves*. Number 185 in Applied Mathematical Sciences. Springer New York, first edition.
- [10] Kato, T. (1980). *Perturbation Theory for Linear Operators*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag.
- [11] Kolmogorov, A. N. Petrovsky, I. G. P. N. S. (1937). Investigation of the equation of diffusion combined with increasing of the substance and it's application to a biology problem. *Math and Mech*, 1(6):1–25.
- [12] Leoni, G. (2009). *A First Course in Sobolev Spaces*, volume 105 of *Graduate Studies in Mathematics*. AMS, second edition.
- [13] Li, B. L. Petrovskii, S. V. (2005). *Exactly Solvable Models of Biological Invasion*. CRC PRESS, first edition.

- [14] Logan, J. D. (1994). *An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations*. Wiley-Interscience, second edition.
- [15] Murray, J. D. (2002a). *Mathematical Biology. I*. Number 17 in Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, third edition.
- [16] Murray, J. D. (2002b). *Mathematical Biology. II*. Number 18 in Interdisciplinary Applied Mathematics. Springer-Verlag, third edition.
- [17] Nagumo, J. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proceeding of the IRE*, 50:2061–2070.
- [18] Palmer, K. (1988). Exponential dichotomies and fredholm operators. *Soc. Proc. Amer. Math.*, 104(1):149–156.
- [19] Perko, L. (2001). *Differential Equations and Dynamical Systems*. Number 7 in Texts in Applied Mathematics. Springer Verlag, third edition.
- [20] Rustonw, A. F. (2004). *Fredholm Theory in Banach Spaces*. Cambridge Tracts in Mathematics, first edition.
- [21] Sandstede., B. (2002). Stability of travelling waves. In Fiedler, B., editor, *Handbook of Dynamical Systems*, volume 2, chapter 18, pages 983–1055. Elsevier.
- [22] Taylor, A. E. (1961). *Introduction to Functional Analysis*. Wiley, first edition.
- [23] Thomas, J. W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*. Number 22 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, first edition.
- [24] Tveito, A. W. R. (2000). *Introduction to Partial Differential Equations: A Computational Approach*. Number 29 in Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, second edition.